

微分・積分を用いた事象の考察

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元

S S H数学Ⅱ（学校設定科目）・微分法と積分法

(2) 単元の目標

微分・積分の考えについて理解し、それらの有用性を認識するとともに、事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
微分・積分における考え方や体系に関心をもつとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを事象の考察に活用しようとする。	微分・積分の考え方を身に付けて、具体的な事象を微分・積分を用いて考察することができる。さらに、思考の過程を振り返り、多面的・発展的に考えることができる。	微分・積分を用いて、事象を表現・処理し、推論することができる。	微分・積分の基本的な概念、原理・法則などを体系的に理解し、基礎的な知識を身に付けている。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア 言語活動

位置（座標）を時間で微分したら速度であるということを確認し、 $v-t$ グラフや $x-t$ グラフからその物体の動きを微分・積分の考えを用いて記述させる。

イ 教材（課題）

ワークシート（資料2 微分・積分に関する発展的なテスト）を与えて、時間を決めて取り組ませる。

(5) 単元の指導計画

微分係数と導関数… 7 時間

導関数の応用…………… 8 時間

積分法……………14 時間

（パフォーマンス課題は最後の時間に実施）

(6) ルーブリック（評価基準表）

ア 「微分・積分に関する発展的なテスト」問題 1 についてのルーブリック

	数学的な見方・考え方	表現
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。（例：加速していく）
3	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。	

2	$0 \leq t \leq 2$ のとき $x = 3t$ $2 < t$ のとき $x = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{32}{3}$ であることが理解できている。	$t = 3$ 及び $t = 5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v = 3$ $2 < t$ のとき $v = (t-4)^2 - 1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり, $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。

イ 「微分・積分に関する発展的なテスト」問題 2 についてのルーブリック

	関心・意欲・態度	表現
	数学の論理や体系に関心をもち, 積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
3	$v-t$ グラフにおいて, 下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$v-t$ グラフにおいて, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現ができている (位置の説明ができている)。

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領 数学Ⅱ 3内容」には次のように示されている。

(5) 微分・積分の考えについて理解し, それらの有用性について理解するとともに, 事象の考察に活用できるようにする。

本事例では, 微分・積分の考え方が瞬間の速さや位置 (座標) の考察に活用できることを理解することで, 瞬間の速さのグラフや位置 (座標) のグラフから物体の動きを考察しようとすることを意図している。

(2) 言語活動の充実の工夫

本事例では, 考察をする際に, 計算し, グラフを描くだけでなく, 説明や絵等を記述しようとすることを意図している。それにより, 事実を正確に理解し, 説明することにより自分の考えを深めることができる知的活動になると考えた。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

ア 本時の実施状況

クラス 第2学年A組 (男子 19名 女子 20名 合計 39名)

本時の展開

過程	学習活動	指導上の留意点
導入 5分	数学における微分・積分の考え方を復習する。	<ul style="list-style-type: none"> ・微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ において、$x=a$ における接線の傾きになっていることを確認する。 ・定積分と面積の関係を確認する。
展開Ⅰ 20分	1 距離と速度について 2 日常生活における速度に関するグラフ	<ul style="list-style-type: none"> ・具体的な例を用いて $x-t$ グラフを描き、距離を時間で微分すると速度になることを確認する。また、$v-t$ グラフの時間による積分が $x-t$ グラフであることも確認する。 ・微分・積分が日常生活で用いられていることを理解させる。 ・日常生活の事象を説明するためには、「<u>数学的な面 (計算や式及びグラフ)</u>」と「<u>言語的な面 (言葉による表現や絵)</u>」の両方が必要であることを確認させる。
展開Ⅱ 23分	微分・積分に関する発展的なテスト 【パフォーマンス課題】	<ul style="list-style-type: none"> ・このテストは定期考査では測れない数学的及び言語的な能力を測るテストであることを説明する。 ・与えられた① $v-t$ グラフや② $x-t$ グラフから微分・積分の考え方をを用いてどのような事象であるかを考察させる。
まとめ 2分	本時のまとめ	<ul style="list-style-type: none"> ・微分・積分が日常の事象に関連していることを確認させる。

