資料２

課題学習の事例

$\boxed{1}$ 無理数を数直線上にとってみよう。

目的　$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ などの無理数の値を数値的には認識しているが，正確な値（長さ）を作図することにより，「実在」の数値であるという認識を一層深める。

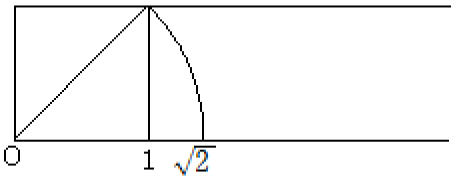
単元　数と式，図形の性質

> **問題**　$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\cdots$ を数直線上にとってみよう。

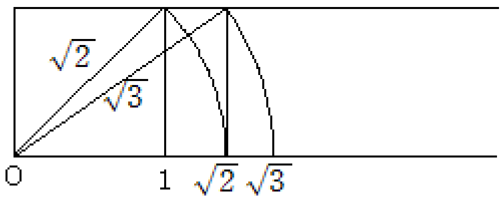
展開例

①　一辺が１の正方形を描き，$\sqrt{2}$ を見つける。

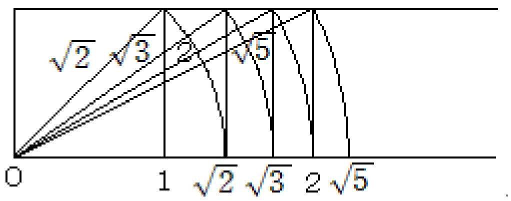
②　コンパスを使って $\sqrt{2}$ を数直線上にとらせる。



③　三平方の定理を使って $\sqrt{3}$ を見つける。



④　同様に $\sqrt{5}$ を作図する。



$\boxed{2}$ $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\cdots$ の近似値を調べよう。

目的　近似値を求めたり，覚えておくことは，数値の計算や大小関係を調べるのに大事である。また，$\sqrt{\ }$ も「実数値」であるということのイメージをもたせることも重要である。

単元　数と式

> **問題**　$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\cdots$ の近似値を調べよう。

展開例

①　$\sqrt{2}$ の近似値を求めさせる。

　$1.2\times1.2=1.44$ ，$1.3\times1.3=1.69$ ，$1.4\times1.4=1.96$ ，$1.5\times1.5=2.25$

　$\sqrt{2}$ の少数第一位は４であることが分かる。

　$\sqrt{\ }$ の数の少数第一位まで求めることができるようにする。

②　$\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{13}\cdots$ の近似値を少数第一位まで求めさせる。

③　電卓を利用して近似値を調べる。

④　$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\cdots$が循環しない少数であることを認識させるために，**有理数を表す無限小数は，必ず循環小数になることを確認する。**

　　1／3＝0.3333・・・，　1／7＝0.142857142857142857・・・

⑤　$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\cdots$小数点以下をできるだけ調べて，循環していない様子(無理数)を認識させる。

⑥　覚え方を調べる。

(1)　$\sqrt{2}$　≒1.41421356 23730950488016887242097・

　　1．　4　1　4　2　1　3　5　6

　　ヒト・ヨ・ヒト・ヨ・ニ・ヒト・ミ・ゴ・ロ →人よ人よに人見ごろ

(2)　$\sqrt{3}$ ≒1.7320508 07568877293527446341505・

　　1．　7　3　2　0　5　0　8

　　ヒト・ナ・ミ・ニ・オ・ゴ・レ・ヤ →人並みにおごれや

(3) $\sqrt{5}$ ≒2.2360679 7749978969640917366873・

　　2．　2　3　6　0　6　7　9

　　フ・ジ・サン・ロク・オー・ム・ナ・ク →富士山麓オーム鳴く

(4) $\sqrt{6}$ ≒2.44948 9742783178098197284074705・

　　2．　4　4　9　4　9（8の隣で四捨五入）

　　ニ・ヨ・ヨ・ク・ヨ・ク →似よ良く良く

(5) $\sqrt{7}$　≒2.645751 31106459059050161575363・

　　7 2．　6　4　5　7　5

　　ナ・ニ・ム・シ・イ・ナ・イ →菜に虫居ない

⑦　発展

　　開平計算を紹介（説明）する。

3　$(a+b)^n$の展開→パスカルの三角形

目的　形式的な展開でなく展開の意味を理解させ，その結果から，組み合わせ，個数の処理，図式的な数字の法則を伝える。

単元　数と式，確率

> **問題**　n＝1，2，3…展開式の係数に着目して，$(a+b)^8$ の展開式の係数を求めよう。

展開例

①　(復習)括弧ごと文字の色分けをして，展開する。

$(a+b)^2=(a+b)(\mathbf{a}+\mathbf{b})=a\,\mathbf{a}+b\,\mathbf{a}+a\,\mathbf{b}+b\,\mathbf{b}$

$=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=(a+b)(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})=a\,\mathbf{a}\,\mathrm{a}+b\,\mathbf{a}\,\mathrm{a}+a\,\mathbf{b}\,\mathrm{a}+b\,\mathbf{b}\,\mathrm{a}+a\,\mathbf{a}\,\mathrm{b}+b\,\mathbf{a}\,\mathrm{b}+a\,\mathbf{b}\,\mathrm{b}+b\,\mathbf{b}\,\mathrm{b}$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

展開は，各括弧から1文字を選び掛け合わせた文字の総和であることを理解する。

②　$(a+b)^4$，$(a+b)^5$ の展開の係数を計算で求めさせる。

③　係数に着目させ規則性を見つけさせる。

④　パスカルの三角形を説明する。

n＝1　　1　1
n＝2　　1　2　1
n＝3　　1　3　3　1
n＝4　　1　4　6　4　1
n＝5　　1　5　10　10　5　1
n＝6　　1　6　15　20　15　6　1

⑤　$(a+b)^8$　を展開してみる。

4　二十歳の誕生日は何曜日

目的　割り算の余りの計算の考え方を用いて，**曜日**について考える。

単元　数と式，整数の性質

問題　2010 年９月 26 日は日曜日です。2013 年２月 21 日は何曜日でしょう。

展開例

①　生徒に考えさせる。（グループで考えさせる）

②　まず日数の確認をする。

１年間は 365 日です。

	１月	２月	３月	４月	５月	６月	７月	８月	９月	10 月	11 月	12 月
日数	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

うるう年は 366 日です。

③　基準とする次の日から求める日までの日数を計算する。

2010/9/26　　9/27　　2013/2/21

？日

④　このとき，（求めた日数）÷７の余りと求める日の曜日との関係は次のようになる。

	日	月	火	水	木	金	土
余り	0	1	2	3	4	5	6

⑤　2010 年の残りの日数は

（30－26）＋31＋30＋31＝96 日

2011 年，2012 年の２年間で

365＋366＝731 日

2013 年１月１日から２月 21 まで，31＋21＝52

以上を合計すると，879 日です。

７で割って余りを求めると 880÷７＝125 余り４

したがって，2013/2/21 は木曜日になる。

問題　自分の二十歳のときの誕生日が何曜日か求めてみよう。

5　キリンの縄くぐり

目的　実際に計算してみて現実を確かめ，イメージと大きなギャップがあることを知り，数学の楽しさ，素晴らしさを知る。

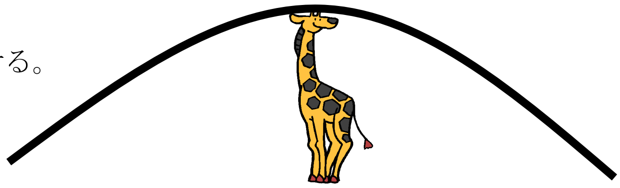
単元　数と式，図形と計量

問題　２地点を結んだ少しゆるめの縄を持ち上げて、高さ４ｍのキリンをくぐらせます。　２地点の距離が２kmのとき、縄を２kmより最低何cmくらい長くする必要があるでしょう。次の①から⑤の中から選びましょう。

①　２００００cm　②２００cm　③２０cm　④２cm　⑤１cm

展開例

①　生徒に予想させる。



②　縄の長さを求める計算式を作らせる。

$2x$m長くしたとすると、２ｋｍは2000mだから

$(1000+x)^2=1000^2+4^2$

$(1000+x)^2=1000016$

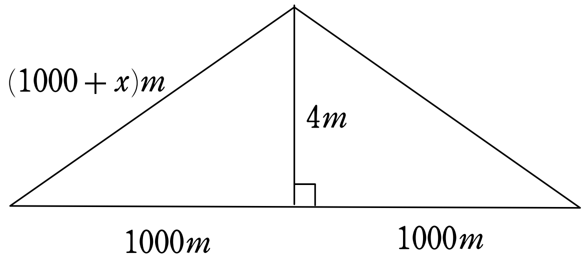
$1000+x=\sqrt{1000016}$

$1000+x\fallingdotseq 1000.008$

よって、x はおよそ0.008mだから

$2x=0.016$

0.016mは1.6ｃｍだから,縄の長さは最低２ｃｍ長くすればよい。



6　身近な放物線を調べよう

目的　放物線は，日常とかけ離れたものではなく，身近に多数存在することを知る。そして，その特徴などにふれ，関数についてより深い知識を認識させる。

単元　２次関数

問題　身近な放物線の曲がり具合を調べよう

展開例

①　身近にある放物線の例を生徒に考えさせ挙げさせる。(事前に調べてくるよう指示)
「パラボラアンテナ」「懐中電灯の反射鏡」「噴水」「ボールを投げた軌跡」など

②　「パラボラアンテナ」「噴水」「ボールを投げた軌跡」の写真などを事前に準備しておき，挙ったものについて（挙らなかったもの）の写真を見せる。

③　それらの写真について，コピーをとり，頂点や曲線のラインをあらかじめ明記したものを用意しておく。そして，生徒に座標軸を書いた薄紙の方眼紙に，そのグラフから適当に点をプロットさせる。

④　目盛りから，簡単な数値の点(x,y)を数個とり，$y=ax^2$ より a の近似値を出す。(電卓を使わせて良い)

⑤　それぞれの例の形と a の値とを比較して特徴を生徒に考えさせ，気が付くことを言わせる。
（例）a の値が小さいほど曲がり具合が「緩やか」

問題　懐中電灯の光で放物線を作ろう。（実験）

展開例

①　各班に分かれて，（部屋を暗くして）懐中電灯の光を黒い紙の上に当てて光の輪郭を考えさせる。

②　角度をいろいろ変えると変わることから，放物線となる状態の角度を考えさせる。光の円錐の母線と机が平行になる時を気付かせる。

③　放物線でない状態は何になるか。楕円，双曲線となることを紹介する。

④　円錐曲線としての放物線としての説明をする。

7　値段と利益の最大値を求めよう

目的　具体的な事例から，関数の式を作り，最大値を考えることで，二次関数の関数概念をより身近にかつ具体的なイメージでとらえさせる。

単元　２次関数

問題　文化祭で作成した「携帯ストラップ」を売ることにした。制作費 100 円であった。売る値段を 100 円にすると，参加者の半数が買い，600 円にすると誰も買わないだろうと予測する。売る値段を上げると買う人の割合は一定の割合で減少する。参加者は 2000 人と予想して，利益を最大にするには，値段と製作個数をどのようにしたらよいか。