イ 使用したワークシート

「日常生活の微分・積分」(資料1)は導入及び展開Ⅰにおいて使用した。「微分・積分に関する発展的なテスト」(資料2)は展開Ⅱにおいて使用した。また、「微分・積分に関する発展的なテスト」の模範解答を(資料3)に示す。

(2) 評価事例

パフォーマンス課題を実施する前にループリック及び解答例(資料3)を作成したが、実際に実施してみると、ループリックを超えた表現の記述があることに気付いた。そこで、ループリックを超えているが評価できる図・絵や表現があればそれぞれに対して1点加点することにした。そのため、本事例のパフォーマンス課題は、ループリックによる観点別の満点が5点のものが4項目あり計20点と、それ以外の評価できる記述に対して点数を加えたものを合わせて、得点とした。

また、評価の途中で、生徒の記述したワークシートを見る中で、① 考え方「 $t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている」ことが重要なポイントであると判断し、点数を3点から4点へと変えることにした(後述の採点シート参照)。

資料1 配布プリント1

日常生活の微分・積分

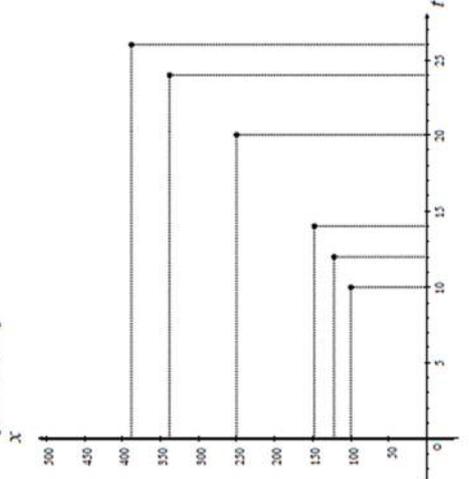
(1) 微分とは？ 積分とは？

(2) 位置(座標)と速度について

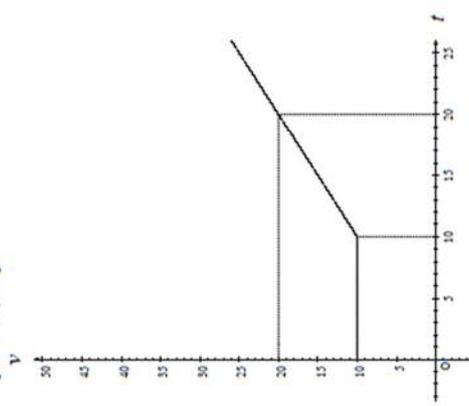


右向きを正とし、1目盛りを1mとし途中の10目盛りまでは1秒に1目盛りずつ進み、その後1[m/s]²ずつ加速していくものとします。以下に、変位と時間の関係を表すx-tグラフ、速度と時間の関係を表すv-tグラフを以下に示します。

【x-t グラフ】



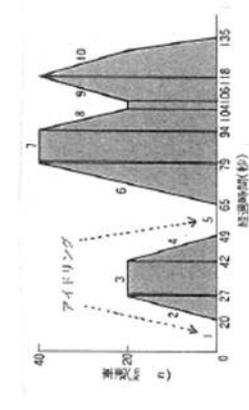
【v-t グラフ】



2年()組()番名前()

(3) 日常生活における速度に関するグラフ(その1)

【10モード燃費走行パターン】



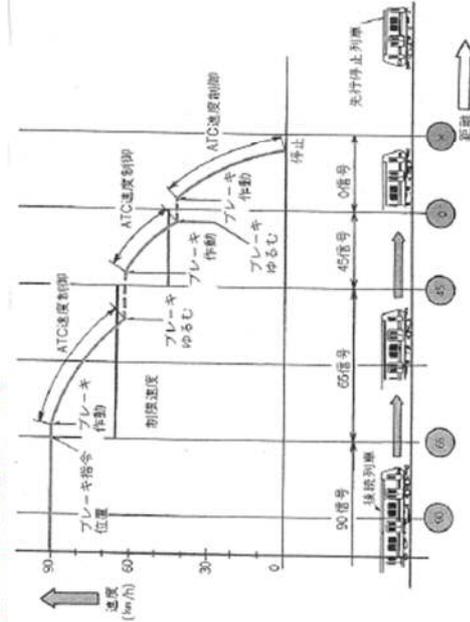
10モード燃費とは、運輸省が形式認定車の排出ガスレベルと同時に測定して発表する数値で、定地走行燃費にくらべれば、より日常的・現実的な燃費率といえる。10モードというのは、10とおりの走りかたを設定したパターン(図形)のことで、図に示したような形の線図となる。