展開例

順次段階を追って生徒に式を作らせていく。

①　買う割合をr，売る値段をx円とするとき，rをxの式で表せ。

「売る値段を 100 円にすると，参加者の半数が買い，600 円にすると誰も買わない。売る値段を上げると買う人の割合は一定の割合で減少する。」から式を作れるか。（関数概念）

（答え）$r=b-ax$とおいて，$x=100$のとき，$r=0.5$，$x=600$のとき，$r=0$より

$r=0.6-0.001x$

②　売れる個数をy個とする。yをrの式で表せ。

（答え）$y=2000r$

③　利益をpとおいてpをxの式で表せ。

$$
\begin{aligned}
p&=(x-100)y\\
&=2000(x-100)r\\
&=2000(x-100)(0.6-0.001x)\\
&=-2(x-100)(x-600) \qquad (100\leqq x\leqq 600)\\
&(=-2(x-350)^2+615000)
\end{aligned}
$$

④　売る値段をいくらにすると利益が最大になるか。また，いくつ製作すると良いか。

グラフより，（標準系に直しても良い）

$x=350$

$y=2000r=2000(0.6-0.001\times 350)=500$

（答え）値段を 350 円にし，500 個作ればよい。

⑤　（追加）利益はいくらになるか。

615,000 円

8 黄金比を求めよう

目的　２次関数の応用における問題として，黄金比を扱う。さらに白銀比の話題や以後に習う数列分野のフィボナッチ数列との関係にも触れ，さらなる興味や関心をもたせる。

単元　２次関数

> **問題**　ＡＢ＝a の長方形ＡＢＣＤにおいて，辺ＡＤ，ＢＣ上にそれぞれ点Ｅ，ＦをＣＤ＝ＤＥ＝ＣＦとなるように定めたところ，長方形ＥＡＢＦがもとの長方形ＡＢＣＤと相似になった。辺ＡＤの長さを求めよ。

展開例

①　ＡＤ＝x とし，方程式を作らせる。

②　この方程式が x についての２次方程式となることを確認させ，解の公式を使って生徒に解かせる。

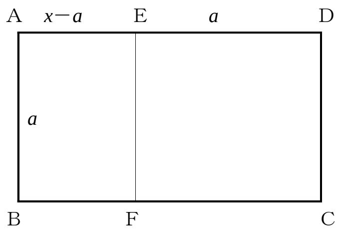
（解）ＡＤ＝x とおくと，ＡＢ：ＡＤ＝ＡＥ：ＡＢより，

$a : x = x-a : a$　　したがって，$x(x-a)=a^2$

$x^2-ax-a^2=0$

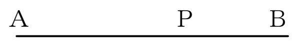
$x=\dfrac{a\pm\sqrt{5}a}{2}$　　$x>0$ より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$

このときの辺の比　$1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　を黄金比という。



③　黄金比をまとめる。

「線分を２つに分けて，全体の大きい方に対する比が，大きい方の小さい方に対する比に等しくなるようにする。」として定義される。ＡＰ：ＡＢ＝ＰＢ：ＡＰ



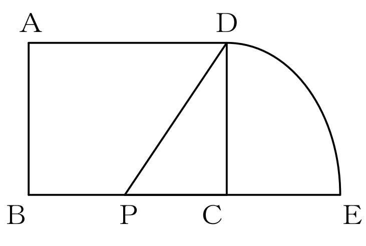
④　黄金四角形（辺の長さの比が黄金比になる四角形）の黄金分割の話題に触れる。

・黄金四角形から短辺を一辺とする正方形を取り除くと，残る部分はまた黄金四角形となる。この長方形は無限個の正方形で埋め尽くされていく。

> **問題**　　黄金比を作図しよう。

展開例

①　正方形ＡＢＣＤを利用して，黄金比　ＡＢ：ＢＥ　が作図できる。作図して生徒に紹介。



※　ＢＰ＝ＰＣとする。

②　なぜ，黄金比になるか考えさせる。

（解）ＡＢ＝２とすると，ＰＣ＝１。よって，ＰＤ＝$\sqrt{5}$

ＢＥ＝ＢＰ＋ＰＥ＝１＋$\sqrt{5}$

（補足）ＡＢ＝２とするとき，ＢＥ上に１＋$\sqrt{5}$ をとるのはどのように作図をしたらよいだろうか。という展開でもよいだろう。

問題　１辺の長さが a である正五角形の対角線の長さを，三角形の相似を用いて求めよ。

展開例

①　正五角形の対角線を結べば，黄金比　ＡＰ：ＡＢ　が作図できる。正五角形の図形の中に黄金比が表れることに触れる。

△ＡＢＣ∽△ＣＢＰであることから証明させる。

生徒に考えさせる。

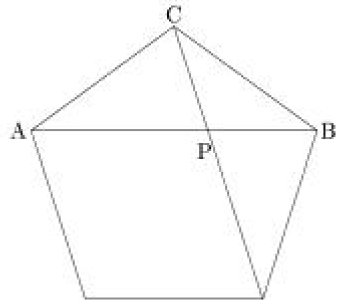
（解）ＡＢ＝x とおく。ＡＣ＝ＢＣ＝ＡＰ＝a

△ＡＢＣ∽△ＣＢＰより，ＡＢ：ＢＣ＝ＣＢ：ＢＰ

$x : a = a : x-a$　したがって，　$x(x-a)=a^2$

$x^2-ax-a^2=0$

$x=\dfrac{a\pm\sqrt{5}a}{2}$　　$x>0$ より，　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$



②　身近にある黄金比を紹介する。

（ア）　「ギリシャのパルテノン神殿」

この建物の縦横の比が黄金比に近いと言われている。

（イ）　「ミロのビーナス」

つま先からへそまでと，つま先から頭の先までの比が黄金比となっている。

（ウ）　「最近のテレビの縦横の長さの比」

（エ）　「名刺の縦横サイズ」

宿題　また黄金比や白銀比（$1:\sqrt{2}$）について調べ学習をさせる。

黄金比について他にどのようなものがあるか調べてくるように言う。

また，白銀比についても調べてくるように言う。次の時間に調べた結果を発表させる。

発展内容　発展的内容としてフィボナッチ数列との関係に触れる。

①　知っている生徒がいないか聞く。出てこなければ，解説する。

「フィボナッチ数列とは，１，１，２，３，５，８，13，21，34，55，89,・・・という数列である。」

この数列の規則は，前の２つの項の和が次の項の値になっている。この数列を始めて本格的に研究した人は，レオナルド･ピサノという数学者である。彼はウサギのつがいについて，「ウサギのつがいは,生まれてから２か月経つと雌雄一対の子どもを産むという。このとき，一つがいのウサギはどのように増えていくか」という問題で，この数列を研究したといわれている。

②　生徒にフィボナッチ数列の隣り合った項の比を計算させる。

このフィボナッチ数列と黄金比とは一見関連がない様に見えるが，２つの間の隠された関係「フィボナッチ数列の隣同士の数の比をとるとその比が次第に黄金比に近づいていく」ということが計算によって導くことができる。

フィボナッチ数列の隣接する２項の比の性質

フィボナッチ数列の隣接する項の比率は

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{3}{2}=1.5,\ \frac{5}{3}=1.666666,\ \frac{8}{5}=1.6,\ \frac{13}{8}=1.625,\ \frac{21}{13}=1.615386$$

$$\frac{34}{21}=1.619047,\ \frac{55}{34}=1.617647,\ \frac{89}{55}=1.618181$$

となり（値は近似値），黄金比　$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887\cdots$　に近づく。

③　フィボナッチ数列が身近に（自然界に）表れている例を紹介する。

（ア）草木の枝分かれの仕組み

（イ）バラの花の模様

（ウ）松かさの模様

（エ）巻き貝

（オ）ひまわりの種の配列

9　三角測量

目的　直接測れないものを三角比を利用して求める。実際に活動を通して理解できるようにする。

単元　図形と計量

問題　三角比を利用して校舎の高さや木の高さを求めよう。

展開例

①　校舎の高さを予想させる。

②　校舎の高さはどうやったら求められるか考えさせる。

③　実際に屋外に出て各グループに分かれて測量を行い、校舎の高さを測る。

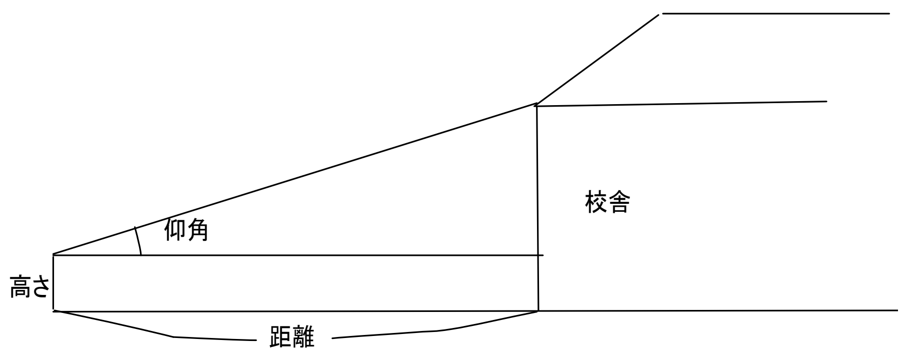
観測点から校舎までの距離、観測点から校舎の屋上を見上げたときの仰角、観測点の高さを測る。

誤差があるので、グループごとに位置を変えて測る。

④　データをとって三角比の表から計算する。

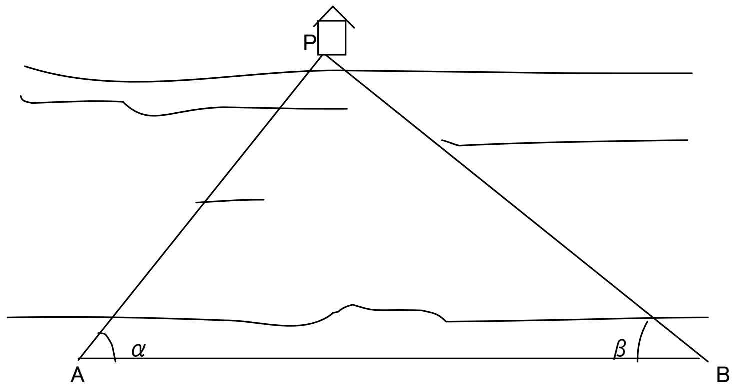
（校舎の高さ）＝（観測点の高さ）＋（距離）×tan（仰角）

⑤　予想と合っていたか、他のグループとの誤差はあるのかなど、確認させる。



問題　三角比を利用してＡ地点から川向こうの建物までの距離を測ってみよう。

展開例



① 屋外に出て近所の川に行き、川向こうの建物までの距離を予想させる。

② 川向こうの建物までの距離はどうやったら求まるか、考えさせる。

③ 実際に各グループに分かれて、川のこちら側の直線距離ＡＢと角α、βを測る。

誤差があるので、グループごとに位置を変えて測る。

④ データをとって三角比の表からＰＡの長さを計算する。

$\alpha = 90^\circ$ のとき

ＰＡ＝ＡＢ$\tan\beta$　（このときＰＡは川幅）

$\alpha = 90^\circ$ でないとき

ＰＡの長さを測るには

$$\frac{PA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(180^o - (\alpha+\beta))}$$ を解く。