そしてこのパターンは次のような意味をもっている。縦軸が車速、横軸が時間をあらわすので、

- ①20秒間アイドリング運転をした後、②スタートして7秒間で20km/hまで加速し、③20km/hで15秒走り、④7秒で減速停止し、⑤16秒間アイドリングをした後、⑥14秒間に40km/hまで加速し、⑦40km/hで15秒走行する……という、ひとつの日常的な走行状態にしたもの。

(4) 日常生活における速度に関するグラフ(その2)

【ATCによる運転モード】



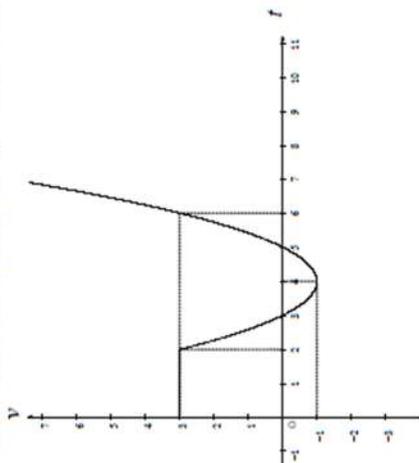
自動列車制御装置(ATC:オートマチック・トレイン・コントロール)新幹線では開業当初から採用され、安全性や信頼性の点で非常に優れたシステムであることが実証されている。常時指示速度を現示して、オーバースピードに対しては運転士の捜査によらず、自動的に適正なブレーキを作動させ、現示速度に調節し、そのまま運転が航行できるようにしている。

出典

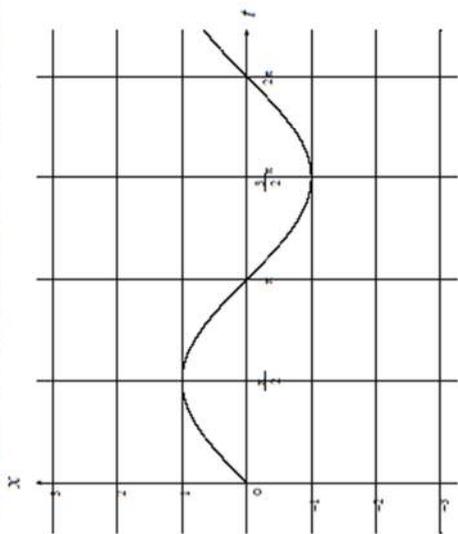
- ・ 出射忠明(1985) 自動車メカニズム図鑑, グランプリ出版
- ・ 伊原一夫(1987) 鉄道車両メカニズム図鑑, グランプリ出版

微分・積分に関する発展的なテスト

- 1 ある物体の $v-t$ グラフは以下のようにになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



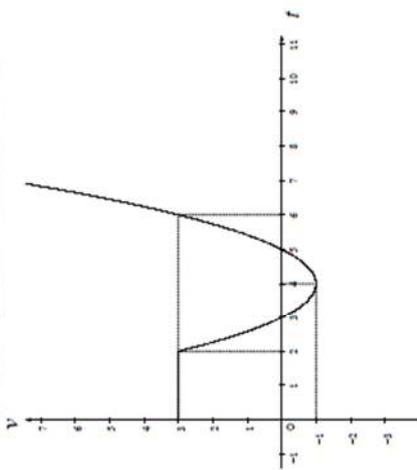
- 2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようにになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を変えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは 1 である。



資料3 模範解答

微分・積分に関する発展的なテスト (解答例)

- ① ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



【解答例】

t 秒後における位置を x とする。

(i) $0 \leq t \leq 2$ のとき

$$x = \int v dt = \int 3t dt = 3t + C$$

$x=0$ のとき $t=0$ より $C=0$

よって、 $x=3t$

(ii) $2 \leq t$ のとき

$$x = \int v dt = \int ((t-4)^2 - 1) dt = \int (t^2 - 8t + 15) dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + C$$

$t=2$ のとき $x=6$ より $C = -\frac{32}{3}$

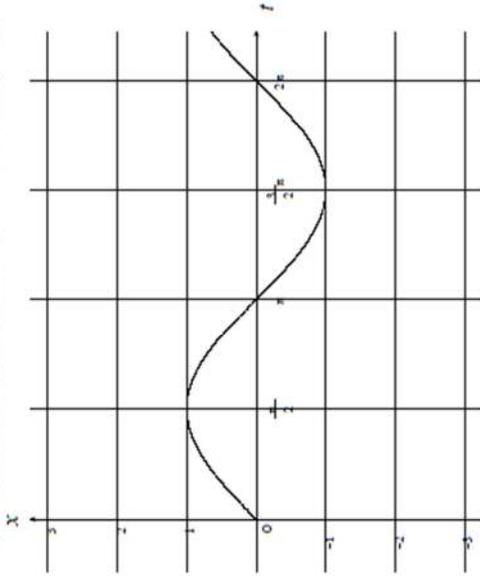
よって、 $x = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{32}{3}$

t	2	...	3	...	5	...
$v(t)$	(3)	+	0	-	0	+
$x(t)$	6	7	$\frac{22}{3}$	7	6	7

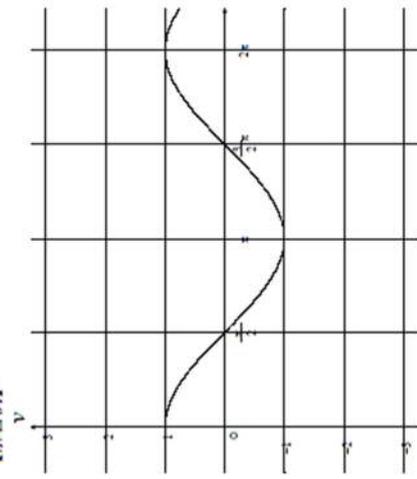
《説明》

2秒間正方向に等速運動して6まで進み、その後ゆるやかに減速し3秒後 $\frac{22}{3}$ に到達する。その後、逆向きに動き出す。加速するが減速し5秒後に6に到達する。ここでまた向きを変えてどんどんと加速し続ける。

- ② ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。



【解答例】



《説明》

物体は位置0から1へ移動し、向きを変え-1へ移動し、また向きを変えて1へ向かう。位置1及び-1の間では速度は0に近づき、向きを変えた後は加速し位置0においてトップスピードとなる。

以下にパフォーマンス課題への生徒の取組とその評価例を六つ挙げる。採点シートの○をつけたところが、それぞれの生徒の記述したワークシートの観点別の評価である。実際に生徒が記述したワークシートは、(資料4) から (資料9) に示す。

ア 予想された解答 (資料4)

ループリックを超えない解答であったため評価しやすかった。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ループリック)		問題 2 についての評価基準表 (ループリック)	
数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現
数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5 $x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5 $v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更 $t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3 $v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2 $0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2 $v-t$ グラフにおいて、分かりやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1 $0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1 $v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点		加点 1 $x = \sin t$ という記述あり	

イ 言語的な表現のない解答 (資料5)

① からこの生徒は与えられたグラフがどんな物体の動きを表しているかを理解していないと思われる。その一方、② から数学的な考え方に基づいて判断しようとする力を有していることもわかる。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ループリック)		問題 2 についての評価基準表 (ループリック)	
数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現
数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5 $x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5 $v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更 $t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3 $v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2 $0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2 $v-t$ グラフにおいて、分かりやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1 $0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1 $v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点		加点 1 $x = t(t-\pi)(t-2\pi)$ という記述あり	

ウ 数学的な表現のない解答 (資料6)

この生徒はグラフが表す物体の動きは理解しているが、微分・積分の考え方に応用できていないことがわかる。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現	
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点			加点		

エ 定積分で学んだことを生かそうとしている解答 (資料7)

1 からこの生徒は移動距離 (位置) を定積分を用いて説明しようとしている。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現	関心・意欲・態度	表現	
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。	
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描けている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点			加点 1		単振動に関連した内容の記述あり