⑤ 予想と合っていたか、他のグループとの誤差はあるのかなど、確認させる。

補足　測量の歴史は古く、古代エジプトの時代から行われてきた。日本では 1800 年に伊能忠敬が日本地図作成のため測量したのが始まりとされる。全国に約 1000 点ある一等三角点（設置間隔は約 40*km*）は、位置・高さを求める三角測量に用いる際に経度・緯度・標高の基準になる点のことである。

10　クラスの集合写真撮影

目的　三角比を利用し、40 人の集合写真を撮るとき、最低どれだけ離れる必要があるか考えよう。実際に活動を通して三角比を理解できるようにする。

単元　図形と計量

問題　教室でクラスの集合写真をとることにしました。「もっと端の人寄ってくれないと入らないよ。カメラさんもっと下がって」ということがよく起こります。さて、40 人が３列に並んだとき、カメラがどの位置にあれば全員の集合写真が撮れるでしょうか。

展開例

① 数学の問題としてとらえるためには、何を求める必要があるのか。生徒に問題を理解させ、方策を決定させる。どれだけ離れる必要があるのか、予想させる。

② カメラの画角を測る。（カメラの写すことのできる範囲）

③ 40 人の集合写真を撮るとき、３列に並んだ場合、横幅は 13～14 人分。横幅を実際に並んで測る。

④　40 人全員を真正面から写すときに、最低どれだけ離れる必要があるかを求めさせる。
カメラの画角を２ θ とし、３列に並んだときの横幅 $2x$ とする。
集合生徒とカメラの距離 y は $x=y\tan\theta$　を解いて求める。
教科書の三角比の表を用いて距離を求める。

⑤　予想と比べてどうか、吟味させる。

11　方眼紙に描いた図形の面積と格子点の数の関係（ピックの定理）

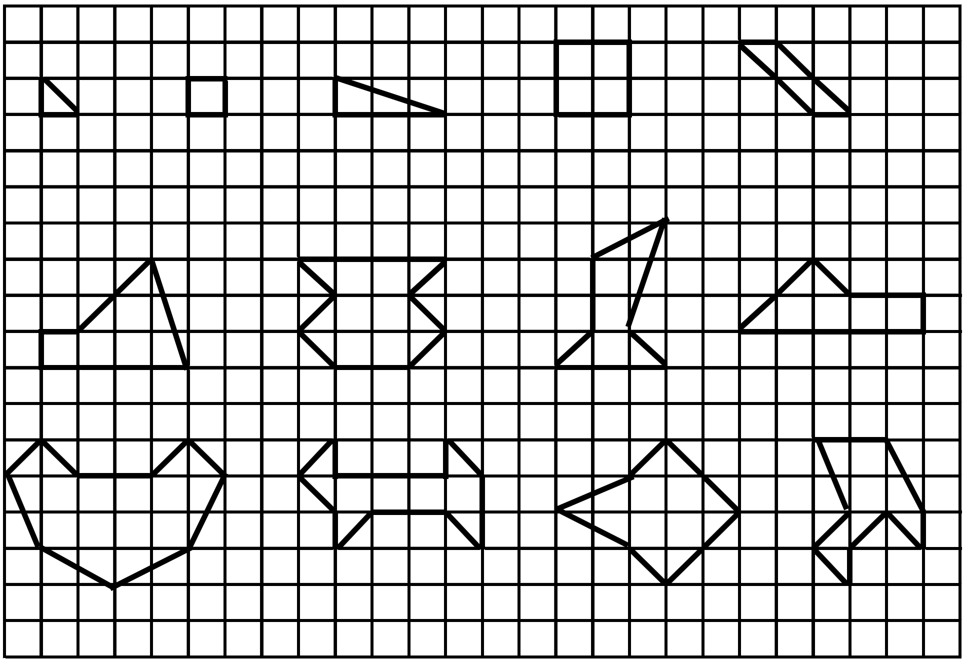
目的　図形の面積を通常の計算以外の方法で求められないか考える。（ピックの定理を見つける。）

単元　図形と計量

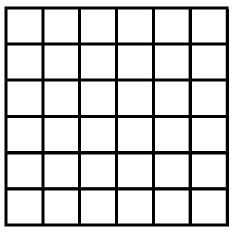
問題　方眼紙に描いた図形の面積と格子点の数に関係がないだろうか。

展開例

①　下図の図形の面積をそれぞれ求めてみよう。



②　自分でも多角形を方眼紙に書いてその図形の面積を求めてみよう。
（ただし多角形の辺は交差しないように書くこと。）



③　通常の面積の求め方以外に何か面積を求める「法則」はないか。

④　グループごとに話し合ってみよう。

⑤　格子点と関係があるのではないか。格子点の数とどんな関係があるのだろうか。

⑥　グループごとに話し合ってみよう。

⑦　図形の「内部の点の数」と「辺上の点の数」を求めてみよう。

⑧　「定理」のようにまとめられないだろうか。
（面積）＝（内部の点の数）＋（辺上の点の数）÷２―１

補足　余裕があれば証明をしてもよい。

12 クラスの身長と靴のサイズの相関を調べよう

目的　表計算ソフトを用いて，平均，分散，標準偏差，四分位偏差等を求めさせ，データの相関を調べさせる。また，データの間の傾向を分析させ，その結果について議論させる。

単元　データの分析

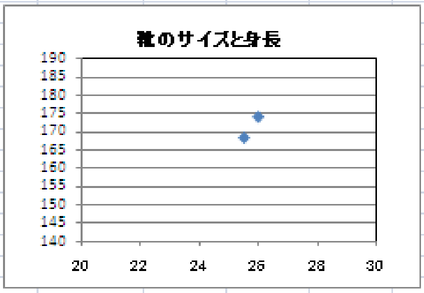
> **問題**　クラスの生徒の身長と靴のサイズを入力し，平均，分散，標準偏差，四分位偏差等を求めなさい。また，相関係数を求め，散布図を作ることにより，クラスの生徒の身長と靴のサイズの相関を調べなさい。

展開例

①　クラスの生徒の身長と靴のサイズをエクセルシートに入力する。
どのような関係がありそうか，生徒に予想させる。

（補足）時間の関係であらかじめデータを用意したシートを提示しても良い。

	① 靴のサイズ	② 身長	①の偏差	②の偏差	①の偏差平方	②の偏差平方	①と②の偏差積
1	25.5	168.5					
2	26	174					
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
平均値	1.7	11.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
					①の分散	②の分散	①と②の共分散



正の相関関係
男女別では？

	靴のサイズ	身長
最大値		
第3四分位数		
中央値		
第1四分位数		
最小値		

相関係数	

	① 靴のサイズ	② 身長
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		

表１

②　**表１**を完成させる。

・B43 に「=SUM(B3:B42)/40」，C43 に「=SUM(C3:C42)/40」

①の偏差 D3 に「＝B3－B43」と入力し，フィルハンドルをドラッグしてセルをコピーする。

②の偏差 E3 に「＝C3－C43」と入力し，フィルハンドルをドラッグしてセルをコピーする。

・F3 に「＝D3＊D3」，G3 に「＝E3＊E3」，

H3 に「＝D3＊E3」と入力し，フィルハンドルをドラッグしてセルをコピーする。

・平均も同様に求める。

（B43 のフィルハンドルをドラッグしてセルをコピーしてもよい。）

F43 は①の分散，G43 は②の分散，H43 は①②の共分散という。

③　身長と靴のサイズの最大値，最小値，中央値，第１四分位数，第３四分位数を求める。

（あえて関数を使わずに実行させる。）

データが 40 個だから，靴のサイズ，身長のデータを右表にいったん貼り付け，降順並び替えで上から並べて求める。丁度のところにデータがない場合は，２つの平均値をとる。

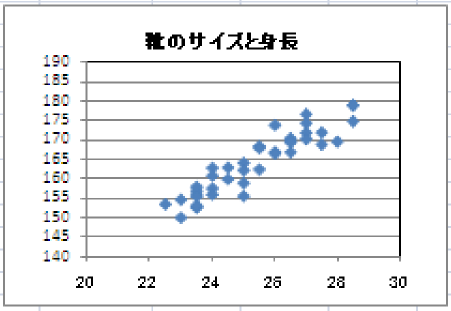
④　身長と靴のサイズをグラフ機能を用いて散布図にし，相関係数を求め，データの間の傾向をとらえさせる。

⑤　どんな傾向があるか。生徒に考えさせ分析させる。

その分析は正しいか、一般化して良いか、発問し，生徒に考えを答えさせる。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		①	②					
2		靴のサイズ	身長	①の偏差	②の偏差	①の偏差平方	②の偏差平方	①と②の偏差積
3	1	25.5	168.5	0.1	4.3	0.02	18.81	0.54
4	2	26	174	0.6	9.8	0.39	96.78	6.15
5	3	26.5	167	1.1	2.8	1.27	8.05	3.19
6	4	27	176.8	1.6	12.6	2.64	159.71	20.54
7	5	28.5	179.1	3.1	14.9	9.77	223.13	46.68
8	6	28.5	179.2	3.1	15.0	9.77	226.13	46.99
9	7	27	172	1.6	7.8	2.64	61.43	12.74
10	8	26.5	170.6	1.1	6.4	1.27	41.44	7.24
11	9	27	170.4	1.6	6.2	2.64	38.91	10.14
12	10	27	174.5	1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	28	25	155.6	−0.4	−8.6	0.14	73.32	3.21
31	29	25	159	−0.4	−5.2	0.14	26.65	1.94
32	30	23.5	153	−1.9	−11.2	3.52	124.60	20.93
33	31	23.5	152.6	−1.9	−11.6	3.52	133.69	21.68
34	32	25.5	168	0.1	3.8	0.02	14.73	0.48
35	33	23.5	157	−1.9	−7.2	3.52	51.30	13.43
36	34	24	157.6	−1.4	−6.6	1.89	43.07	9.02
37	35	23	154.7	−2.4	−9.5	5.64	89.54	22.47
38	36	24	156	−1.4	−8.2	1.89	66.63	11.22
39	37	24.5	163	−0.9	−1.2	0.77	1.35	1.02
40	38	23.5	158	−1.9	−6.2	3.52	37.98	11.55
41	39	23.5	153.1	−1.9	−11.1	3.52	122.38	20.74
42	40	23.5	155.5	−1.9	−8.7	3.52	75.04	16.24
43	平均値	25.4	164.2	0.0	0.0	2.9	64.2	12.7
44						①の分散	②の分散	①と②の共分散