オ 評価しにくい解答 (資料8)

この生徒は $v-t$ グラフを近似して定めていることから、問題に対して的確に表現しようとしていることがわかる。その一方、**1** では計算ミスをしていて、**2** では物体の動きについて「単振動」としか表現がないため、評価しにくかった。

【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現		関心・意欲・態度	表現
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。		数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描かれている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点 2	3点を通るから放物線と近似と増減表が記述されている		加点 1	$x = \sin t$ と近似という記述あり	単振動という記述あり

カ 予想を超えた解答 (資料9)

1 では具体的な数値を用いた説明がないため「考え方」では0点と評価したが、位置・速度・加速度の関係を理解しているため1点加点した。

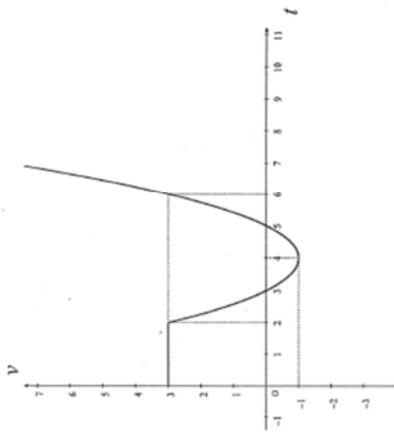
【採点シート】

問題 1 についての評価基準表 (ルーブリック)		問題 2 についての評価基準表 (ルーブリック)			
	数学的な見方・考え方	表現		関心・意欲・態度	表現
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。		数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
5	$x-t$ グラフが正しく記述できている。	物体の動く向きと速度を関連させた表現ができている。	5	$v-t$ グラフが正しく描かれている。	位置と速度を関連させた説明・表現ができている。
4 変更	$t=3$ 及び $t=5$ における x の値を求めることができている。		3	$v-t$ グラフにおいて、下記以外の t における v の値が理解できている。	
2	$0 \leq t \leq 2$ のとき、 $2 < t$ のとき それぞれの x を求めることができている。	$t=3$ 及び $t=5$ で物体の動く向きが変わることを説明・表現できている。	2	$v-t$ グラフにおいて、分りやすい t における v の値が理解できている。	位置及び速度の説明・表現がそれぞれできている。
1	$0 \leq t \leq 2$ のとき $v=3$ $2 < t$ のとき $v=(t-4)^2-1$ であることが理解できている。	$0 \leq t \leq 2$ のときは等速運動であり、 $2 < t$ のときは等速運動ではないことを説明・表現できている。	1	$v-t$ グラフを描くための軸が描かれている。	物体の動きについて言語による説明・表現がある (位置の説明ができている)。
加点 1	$a=v'$ のグラフが描かれている		加点 1	加速度のグラフが描かれている	バネや地震などの波という記述あり

資料4 生徒の記述したワークシート ア 予想された解答

微分・積分に関する発展的なテスト

1 ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



(i) $0 \leq t < 2$ のとき $v=3$

$$x = \int v dt = \int 3 dt = 3t + C$$

$$t=2 \text{ のとき } x=6 \text{ より、}$$

$$6 = 3 \times 2 + C$$

$$C=0$$

$$\text{よって、} x=3t$$

(ii) $2 \leq t < 5$ のとき $v = t^2 - 8t + 15$

$$x = \int v dt$$

$$= \int (t^2 - 8t + 15) dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t + C$$