表２



	靴のサイズ	身長
最大値	28.5	179.2
第3四分位数	26.75	170.2
中央値	25.25	163.6
第1四分位数	23.75	156.55
最小値	22.5	150

相関係数	0.927863

O	P	Q	R	S
		①		②
		靴のサイズ		身長
1	**5**	**28.5**	**6**	**179.2**
2	6	28.5	5	179.1
3	19	28.5	4	176.8
4	18	28	19	175
5	11	27.5	10	174.5
6	17	27.5	2	174
7	4	27	17	172.1
8	7	27	7	172
9	9	27	8	170.6
10	**10**	**27**	**9**	**170.4**
11	**3**	**26.5**	**15**	**170**
12	8	26.5	18	169.7
13	15	26.5	16	169.5
14	16	26.5	11	169
15	2	26	1	168.5
16	13	26	32	168
17	22	26	3	167
18	1	25.5	13	167
19	20	25.5	22	166.6
20	**32**	**25.5**	**12**	**164.2**
21	**12**	**25**	**37**	**163**
22	14	25	21	162.9
23	28	25	20	162.5
24	29	25	14	162.3
25	26	24.5	23	160.9
26	37	24.5	26	160
27	21	24	29	159
28	23	24	38	158
29	34	24	34	157.6
30	**36**	**24**	**33**	**157**
31	**24**	**23.5**	**24**	**156.1**
32	30	23.5	36	156
33	31	23.5	28	155.6
34	33	23.5	40	155.5
35	38	23.5	35	154.7
36	39	23.5	25	153.5
37	40	23.5	39	153.1
38	27	23	30	153
39	35	23	31	152.6
40	**25**	**22.5**	**27**	**150**

表３

（分析観点例）

・この年代の傾向であり，全ての年代に通じるか年代別で調べる必要がある。

・１年，２年，３年で傾向が異なるかもしれない。様々なクラスで調べる必要がある。

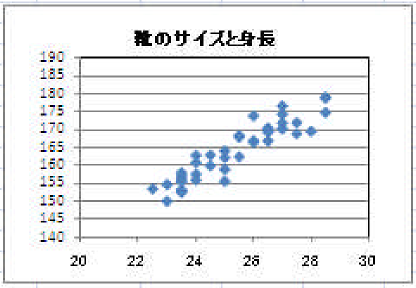
・学校により差があるかもしれない。

・男女により傾向が違うかもしれない。男子と女子の別々の分析を行う必要がある。

・一般化するにはデータ量は適切だろうか。

・日本と外国では違いがあるかもしれない。

	① 靴のサイズ	② 身長	①の偏差	②の偏差	①の偏差平方	②の偏差平方	①と②の偏差積
1	25.5	168.5	0.1	4.3	0.02	18.81	0.54
2	26	174	0.6	9.8	0.39	96.78	6.15
3	26.5	167	1.1	2.8	1.27	8.05	3.19
4	27	176.8	1.6	12.6	2.64	159.71	20.54
5	28.5	179.1	3.1	14.9	9.77	223.13	46.68
6	28.5	179.2	3.1	15.0	9.77	226.13	46.99
7	27	172	1.6	7.8	2.64	61.43	12.74
8	26.5	170.6	1.1	6.4	1.27	41.44	7.24
9	27	170.4	1.6	6.2	2.64	38.91	10.14
10	27	174.5	1.6	10.3	2.64	106.86	16.80
11	27.5	169	2.1	4.8	4.52	23.40	10.28
12	25	164.2	−0.4	0.0	0.14	0.00	−0.01
13	26	167	0.6	2.8	0.39	8.05	1.77
14	25	162.3	−0.4	−1.9	0.14	3.47	0.70
15	26.5	170	1.1	5.8	1.27	34.08	6.57
16	26.5	169.5	1.1	5.3	1.27	28.49	6.00
17	27.5	172.1	2.1	7.9	4.52	63.00	16.87
18	28	169.7	2.6	5.5	6.89	30.66	14.54
19	28.5	175	3.1	10.8	9.77	117.45	33.87
20	25.5	162.5	0.1	−1.7	0.02	2.76	−0.21
21	24	162.9	−1.4	−1.3	1.89	1.59	1.74
22	26	166.6	0.6	2.4	0.39	5.94	1.52
23	24	160.9	−1.4	−3.3	1.89	10.64	4.49
24	23.5	156.1	−1.9	−8.1	3.52	65.00	15.12
25	22.5	153.5	−2.9	−10.7	8.27	113.69	30.65
26	24.5	160	−0.9	−4.2	0.77	17.33	3.64
27	23	150	−2.4	−14.2	5.64	200.58	33.64
28	25	155.6	−0.4	−8.6	0.14	73.32	3.21
29	25	159	−0.4	−5.2	0.14	26.65	1.94
30	23.5	153	−1.9	−11.2	3.52	124.60	20.93
31	23.5	152.6	−1.9	−11.6	3.52	133.69	21.68
32	25.5	168	0.1	3.8	0.02	14.73	0.48
33	23.5	157	−1.9	−7.2	3.52	51.30	13.43
34	24	157.6	−1.4	−6.6	1.89	43.07	9.02
35	23	154.7	−2.4	−9.5	5.64	89.54	22.47
36	24	156	−1.4	−8.2	1.89	66.63	11.22
37	24.5	163	−0.9	−1.2	0.77	1.35	1.02
38	23.5	158	−1.9	−6.2	3.52	37.98	11.55
39	23.5	153.1	−1.9	−11.1	3.52	122.38	20.74
40	23.5	155.5	−1.9	−8.7	3.52	75.04	16.24
平均値	25.4	164.2	0.0	0.0	2.9	64.2	12.7
					①の分散	②の分散	①と②の共分散



	靴のサイズ	身長
最大値	28.5	179.2
第3四分位数	26.75	170.2
中央値	25.25	163.6
第1四分位数	23.75	156.55
最小値	22.5	150

相関係数	0.927863

		① 靴のサイズ		② 身長
1	**5**	**28.5**	**6**	**179.2**
2	6	28.5	5	179.1
3	19	28.5	4	176.8
4	18	28	19	175
5	11	27.5	10	174.5
6	17	27.5	2	174
7	4	27	17	172.1
8	7	27	7	172
9	9	27	8	170.6
10	**10**	**27**	**9**	**170.4**
11	**3**	**26.5**	**15**	**170**
12	8	26.5	18	169.7
13	15	26.5	16	169.5
14	16	26.5	11	169
15	2	26	1	168.5
16	13	26	32	168
17	22	26	3	167
18	1	25.5	13	167
19	20	25.5	22	166.6
20	**32**	**25.5**	**12**	**164.2**
21	**12**	**25**	**37**	**163**
22	14	25	21	162.9
23	28	25	20	162.5
24	29	25	14	162.3
25	26	24.5	23	160.9
26	37	24.5	26	160
27	21	24	29	159
28	23	24	38	158
29	34	24	34	157.6
30	**36**	**24**	**33**	**157**
31	**24**	**23.5**	**24**	**156.1**
32	30	23.5	36	156
33	31	23.5	28	155.6
34	33	23.5	40	155.5
35	38	23.5	35	154.7
36	39	23.5	25	153.5
37	40	23.5	39	153.1
38	27	23	30	153
39	35	23	31	152.6
40	**25**	**22.5**	**27**	**150**

表４

（参考実験データ）

３年生 94 名（男子 41 名，女子 53 名，ランダム）

相関係数：（全体）0.885546　　（男子）0.594472　　（女子）0.686718

男女全体的には正の相関関係が強い。

男女分けると正の相関関係が弱くなる。

13　度数分布表から四分位数を求めよう。

目的　表計算ソフトを用いて，与えられた度数分布表から，階級値，累積，四分位数など様々な値を求めさせる。

単元　データの分析

> **問題**　度数分布表から，四分位数，四分位偏差を求めよう。

展開例

教員の指示にしたがって，生徒に作業をさせてシートを完成させる。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	例題	以下の表は、果樹園から１季節に出荷されたりんごの重さ（g）の分布である。												
2		各問いに答えよ。												
3												累積の1/4		累積の3/4
4		階級(g)			階級値	個数	累積値	累積値－①	累積値－②		①	0	②	0
5		160	－	170		93	93	93	93					
6		170	－	180		165		0	0					
7		180	－	190		252		0	0			第1四分位		第3四分位
8		190	－	200		318		0	0					
9		200	－	210		355		0	0					
10		210	－	220		293		0	0			累積の2/4		
11		220	－	230		176		0	0			0		
12		230	－	240		132		0	0					
13		240	－	250		84		0	0			第2四分位(中央値)		
14														
15														
16												四分位偏差		
17												0		
18														
19														

表５

① 各階級の階級値を求めよ。

　E5 に「＝(B5＋D5)/2」と入力し，E6 から E13 までコピーする。

② 各階級の累積値を求めよ。

　G6 に「=G5＋F6」と入力し，G7 から G13 までコピーする。

③ 累積の４分の１になる値を求めよ。

　L4 に「＝G13/4」と入力。

④ 「累積値－①」の表を完成させることにより，第１四分位のある階級の下端を求めよ。

　H5 に「＝G5－L4」と入力し，H6 から H13 までコピーする。

　H7＝43＞0 より，下端は 180(g)

⑤ 第１四分位数を求めよ。

　L8 に「＝180＋10＊(L4－G6)/F7」と入力

⑥ 累積の４分の３になる値を求めよ。

　N4 に「＝G13＊3/4」と入力

⑦ 「累積値－②」の表を完成させることにより，第３四分位のある階級の下端を求めよ。

　I5 に「＝G5－N4」と入力し，フィルハンドルをドラッグしてセルをコピーする。　I10＝75＞0 より，下端は 210(g)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	問題1	以下の表は、果樹園から1季節に出荷されたりんごの重さ(g)の分布である。												
2		各問いに答えよ。												
3												累積の1/4		累積の3/4
4		階級(g)			階級値	個数	累積値	累積値－①	累積値－②		①	467	②	1401
5		160	－	170	165	93	93	-374	-1308					
6		170	－	180	175	165	258	-209	-1143					
7		180	－	190	185	252	510	43	-891			第1四分位		第3四分位
8		190	－	200	195	318	828	361	-573			188.2937		217.4403
9		200	－	210	205	355	1183	716	-218					
10		210	－	220	215	293	1476	1009	75			累積の2/4		
11		220	－	230	225	176	1652	1185	251			934		
12		230	－	240	235	132	1784	1317	383					
13		240	－	250	245	84	1868	1401	467			第2四分位(中央値)		
14												202.9859		
15														
16												四分位偏差		四分位範囲
17												14.57331		29.14662
18														