$$t=2 \text{ のとき } x=6 \text{ より、}$$

$$6 = \frac{8}{3} - 16 + 30 + C$$

$$18 = \frac{8}{3} - 4 + 30 + C$$

$$3C = -32$$

$$C = -\frac{32}{3}$$

$$\text{よって、} x = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{32}{3}$$

$$x' = t^2 - 8t + 15 = (t-3)(t-5)$$

$$= (t-3)(t-5)$$

$$t \quad \dots \quad 3 \quad \dots \quad 5 \quad \dots$$

$$x' \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$$

$$x \quad \nearrow \quad \frac{32}{3} \quad \searrow \quad 6 \quad \nearrow$$

$0 \leq t < 2$ では $v=3$ の等速直線運動。

$2 \leq t < 3$ では v は t を減速し、 $t=3$ のとき

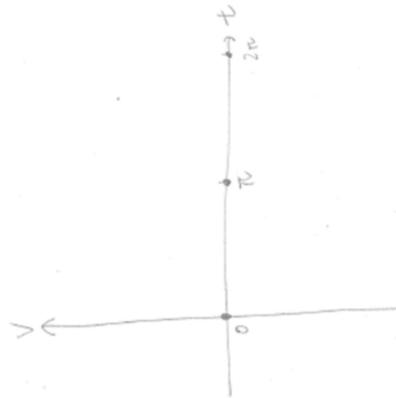
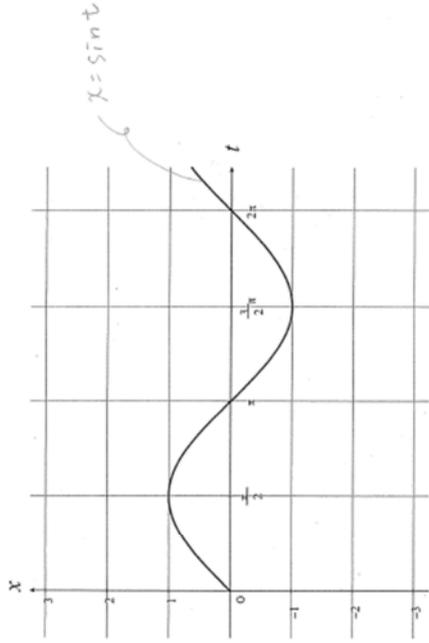
止まる。

$3 < t < 5$ では v は t を加速し、 $t=5$ のとき

止まる。

$t=5$ のとき $v=0$ であり、 $t > 5$ のときは $v > 0$ であり、 $t=11$ のとき $x=6$ である。

2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。



資料6 生徒の記述したワークシート ウ 数学的な表現のない解答

微分・積分に関する発展的なテスト

① ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。

4:00から4:15までは速度が一定で45km/hで進む。
 4:15から4:30までは速度が45km/hで進む。
 4:30から4:45までは速度が45km/hで進む。
 4:45から5:00までは速度が45km/hで進む。
 5:00から5:15までは速度が45km/hで進む。
 5:15から5:30までは速度が45km/hで進む。

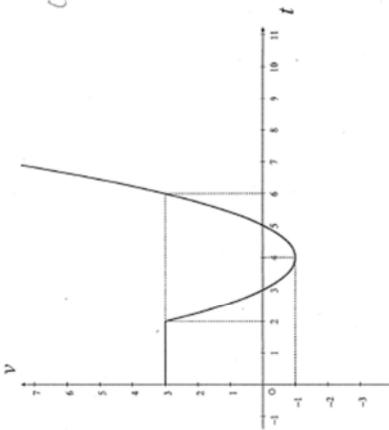
② ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。

1:00から1:15までは速度が一定で45km/hで進む。
 1:15から1:30までは速度が45km/hで進む。
 1:30から1:45までは速度が45km/hで進む。
 1:45から2:00までは速度が45km/hで進む。
 2:00から2:15までは速度が45km/hで進む。
 2:15から2:30までは速度が45km/hで進む。

資料8 生徒の記述したワークシート オ 評価しにくい解答

微分・積分に関する発展的なテスト

① ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



物体の位置を x とおく
(1) $0 \leq t \leq 2$ のとき

$$v = 3$$

$$x = \int_0^t 3 dt$$

$$= [3t]_0^t$$

$$= 3t$$

(ii) $2 \leq t < 4$ のとき $v-t$ グラフは $(0,3), (4,-1), (6,3)$ を通過する
故に物体は近似できるため、 $v = t^2 - 8t + 15$ (計算用) とおける

$$x = 3 \times 2 + \int_2^t (t^2 - 8t + 15) dt$$

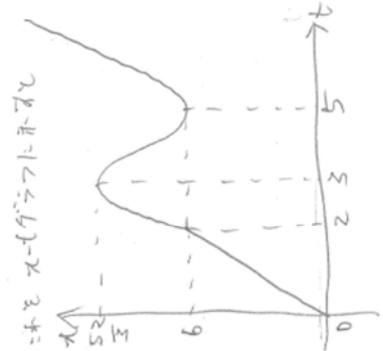
$$= 6 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t \right]_2^t$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{22}{3}$$

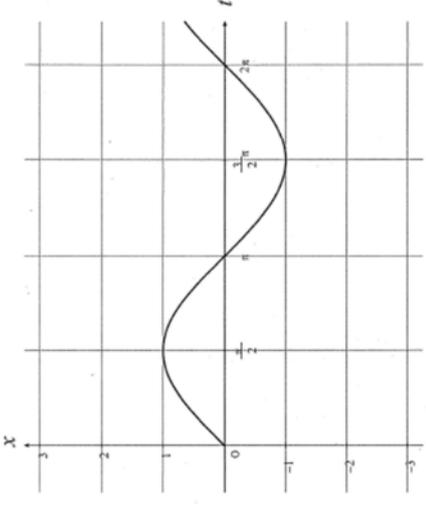
(iii) (i) 時 $x = \begin{cases} 3t & (0 \leq t \leq 2) \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{22}{3} & (2 < t) \end{cases}$
連続性

t	0	2	3	5	6	7	8	10	11
v	0	3	3	0	-1	0	3	3	0
x	0	6	6	10	10	10	10	10	10

以上より物体は $0 \leq t < 2$ に右へは等速直線運動を続け、 $t=2$ で $v=3$ に達し、 $2 < t < 4$ に右へは本向きに移動して、 $t=3$ で $x=10$ に達し、 $3 < t < 5$ に右へは左向きに移動して、 $t=5$ で $x=10$ に達し、 $5 < t < 7$ に右へは右向きに移動する。

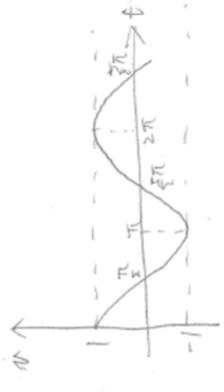


② ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を交えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは1である。



このグラフを $x = A \sin t$ ($t \geq 0$) と近似する

$$v = \cos t$$



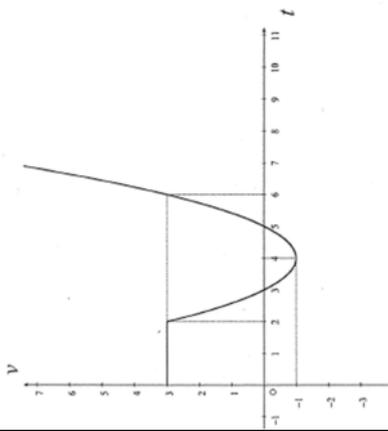
このグラフはグラフの様子

物体は $-1 \leq x \leq 1$ の間を行き来する単振動をしているが、

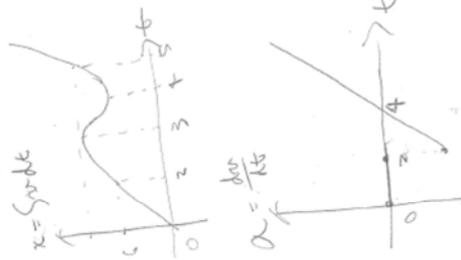
$$x = -1$$

微分・積分に関する発展的なテスト

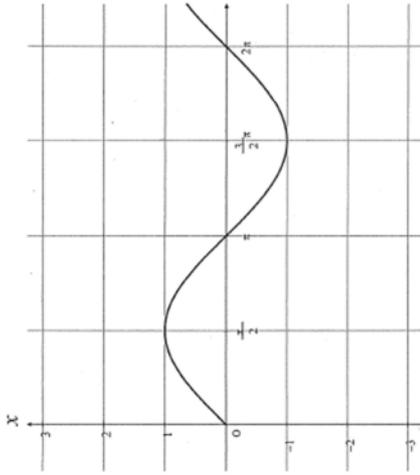
1 ある物体の $v-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、微分・積分の考えを用いて説明せよ。ただし、 $t=0$ において物体は $x=0$ にいるものとする。