表６

⑧　第３四分位数を求めよ。

N8 に「＝210＋10＊(N4－G9)/F10」と入力

⑨　中央値（第２四分位数）を求めよ。

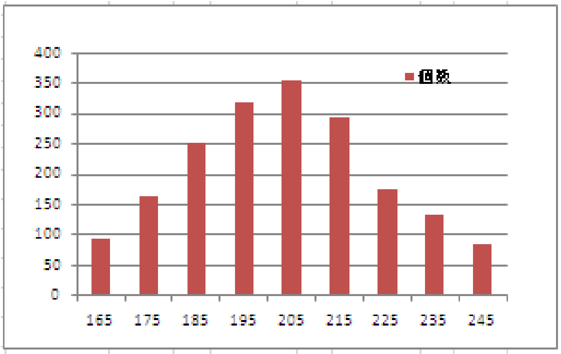
L11 に「＝G13／2」と入力し，その値が 934 から，中央値が存在する階級は，「200－210」である。L14 に「＝200＋10＊(934－G8)/F9」と入力

⑩　四分位範囲，四分位偏差を求めよ。

N17 に「＝N8－L8」，L17 に「＝N17/2」と入力

⑪　グラフ機能,「棒グラフ」で代表値と個数の関係のグラフを作らせる。

分布の様子や四分位数の存在する階級を視覚的にとらえさせる。



発展課題　以下の度数分布表から，四分位数，四分位偏差を求めよ。

階級の幅が 500 万以上から異なることに注意させる。

発展課題　次の表はある地域の世帯の年間収入の分布である。例題と同様の設問に答えよ。

収入階級万円			階級値	世帯数	累積
0	－	100		48	48
100	－	200		60	
200	－	300		97	
300	－	400		123	
400	－	500		101	
500	－	700		85	
700	－	1000		54	
1000	－	1500		29	
1500	－	2000		18	
2000	－	3000		6	
3000	－			2	

14　相加平均，相乗平均，調和平均について

目的　平均には，相加平均だけでなくいろいろあることを認識させる。とくに，身近な話題に対して，相加平均では図れないものを挙げることで，平均は相加平均だけでないを認識させる。そこから，相乗平均，調和平均にも触れて，その意味を考えさせる。

単元　データの分析

問題　１年で害虫が２倍になり，次の１年で８倍になったとき，１年当たり平均何倍になったか

展開例

①　生徒に考えさせ，答えを求めさせる。

相加平均を求める生徒，分からない生徒，相乗平均の式を意識せずに結果を出す者が予想される。

②　平均って何か？（発問）

テストの平均点，など

③　解説する。

$$\frac{2+8}{2}=5 \text{ 倍}\quad ？$$

最初の害虫 k 匹 → $2k$ 匹 → $16k$ 匹

２倍　８倍

最初の害虫 k 匹 → $5k$ 匹 → $25k$ 匹

５倍　５倍

平均にはいろいろあり，この場合は，　$\sqrt{2\times 8}=4$ 倍

これを相乗平均という。

問題　78 年の経済成長率 20%　79 年の経済成長率 80%の場合，この 2 年間の平均成長率は何%か。

展開例

①　生徒に考えさせる。

（解答）　$\sqrt{1.2\times 1.8}=1.469693846...$ より，約 47%

問題　自宅から車で店へ出かけた。行きは平均時速 60km 帰りは平均時速 90km で走った。往復の平均速度は時速何キロだろうか？

展開例

①　生徒に考えさせる。

（解答）　$\dfrac{2}{\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{90}}=72$　km である。　これを調和平均という。

②　一般式のまとめ

$a>0, b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$　　等号成立は，$a=b$ のとき

宿題　調和平均になる例を調べなさい。

例　ピタゴラス音階

ピタゴラスは弦の長さの比が簡単な整数比のときに，発する音がよく調和することに注目しました。ド，ファ，ソ，$\overline{\text{ド}}$ の音はその条件に合致する。ドと $\overline{\text{ド}}$ は 2:1，ドとソは 3:2，ドとファは 4:3 であって，簡単な整数比である。発する音の振動数は弦の長さに反比例し，弦が短いほど振動数は大きくなり高い音となる。

	弦の長さの比	振動数比
ド	2	1
ファ	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
ソ	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\overline{\text{ド}}$	1	2

3/2 は 1 と 2 の相加平均, 4/3 は調和平均になっている。

15　同じ誕生日

目的　同じ誕生日の人はあまりいないように感じるが、計算によるとかなりの確率でクラスの中にも同じ誕生日の人がいることに気付かせる。

単元　場合の数，確率

> **問題**　40 人のクラスで同じ誕生日の人がいる確率はどれくらいだろうか。

展開例

①　生徒に予想させる。

②　確率を求める計算式を作らせる。

40 人の誕生日はそれぞれ 365 日のいずれかの日なので，365^{40}

40 人の誕生日が全部異なる場合の数は，${}_{365}\mathrm{P}_{40}$

したがって，確率を求める式は，

$$1-\frac{{}_{365}\mathrm{P}_{40}}{365^{40}}=1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{39}{365}\right)$$

③　解答を提示する。

上の式を計算すると，0.891 になる。

すなわち，約 89.1 ％ の確率で同じ誕生日の人がいることになる。

④　予想と実際が合っていたか，違っていたかの感想を生徒に発言させる。

⑤　応用１（n 人ならどうなるか。）

n 人の誕生日はそれぞれ 365 日のいずれかの日なので，365^{n}

n 人の誕生日が全部異なる場合の数は，${}_{365}\mathrm{P}_{n}$

したがって，確率を求める式は，

$$1-\frac{{}_{365}\mathrm{P}_{n}}{365^{n}}=1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$$

この式を基に計算して表にすると以下のようになる。

人数	5	10	20	23	30	40	50	60	68
確率	0.027	0.117	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.995	0.999

上の表から 23 人で，約 50 ％ の確率で，68 人でほぼ同じ誕生日の人がいることが分かる。

⑥　応用２（ $e^{-x} \fallingdotseq 1-x$ の利用）

x が十分に小さいとき，$e^{-x} \fallingdotseq 1-x$ （数学Ⅲ　微分法）であることを利用すると，

$$1-\frac{n}{365} \fallingdotseq e^{-\frac{n}{365}}$$

となるので，

$$1-\frac{{}_{365}\mathrm{P}_{n}}{365^{n}}=1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{365}}\cdot e^{-\frac{2}{365}}\cdots e^{-\frac{n-1}{365}}=e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$$

$e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$ を調べることで近似値を求めることもできる。

16　２人が３年間，同じクラスである確率は？

目的　特定の２人が３年間同じクラスなのはよくある感じを受けるが、実はかなり低い確率であることに気付かせる。

単元　場合の数，確率

問題　仲のよい２人が，１学年の人数が 200 人で，40 人ずつ５クラス編成の学校に入学した。
３年間同じクラスである確率はどれくらいだろうか。

展開例

①　生徒に予想させる。

②　確率を実際に計算させる。

クラスを１組，２組，３組，４組，５組とし，仲のいい２人をＡ，Ｂとする。

このとき，Ａが１組に入る確率は，１クラス 40 人なので，$\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$

さらに，Ｂが１組に入る確率は，$\frac{39}{199}$

Ａ，Ｂが２組から５組に入る確率も同様にして求めることができるから，$\frac{1}{5}\times\frac{39}{199}\times 5=\frac{39}{199}$

したがって，仲のよい２人が３年間同じクラスである確率は，$\left(\frac{39}{199}\right)^3=\frac{59319}{7880599}\fallingdotseq 0.0075$

③　予想と実際が合っていたか，違っていたかの感想を生徒に発言させる。

応用１（クラス数が変わるとどうなるか。）

問１　仲のよい２人が，１学年の人数が $40n$ 人で，40 人ずつ n クラス編成の学校に入学した。
３年間同じクラスである確率はどれくらいだろうか。

クラスを１，２，３，４，５･･･n とし，仲のいい２人をＡ，Ｂとする。

このとき，Ａが１組に入る確率は，１クラス４０人なので，$\frac{40}{40n}=\frac{1}{n}$

さらに，Ｂが１組に入る確率は，$\frac{39}{40n-1}$

Ａ，Ｂが２組から n 組に入る確率も同様にして求めることができるから，

$$\frac{1}{n}\times\frac{39}{40n-1}\times n=\frac{39}{40n-1}$$

したがって，仲のよい２人が３年間同じクラスである確率は，$\left(\frac{39}{40n-1}\right)^3$

応用２（１クラスあたりの人数も変わるとどうなるか。）
問２　仲のよい２人が，１学年の人数がan人で，a人ずつnクラス編成の学校に入学した。
３年間同じクラスである確率はどれくらいだろうか

クラスを１，２，３，４，５・・・nとし，仲のいい２人をＡ，Ｂとする。

このとき，Ａが１組に入る確率は，１クラスa人なので，$\dfrac{a}{an}=\dfrac{1}{n}$

さらに，Ｂが１組に入る確率は，$\dfrac{a-1}{an-1}$

Ａ，Ｂが２組からn組に入る確率も同様にして求めることができるから，

$$\frac{1}{n}\times\frac{a-1}{an-1}\times n=\frac{a-1}{an-1}$$

したがって，仲のよい２人が３年間同じクラスである確率は，$\left(\dfrac{a-1}{an-1}\right)^3$

④　補足

（ア）　問１，問２より人数，クラス数により，３年間ある特定の２人が同じクラスになる確率は，以下の表のようになる。

表１　特定の２人が同じクラスになる確率
（縦軸：クラス数，横軸：１クラスあたりの人数）

	20	25	30	35	40	45	50
4	0.241	0.242	0.244	0.245	0.245	0.246	0.246
5	0.192	0.194	0.195	0.195	0.196	0.196	0.197
6	0.160	0.161	0.162	0.163	0.163	0.164	0.164
7	0.137	0.138	0.139	0.139	0.140	0.140	0.140
8	0.119	0.121	0.121	0.122	0.122	0.123	0.123

表２　３年間特定の２人が同じクラスになる確率
（縦軸：クラス数，横軸：１クラスあたりの人数）

	20	25	30	35	40	45	50
4	0.0139	0.0142	0.0145	0.0146	0.0148	0.0149	0.0149
5	0.0071	0.0073	0.0074	0.0075	0.0075	0.0076	0.0076
6	0.0041	0.0042	0.0043	0.0043	0.0043	0.0044	0.0044
7	0.0026	0.0026	0.0027	0.0027	0.0027	0.0028	0.0028
8	0.0017	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0019

（イ）　今回は１クラスあたりの人数を固定しているので，クラスによって人数が違った場合を生徒に考えさせてもよい。

$\boxed{17}$ 残り物には福があるは本当か？

目的　「残り物には福がある」と言われるが、計算によるとどの順番でくじを引いても同じ確率になることに気付かせる。

単元　場合の数，確率

> **問題**　５本のくじがあり，１本だけ当たりである。５人で順番にくじを引くとき，どの順番でくじを引くのが最も得だろうか。ただし，引いたくじは戻さないものとする。

展開例

① 生徒に予想させる。

② 実際に確率を計算させ，どの人の確率も $\frac{1}{5}$ となることを確認させる。

【解法１】

１番目にくじを引く人

当たりを引けばよいので，$\frac{1}{5}$

２番目にくじを引く人

１番目の人がはずし，当たりを引けばよいので，$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

３番目にくじを引く人

１番目・２番目の人がはずし，当たりを引けばよいので，$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

４番目にくじを引く人

１番目から３番目の人がはずし，当たりを引けばよいので，$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

５番目にくじを引く人

１番目から４番目の人がはずせばよいので，$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

以上より，どの順番でくじを引いても当たる確率は $\frac{1}{5}$ で等しくなる。

【解法２】

くじに区別があって，１番が当たりくじで，２番から５番がはずれくじとする。

k 番目に引く人が当たりくじを引くとする。

(1) $k=1$ のとき，

当たりを引けばよいので，$\frac{1}{5}$

(2) $k \geqq 2$ のとき，

$(k-1)$ 番目までの人が２番から５番のはずれくじを引いているので，引き方は ${}_4\mathrm{P}_{k-1}$ 通り。

k 人の引き方は ${}_5P_k$ 通り。したがって，求める確率は，

$$\frac{{}_4\mathrm{P}_{k-1}}{{}_5\mathrm{P}_k}=\frac{4\cdot3\cdots(4-k+2)}{5\cdot4\cdots(5-k+1)}=\frac{1}{5}$$

以上より，どの順番でくじを引いても当たる確率は $\frac{1}{5}$ で等しくなる。

応用１（くじの数が増えたらどうなるか。）
問１　n 本のくじがあり，１本だけ当たりである。n 人で順番にくじを引くとき，どの順番でくじを引くのが最も得だろうか。ただし，引いたくじは戻さないものとする。

くじに区別があって，１番が当たりくじで，２番から n 番がはずれくじとする。
k 番目に引く人が当たりくじを引くとする。

(1)　$k=1$ のとき，

当たりを引けばよいので，$\dfrac{1}{n}$

(2)　$k \geqq 2$ のとき，
$(k-1)$ 番目までの人が２番から n 番のはずれくじを引いているので，引き方は ${}_{n-1}\mathrm{P}_{k-1}$ 通り。
k 人の引き方は ${}_{n}\mathrm{P}_{k}$ 通り。したがって，求める確率は，

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{P}_{k-1}}{{}_{n}\mathrm{P}_{k}}=\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n}$$

以上より，どの順番でくじを引いても当たる確率は $\dfrac{1}{n}$ で等しくなる。

応用２（くじの本数や当たりの数を変えたらどうなるか。）
問２　n 本のくじがあり，m 本だけ当たりである。n 人で順番にくじを引くとき，どの順番でくじを引くのが最も得だろうか。ただし，引いたくじは戻さないものとする。

くじに区別があって，１番から m 番が当たりくじで，$m+1$ 番から n 番がはずれくじとする。
k 番目に引く人が当たりくじを引くとする。

(1)　$k=1$ のとき，

当たりを引けばよいので，$\dfrac{m}{n}$

(2)　$k \geqq 2$ のとき，
k 番目に引く人が１番の当たりくじを引くとする。
$(k-1)$ 番目までの人が１番以外のくじを引いているので，引き方は ${}_{n-1}\mathrm{P}_{k-1}$ 通り。
k 人のとき全体の引き方は ${}_{n}\mathrm{P}_{k}$ 通り。したがって，求める確率は，

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{P}_{k-1}}{{}_{n}\mathrm{P}_{k}}=\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n}$$

k 番目に引く人が何番の当たりくじを引いても同じ確率になるので，$\dfrac{m}{n}$

以上より，どの順番でくじを引いても当たる確率は $\dfrac{m}{n}$ で等しくなる。

$\boxed{18}$ そのまま？交換？（３ドア問題・モンティーホールのジレンマ）

目的　最初から選んだ自分の意見を押し通すよりも、実は交換した方が得であることを計算で分からせる。

単元　場合の数，確率

問題　３つの箱があり，そのうち１つの箱が当たりである。この３つの箱から１つを選んで当たりを引きたい。今，あなたは，箱を１つ選び，開けようとすると，主催者が，「１つヒントをあげましょう。あなたが選ばなかった２つの箱のうち，はずれの箱を１つ開きましょう」と言って箱を開けてくれた。さらに，主催者は，「あなたにチャンスをあげましょう。開ける箱を変えてもいいですよ」このとき，あなたは最初に選んだ箱を選ぶのと交換して箱を選ぶのとどちらが得でしょうか。

展開例

①　生徒に予想させる。

②　計算を説明する。

(1)　最初に当たりの箱を選んでいた場合，当たっている箱を選ぶ確率は，$\frac{1}{3}$

このとき，交換しなければ，必ず当たり，交換すれば必ずはずれるので，

交換しなかった場合は，$\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$，交換した場合は，$\frac{1}{3}\times 0=0$

(2)　最初にはずれの箱を選んでいた場合，はずれている箱を選ぶ確率は，$\frac{2}{3}$

このとき，交換しなければ，必ずはずれ，交換すれば必ず当たるので，

交換しなかった場合は，$\frac{2}{3}\times 0=0$，交換した場合は，$\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

以上より，交換しなかった場合は当たる確率は，$\frac{1}{3}$，交換した場合は当たる確率は，$\frac{2}{3}$

③　予想と実際が合っていたか，違っていたかの感想を生徒に発言させる。

応用（箱を増やすとどうなるか。）

問　10 個の箱があり，そのうち１つの箱が当たりである。この 10 個の箱から１つを選んで当たりを引きたい。今，あなたは，箱を１つ選び，開けようとすると，主催者が，「１つヒントをあげましょう。あなたが選ばなかった９つの箱のうち，はずれの箱を８つ開きましょう」と言って箱を開けてくれた。さらに，主催者は，「あなたにチャンスをあげましょう。開ける箱を変えてもいいですよ」このとき，あなたは最初に選んだ箱を選ぶのと交換して箱を選ぶのとどちらが得でしょうか。

(1)　最初に当たりの箱を選んでいた場合，当たっている箱を選ぶ確率は，$\frac{1}{10}$

このとき，交換しなければ，必ず当たり，交換すれば必ずはずれるので，

交換しなかった場合は，$\frac{1}{10}\times 1=\frac{1}{10}$

交換した場合は，$\frac{1}{10}\times 0=0$

(2) 最初にはずれの箱を選んでいた場合，はずれている箱を選ぶ確率は，$\frac{9}{10}$

このとき，交換しなければ，必ずはずれ，交換すれば必ず当たるので，

交換しなかった場合は，$\frac{9}{10}\times 0=0$

交換した場合は，$\frac{9}{10}\times 1=\frac{9}{10}$

以上より，交換しなかった場合当たる確率は，$\frac{1}{10}$ ，交換した場合当たる確率は，$\frac{9}{10}$

④　補足

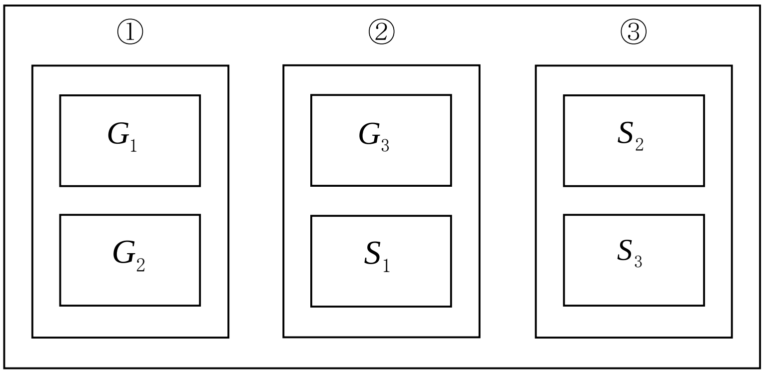
（ア）　予想させた後，どのような確率になりそうか実験をしてから，計算の説明をしてもよい。

（イ）　応用の結果から，箱の数が増えれば増えるほど，交換したほうがよい結果になることが分かる。生徒も箱の数が増えてくると感覚的に「交換したほうが得なのでは」という感想をもつと思われる。

（ウ）　生徒には思い込みと実際の確率の違うこともあることに気付かせたい。同様なテーマで次のような題材も面白い。

> 問　（３棹のたんす）３つのたんすにはどれも２つの引き出しがあって，第１のたんすの引き出しには金貨が１枚ずつ，第２のたんすの引き出しには金貨と銀貨が１枚ずつ，第３のたんすの引き出しには銀貨が１枚ずつ入っている。いま，無作為に１つのたんすを選び，１つの引き出しをあけたら，金貨が入っていた。このたんすのもう１つの引き出しに金貨が入っている確率は。

下図のようにそれぞれ金貨をG_1，G_2，G_3，銀貨をS_1，S_2，S_3とする。今，金貨を引いたので，G_1，G_2を引いたとすると，もうひとつの引き出しも金貨である。G_3を引いたとすると，もうひとつの引き出しは銀貨である。したがって，求める確率は $\frac{2}{3}$ となる。



19 トランプのポーカーの役のできる確率は？

目的 ポーカーの役の強さが感覚ではなく、場合の数の計算により決められることに気付かせる。

単元 場合の数，確率

> **問題** トランプゲームのポーカーの役のできる確率をそれぞれどのくらいだろうか？
> ただし，ジョーカーはないものとする。

展開例

① トランプのポーカーの役について， 知らない生徒もいるので，全体に説明する。

表１：ポーカーの役

役の名前	役の説明	例
ノーペア	下記のいずれの役にも当てはまらない	♣5 ♠A ♡2 ◇3 ◇7
ワンペア	同一数字のカード２枚のペア１組 （残り３枚は何でもよい）	♣5 ♠5 ♡2 ◇3 ◇6
ツーペア	同一数字のカード２枚からなるペアが２組 （残り１枚は何でもよい）	♣2 ♠2 ♡3 ◇3 ◇6
スリーカード	同一数字のカード３枚 （残り２枚は何でもよい）。	♣4 ♠4 ♡4 ◇J ◇Q
ストレート	５枚のカードの数字が連続していること （マークは何でもよい） 注 ＱＫＡ２３のようにＫＡ２を含むものは ストレートとはみなされない。	♣2 ♠3 ♡4 ◇5 ◇6
フラッシュ	５枚全てが同じマーク （数字は何でもよい）	♡2 ♡4 ♡5 ♡7 ♡K
フルハウス	ワンペアとスリーカードの組み合わせ。	♣5 ♠5 ♡5 ◇10 ◇10
フォーカード	同一数字のカード４枚 （残り１枚は何でもよい）	♣7 ♠7 ♡7 ◇7 ◇A
ストレート フラッシュ	５枚のカードが連番で， なおかつ全て同じマーク。	♡2 ♡3 ♡4 ♡5 ♡6
ロイヤルストレート フラッシュ	10・Ｊ・Ｑ・Ｋ・Ａの組み合わせで， なおかつ全て同じマーク。	♡10 ♡J ♡Q ♡K ♡A