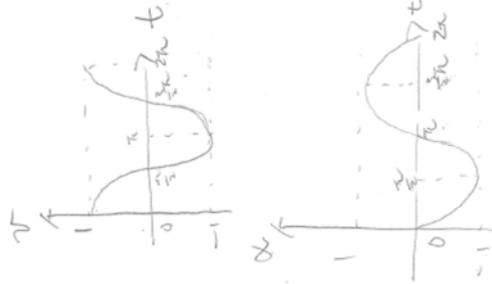
$t \leq 2$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} > 0, v > 0, t < 0 \rightarrow$
 正の向きに一定の速度で移動している
 $2 \leq t \leq 4$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} = 0, v > 0, t < 0 \rightarrow$
 正の向きに一定の速度で移動している
 $4 \leq t \leq 5$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} < 0, v > 0, t < 0 \rightarrow$
 正の向きに減速して移動している
 $5 \leq t \leq 6$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} < 0, v < 0, t < 0 \rightarrow$
 負の向きに減速して移動している
 $6 \leq t \leq 7$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} = 0, v < 0, t < 0 \rightarrow$
 負の向きに一定の速度で移動している
 $7 \leq t \leq 8$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} > 0, v < 0, t < 0 \rightarrow$
 負の向きに減速して移動している
 $8 \leq t \leq 9$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} > 0, v = 0, t < 0 \rightarrow$
 静止している
 $9 \leq t \leq 11$ におけるは、 $\frac{dv}{dt} = 0, v = 0, t < 0 \rightarrow$
 静止している



2 ある物体の $x-t$ グラフは以下のようなになっている。この物体はどのような動きをしているか、速度の情報を与えて説明せよ。ただし、 $t=0$ における接線の傾きは 1 である。



$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ では
 $\frac{dx}{dt} > 0, \frac{d^2x}{dt^2} < 0 \rightarrow$ 正の向きに減速している
 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ では
 $\frac{dx}{dt} > 0, \frac{d^2x}{dt^2} > 0 \rightarrow$ 正の向きに加速して移動している
 $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ では
 $\frac{dx}{dt} < 0, \frac{d^2x}{dt^2} < 0 \rightarrow$ 負の向きに減速して移動している
 $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ では
 $\frac{dx}{dt} < 0, \frac{d^2x}{dt^2} > 0 \rightarrow$ 負の向きに加速して移動している



したがって、この物体は
 一定の速度で移動している
 例として、バネ +
 地震計の原理（これは加速度を測る）
 （地震では、この加速度を測ることで
 地震の強さを測る。これは見合えば、
 加速度を測ることで）

(3) まとめ（研究の成果）と今後の課題

パフォーマンス課題を実施することで二つの成果が得られた。一つは、生徒が、日常生活における事象を他人に説明する際には、数学的な表現と言語的な表現の両方の面が必要であることを理解できたということである。もう一つは、教員が、各々の生徒が数学的な面と言語的な面のどちらでつまづいているのかを把握することができたということである。

一方、今後の課題としては次の二点が挙げられる。

一つは、パフォーマンス課題の難易度の調整が難しいということである。従来の考査問題とは異なる課題であり、なおかつ生徒の学力に適しているという二つの観点を同時に満足させることが難しかった。本事例ではルーブリックで定めた得点 20 点に、評価基準以外で評価できる記述に対して与えた点数を加えて合計得点とした。評価の結果は、全体で平均点が 5.2 点となり、生徒の平均的な学力より難易度の高いものとなってしまった。そのため、解答できずに評価し切れなかった生徒層も存在する。難易度の設定には工夫改善が必要である。

もう一つは、もし、パフォーマンス評価を学校や学年全体で実施すると想定した場合、他の教科担当者と評価基準を共有することが難しいということである。パフォーマンス課題を実施すると、本事例の加点部分や(2)評価事例カのようなルーブリックを超えた解答(資料 9)が出ると予想される。学年等で統一して実施するためには評価基準を共有しなければならないが、本事例のように 1 クラスのみでの実施でも、ルーブリックの変更や加点制度導入の必要性が生じ、予想以上に時間がかかってしまった。学校や学年全体の生徒にこの評価を生かしていくためには、この点の改善が必要である。