② どの順番で役が出やすそうか生徒に相談させる。

③ ポーカーの役ができる場合の数を計算させる。

(1) すべての選び方

52 枚から５枚を選べばよいので、 ${}_{52}C_5 = 2598960$

(2) ロイヤルストレートフラッシュ

10・Ｊ・Ｑ・Ｋ・Ａの組合せで，なおかつ全て同じマークなので４通り

(3) ストレートフラッシュ

Ａ・２・３・４・５～９・10・Ｊ・Ｑ・Ｋの組合せで，なおかつ全て同じマークなので

$9 \times 4 = 36$

(4) フォアカード

同一数字４枚の選び方はＡ～Ｋの 13 通り, 同一数字４枚に対して残りの１枚の選び方は 48 通りなので　$13\times 48=624$

(5) フルハウス

同一数字３枚の選び方は数字がＡ～Ｋの 13 通り, マークが♣♠♡♢のうちから３つ選べばよいので，$13\times {}_4C_3=52$

残りの同一数字２枚の選び方は，上で選んだ数字以外の数字を選び 12 通り，マークが♣♠♡♢のうちから２つ選べばよいので，$12\times {}_4C_2=72$

以上より，$52\times 72=3744$

(6) フラッシュ

マークの選び方は４通り，数字はＡ～Ｋのうち５枚を選べばいいので，$4\times {}_{13}C_5=5148$

上で求めた場合の数から(2)，(3)の場合を除くので，$5148-(4+36)=5108$

(7) ストレート

数字の選び方はＡ・２・３・４・５～10・Ｊ・Ｑ・Ｋ・Ａの 10 通り，マークはそれぞれのカードが♣♠♡♢のうちどれでもよいので，$10\times 4^5=10240$

上で求めた場合の数から(2)，(3)の場合を除くので，$10240-(4+36)=10200$

(8) スリーカード

同一数字３枚の選び方は数字がＡ～Ｋの 13 通り, マークが♣♠♡♢のうちから３つ選べばよいので，$13\times {}_4C_3=52$

あと２枚は，上で選んだ数字以外の 12 個の数字から２つ選び，マークはそれぞれのカードが♣♠♡♢のうちどれでもよいので，${}_{12}C_2\times 4^2=1056$

したがって，$52\times 1056=54912$

(9) ツーペア

ペアになる数字は 13 個の数字から２つ選ぶので，${}_{13}C_2=78$

上の数字のマークは♣♠♡♢のうち２つ選べばよく，それが２組あるので，${}_4C_2\cdot {}_4C_2=36$

残った１枚は，上で使われていない数字 11 個から選び，マークは何でもよいので，11×4

したがって，${}_{13}C_2\cdot {}_4C_2\cdot {}_4C_2\cdot 11\cdot 4=123552$

(10) ワンペア

ペアになる数字は 13 個の数字から１つ選ぶので，13

上の数字のマークは♣♠♡♢のうち２つ選べばよく，それが２組あるので，${}_4C_2=6$

残った３枚は，上でペアになっていない数字 12 個から３個選び，マークは何でもよいので，${}_{12}C_3\times 4^3=14080$

したがって，$13\times 6\times 14080=1098240$

(11) ノーペア

全体から(2)～(10)の場合を引けばよいので,

$$2598960-4-36-624-3744-5108-10200-54912-123552-1098240=1302540$$

④　実際に役が出る確率を生徒に提示する。

表２：ポーカーの役が出る確率（確率はおよその数）

役の名前	場合の数	確率の分数表示	確率の小数表示
ノーペア	1302540	$\frac{1}{1.995}$	0.501177394
ワンペア	1098240	$\frac{1}{2.366}$	0.422569028
ツーペア	123552	$\frac{1}{21.04}$	0.047539016
スリーカード	54912	$\frac{1}{47.33}$	0.021128451
ストレート	10200	$\frac{1}{254.8}$	0.003924647
フラッシュ	5108	$\frac{1}{508.8}$	0.001965402
フルハウス	3744	$\frac{1}{694.2}$	0.001440576
フォーカード	624	$\frac{1}{4165}$	0.000240096
ストレートフラッシュ	36	$\frac{1}{72193.3}$	0.0000138517
ロイヤルストレートフラッシュ	4	$\frac{1}{649740}$	0.00000153908

20　倍数の判定方法

目的　倍数の判定方法を考えよう。

単元　整数

問題　1234567890 は何の倍数だろうか。
(1)　２の倍数？，５の倍数？，10 の倍数？
(2)　３の倍数？，９の倍数？
(3)　４の倍数？，８の倍数？
(4)　６の倍数？，11 の倍数？，７の倍数？，13 の倍数？

展開例

①　生徒に答えさせる。（予想させる）

②　判定法を知っている生徒がいたら，答えさせる。

③　判定法の証明をしながら解説する。

(1)の解説（１の位を調べるもの）

【２の倍数】‥１の位が２の倍数（偶数）であること。よって，２の倍数

【５の倍数】‥１の位の数が０か５であること。よって，５の倍数

【10 の倍数】‥１の位の数が０であること。よって，10 の倍数

(2)の解説（各位の和を考えるもの）

【３の倍数】 ‥各位の数の和が３の倍数であること。

$100a+10b+c=(99+1)a+(9+1)b+c=3(33a+3b)+\underline{(a+b+c)}$

1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45=3×15　　よって，３の倍数

【９の倍数】 ‥各位の数の和が９の倍数であること。

$100a+10b+c=(99+1)a+(9+1)b+c=9(11a+b)+\underline{(a+b+c)}$

1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45=9×5　　よって，９の倍数

(3)の解説（下 n 桁の数を考えるもの）

【４の倍数】 ‥下２桁の数が４の倍数であること。

$100a+10b+c=4\times25a+\underline{(10b+c)}$

下２桁　90=4×22+2　よって，４の倍数ではない。

【８の倍数】‥下３桁の数が８の倍数であること。

$10000a+1000b+100c+10d+e=8\times125(10a+b)+\underline{(100c+10d+e)}$

下３桁　890=8×111+2　よって，８の倍数ではない。

(4)の解説

【６の倍数】 ‥２の倍数かつ３の倍数であること。　よって，６の倍数

【11 の倍数】 ‥「(奇数番目の数の和)－(偶数番目の数の和)」が 11 の倍数であること。

$10000a+1000b+100c+10d+e=(10000a+100c+e)+(1000b+10d)$

$=11(909a+9c)+11(91b+d)+(a+c+e)-(b+d)$

（例）x=123, 456, 7890→1−2+3−4+5−6+7−8+9−0=5 なので x は 11 の倍数でない。

【７の倍数】 ‥末位から３桁ごとに区切り，右端の区画を最初の区画とするとき，

「(奇数の区画の総和)－(偶数の区画の総和)」が７の倍数であること。

$100000a+10000b+1000c+100d+10e+f=1000(100a+10b+c)+(100f+10g+h)$

$=143\times7(100a+10b+c)-(100a+10b+c)+(100f+10g+h)$

（例）x=1, 234, 567, 890→1｜234｜567｜890 と区切ると，

奇数の区画の総和=234+890=1124,

偶数の区画の総和=1+567=568

1124−568=556=7×79+3 は７の倍数でないので x は７の倍数でない。

【13 の倍数】‥ 末位から３桁ごとに区切り，左端の区画を最初の区画とするとき，

「(奇数の区画の総和)－(偶数の区画の総和)」が 13 の倍数であること。

$100000a+10000b+1000c+100d+10e+f=1000(100a+10b+c)+(100f+10g+h)$

$=77\times13(100a+10b+c)-(100a+10b+c)+(100f+10g+h)$

（例）x=1, 234, 567, 890→1｜234｜567｜890 と区切ると，

奇数の区画の総和=234+890=1124,

偶数の区画の総和=1+567=568

1124−568=556=13×43+9 は 13 の倍数でないので x は 13 の倍数でない。

問題　１の位が分からない数字　x=123456789□　について

(1)　x が 11 の倍数になるように，１の位を決定せよ。(x＝1234567895)

(2)　x が ７の倍数になるように，１の位を決定せよ。(x＝1234567894)

(3)　x が 13 の倍数になるように，１の位を決定せよ。(x＝1234567893)

21　余りの計算

目的　余りの計算（剰余類）を考えよう。

単元　整数

問題　3^{123}　の１の位の数は何か。

展開例

①　生徒に答えさせる。（予想させる）

②　「１の位だけを調べるので，10 の位以上は調べる必要なし」とヒントを与える。

③　解説：１の位は３，９，７，１の繰り返しだから，答えは７

問題　123^{100}　を 11 で割った余りは何か。

展開例

①　生徒に答えさせる。（予想させる）

②　上の問題とどこが変わったのか考えさせる。

上の問題は 10 で割った余り，下の問題は 11 で割った余り。

③　「123＝11×11+2」　とヒントを与える。つまり「2^{100} を考えればよい」

④　解説：2^n を 11 で割った余りは，2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1 の繰り返しだから，答えは１

⑤　補足　合同式を教えても良い。

フェルマーの小定理「$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$」

x＝123，p=11 の場合だから，

$123^{10} \equiv 1$ より，$123^{100} = (123^{10})^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1$

22　新幹線の座席

目的　２元１次方程式を利用して，新幹線の座席の良さを考える。

単元　２元１次方程式

問題　新幹線の座席が，２列と３列になっていると都合がいい理由は？

展開例

①　「2，3，4，5，6 人グループの乗客はどのように座席を決めればよいか。」と質問し，生徒に答えさせる。

②　「n 人のグループのとき，どのようにすればよいか。」と質問する。

③　解説：$2x+3y=n$　を解くのだから，n を５の剰余類で分類し

$2x+3y=5m+k$（k=0, 1, 2, 3, 4）を解くと

$x=m+$(①の解答)，$y=m+$(①の解答)　とすればよい。

よって，２以上のすべて整数 n に対して，$2x+3y=n$ を満たす 0 以上の整数の組(x, y)は必ず存在する。したがって，２人以上のグループなら，座席を組み合わせることにより，隣がすべてグループ内の人になる。

$\boxed{23}$ 天秤の分銅

目的　天秤の分銅で，少ない個数で多くの重さを測るにはどうしたらよいか。

単元　n 進法

> **問題**　上皿天秤で重さを測るのに，どのような分銅を準備すれば一番効率よく重さを測れるか。
> また，７個の分銅を使うと，最大何グラムまで測ることができるか。

展開例

① 「1，2，3グラムのものを測るには，分銅は1 g と2 g の２種類でよい。」とヒントをだす。

１グラム＝$\boxed{1}$ + $\boxed{2}$ ，２グラム＝$\boxed{1}$ + $\boxed{2}$ ，３グラム＝$\boxed{1}$ + $\boxed{2}$

（網掛けの分銅を使う）

② 「4，5グラムのものを測るには，何 g の分銅を加えればよいか。」と質問する。

「4 g の分銅を加える」という解答をひきだす。

③ 「1 g，2 g，4 g の３つの分銅を利用すると，何グラムまで測れるか。」と質問する。

①の解説のように考えると，１グラムから７グラムまでのすべての重さが測れることを確認する。

④ 「７個の分銅がどのような重さの時に，最も効率良くできるか。」と質問する。

⑤ 解説：２進数を利用することによって，１，２，４，８，16，32，64 の７個の分銅を用意すると，最も効率良く測ることができる。最大は 127 グラム

例えば　（網掛けの分銅を使う）

１４グラム＝$\boxed{1}$ + $\boxed{2}$ + $\boxed{4}$ + $\boxed{8}$ + $\boxed{16}$ + $\boxed{32}$ + $\boxed{64}$

９０グラム＝$\boxed{1}$ + $\boxed{2}$ + $\boxed{4}$ + $\boxed{8}$ + $\boxed{16}$ + $\boxed{32}$ + $\boxed{64}$

$\boxed{24}$ ホテルの部屋数

目的　「４」と「９」を使わない世界を調べよう。

単元　n 進法

> 問題　ホテルでは,「４」や「９」の数字を使わず，１，２，３，５，６，７，８，10, 11, …
> という部屋番号になることがある。
> 「４」や「９」の数字を使わないホテルで，200 番目の部屋は何号室か。

展開例

① 10 番目や 20 番目の部屋を生徒に答えさせる。

② 最初の 20 部屋目の番号を書かせる。（書き方を工夫させる）

③ ８部屋ずつ書くことによって，規則性をみつけ，200 番目の部屋番号を答えさせる。

④ 解説：８進法を利用することにより

$200 = 3 \times 8^2 + 1 \times 8 + 0$　より　310 号室である。

25 数あてカード

目的　数当てゲームを使って，マジックをしよう。

単元　n 進法

問題　数あてカードで手品をしよう。

展開例

①　数あてカードを生徒に見せる。（別紙を拡大したもの）

教員「１から 31 の数字の中から，１つの数字を頭に思い描いてください。」

教員「１つ決めましたか，では，これからあなたの頭の中にある数字をあててみせます。」

教員「その数字が出てくるカードはＡＢＣＤＥのうちのどれですか，数字が含まれているカードをすべて答えてください。」

生徒「〇と〇と〇です。」

教員「あなたの考えている数字は□ですね。」

②　なぜ“当たる”のか考えさせる。

③　生徒全員に「左上の数字を足せばよい」ことを伝える。なぜ左上の数字を足せばよいのか考えさせる。説明ができるものがいれば，発表させる。

A

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

B

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

C

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

D

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

E

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Ａカード　２進数で下から１桁目が１のもの

Ｂカード　２進数で下から２桁目が１のもの

Ｃカード　２進数で下から３桁目が１のもの

Ｄカード　２進数で下から４桁目が１のもの

Ｅカード　２進数で下から５桁目が１のもの

26 折り紙で平面幾何

目的　体験的活動を通して，三角形の５心を学ばせたい。

単元　図形の性質

問題　三角形の折り紙を使って，重心，外心，内心，垂心を見つけよう。

展開例

① 折り紙を切り，４つの同じ三角形を作らせる。（グループ内にいろいろな三角形があるとよい）

② 重心の作図の仕方を確認する。

重心…中線の交点

③ 折り紙を折って，重心の位置を確認し鉛筆でマークさせる。

④ 同様な方法で，折り紙を利用し外心，内心，垂心の位置を見つけさせる。

外心…垂直二等分線の交点（外接円の中心）

内心…角の二等分線の交点（内接円の中心）

垂心…垂線の交点

⑤ その後，一つの三角形に残りの３点を移す。（例　重心の紙に内心，外心，垂心を移す。）

⑥ グループ内で形の違う三角形に対し，五心の位置がどのように違うか見比べさせる。

(1)　外心Ｏ，重心Ｇ，垂心Ｈが一直線上に並ぶことを確認する。

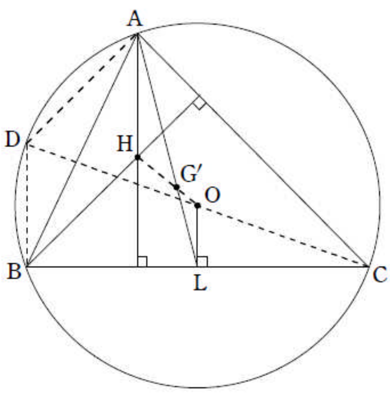
(2)　ＯＧとＨＧの長さを測り，ＨＧ＝２ＧＯとなることを確認する。

⑦ 三角形の５心について図形的意味を確認する。

傍心…外角の二等分線の交点

発展問題　(1)，(2)となる理由を考えよう。

(1)，(2)の証明



［証明］

△ＡＢＣの外接円Ｏの直径をＣＤ，垂心をＨとすると

ＤＢ⊥ＢＣ，ＡＨ⊥ＢＣより，ＤＢ // ＡＨ…①

同様にして　ＤＡ // ＢＨ…②

①，②より四角形ＤＢＨＡは平行四辺形であるから　ＤＢ＝ＡＨ

辺ＢＣの中点をＬとすると，△ＣＤＢにおいて

中点連結定理より　ＤＢ // ＯＬ，ＤＢ＝2ＯＬ

したがって　ＡＨ // ＯＬ，ＡＨ＝2ＯＬ

中線ＡＬとＨＯの交点をＧ’とすると，△Ｇ’ＡＨ∽△Ｇ’ＬＯで

相似比が２：１であるから，Ｇ’は△ＡＢＣの重心Ｇに一致する。

すなわち，Ｏ，Ｇ，Ｈは１直線上にあり，ＨＧ＝２ＧＯである。

［証明終］

補足１　ベクトルを使った証明方法，座標平面を利用した証明方法などもある。

補足２　△ＡＢＣの外心，重心，垂心をそれぞれＯ，Ｇ，Ｈとするとき，この３点は１直線上にあり点Ｇは線分ＯＨを１：２の比に内分する。３点Ｏ，Ｇ，Ｈを通る線をオイラー線という。

27 正多面体

目的　面のなす角，ねじれの位置にある辺の中点を結んだ線との関係など，いろいろな特徴を実際に模型で確認させる。また，空間図形の性質を論理的に考察し，多面体について学ばせる。

単元　図形の性質

> **問題１**　正四面体・正六面体模型から分かることは。

展開例

①　４，５人のグループに分ける。

②　グループごとに竹ひごまたは厚紙で正四面体・正六面体の骨組みを作る。

③　模型から分かること，気づくことを上げていく。

例

(a) 正四面体のねじれの位置にある辺の中点を結ぶと，その辺と垂直になる。

(b) 正四面体の６個の辺の中点を結ぶと，正四面体の中に正八面体ができる。

(c) 正六面体の４個の頂点を結ぶと，正六面体の中に正四面体ができる。

(d) （頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝２（オイラーの多面体定理）が成り立つ。

④　最後に全体で集約する。

> **問題２**　正多面体の探し方を考えよう。

展開例

①　具体的な正多面体の例を生徒に挙げさせる。

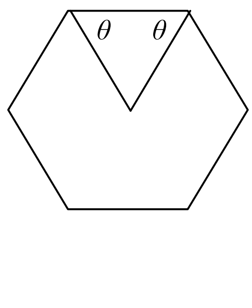
②　正多面体ができる以下の条件を考えさせる。

○１つの頂点に集まる正多角形の面の数は $\boxed{}$ つより多い。　$\boxed{}$ は２

○１つの頂点に集まる正多角形の角の和は $\boxed{}$ 度より小さい。　$\boxed{}$ は 360°

③　１つの面を正 n 角形として，正多面体をつくることができる図形を考えさせる。

１つの面を正 n 角形とする。（$n \geqq 3$）



また，図において $\theta = (180° - \dfrac{360°}{n}) \div 2$ であるから

正 n 角形の１つの内角は $2\theta = (180° - \dfrac{360°}{n})$

１つの面には頂角が３個以上集まり，その頂角の和は 360° より小さくなければならない。

$3(180° - \dfrac{360°}{n}) < 360° \quad \therefore n < 6$

このことから面として考えられる図形は，正三角形，正方形，正五角形の３種類のみである。

④　正方形を利用した正多面体は正六面体の他にあるかどうか予想させる。

⑤　「オイラーの多面体定理」を利用して証明する。

１つの頂点には３個の面が集まる（４個だと 360° をこえてしまう）

面の数を x とすると，重なりを入れて頂点は $4x$ 個。

したがって，実際は　頂点は$\dfrac{4x}{3}$個，辺は$\dfrac{4x}{2}$個ある。

ここで「オイラーの多面体定理」を利用して

$\dfrac{4x}{3}-\dfrac{4x}{2}+x=2$　$\therefore x=6$　つまり　面が正方形のときは正六面体のみである。

⑥　オイラーの多面体定理を利用して，他の正多面体を求めさせる。

〇正三角形のとき　　正四面体　正八面体　正二十面体

〇正五角形のとき　　正十二面体

⑦　結論を導く

正多面体は，正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体の５つである。

補足１【オイラーの多面体定理】

多面体については，頂点，辺，面の数について（頂点の数）－（辺の数）＋（面の数）＝２が成り立つ。

問題３　オイラーの多面体定理を考えよう。

展開例

①　４，５人ずつのグループに分ける。

②　正四面体，正六面体，正八面体，正四角錐，正十二面体等，各グループで決めた図形を一つ作らせる。厚紙で展開図を作らせ，切り取った図形をセロハンテープで貼り付ける。ただし，球と同相にするため凸であること。また曲面を含む立体は作らないこと。

③　頂点，辺，面の数を調べる。

④　お互いのグループで情報交換しながら，次のような表を作らせる。

図　　形	頂点	辺	面
正四面体	4	6	4
正六面体	8	１２	6
正八面体	6	１２	8
正四角錐	5	8	5
正十二面体	20	30	12

⑤　オイラーの多面体定理

（頂点の数）―（辺の数）＋（面の数）＝２　に気付かせる。