三角形の面積の考察を通して，一つの事象を多面的に捉える能力を育む事例

1　学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学Ⅰ・三角形の面積

(2) 単元の目標

三角形の面積の公式の特徴について理解し，事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
三角形の面積の公式を導くにあたり，さまざまな数学の公式や定理を活用しようとしている。導いた公式を条件に合わせて使い分けようとしている。	一つの公式の意味を理解し，さまざまな角度から捉えることができる。	三角形の辺や角に関するさまざまな公式を利用して，多くの三角形の面積の公式を導くことができる。文字を含む複雑な計算を行うことができる。	面積の公式がもつ特徴を押さえ，状況に応じて公式を使い分け，問題を効率よく解くことができる。

(4) 取り上げる言語活動と教材

ア　言語活動

・　グループ活動を取り入れることにより，コミュニケーション能力を高める。

・　式，図などを用いることで，自分の考えを他者に分かりやすく表現する。

イ　教材（パフォーマンス課題）

・　初等教育で既習の三角形の面積公式（底辺×高さ÷２）を基にして，三角比の定義，三角形の相似比の関係などを用いて多くの公式を導く。

・　導いた公式の特徴を捉え，条件により効率のよい方法で三角形の面積を求める。

以上の内容のパフォーマンス課題（**資料１**）をワークシートで与えて取り組ませる。

資料１　パフォーマンス課題

①　小学校で学習した（三角形の面積Ｓ）＝（底辺）×（高さ）÷２を変形して，次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し，図（**資料 14**）のように各頂点Ａ，Ｂ，Ｃの対辺の長さをａ，ｂ，ｃとし，また，∠ＡＢＣ＝Ｂ，∠ＢＣＡ＝Ｃ，∠ＣＡＢ＝Ａとする。

【公式】　$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A$

②　小学校で学習した（三角形の面積Ｓ）＝（底辺）×（高さ）÷２を利用して，次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し，図（**資料 14**）のように各頂点Ａ，Ｂ，Ｃの対辺の長さをａ，ｂ，ｃとし，また，∠ＡＢＣ＝Ｂ，∠ＢＣＡ＝Ｃ，∠ＣＡＢ＝Ａ，内接円の半径をｒとする。

【公式】　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

③　小学校で学習した（三角形の面積Ｓ）＝（底辺）×（高さ）÷２を利用して，【ヒント】の手順に従って次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し，図（**資料 14**）のように各頂点Ａ，Ｂ，Ｃの対辺の長さをａ，ｂ，ｃとし，また，∠ＡＢＣ＝Ｂ，∠ＢＣＡ＝Ｃ，∠ＣＡＢ＝Ａ，外接円の半径をＲとする。

【公式】　$S=\dfrac{abc}{4R}$

【ヒント】　１　２点Ｂ，Ｃを頂点の一部とし，一辺を外接円の直径とする△ＢＣＤを考える。
２　点Ｃから辺ＡＢに垂線を下ろす。
３　三角形の相似を利用する。

④　小学校で学習した（三角形の面積Ｓ）＝（底辺）×（高さ）÷２を利用して，次の三角形の面積の公式を導くように空欄をうめなさい。但し，図（**資料 14**）のように各頂点Ａ，Ｂ，Ｃの対辺の長さをａ，ｂ，ｃとし，また，∠ＡＢＣ＝Ｂ，∠ＢＣＡ＝Ｃ，∠ＣＡＢ＝Ａとする。

【公式】　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　　但し，$2s=a+b+c$

⑤　①～④で求めた公式の特徴を文章で述べなさい。

⑥　①～④で導いた公式を利用し，できるだけ効率よく問題を解きなさい。

【問題】　図（**資料 14**）のように半径Ｒの円に内接する面積$2\sqrt{14}$の△ＡＢＣがあり，ＡＢ＝３，ＢＣ＝５である。以下の問に答えよ。

(1) sinＢの値を求めよ。

(2) ＡＣの長さを求めよ。

(3) △ＡＢＣの内接円の半径ｒを求めよ。

(4) △ＡＢＣの外接円の半径Ｒを求めよ。

(5) 図のように弧ＡＣのＢを含まない弧上にＡＤ＝ＣＤとなるように点Ｄをとる。
△ＡＤＣの面積が$4\sqrt{14}$のとき，ＡＤの長さを求めよ。

(5) 単元の指導計画（全４時間）

	学習活動	言語活動に関する指導上の留意点
第１次 （２）	・三角比の応用として，正弦定理や余弦定理の公式を確認し，平面図形や空間図形の計量をする。	・公式を暗記するだけではなく，どのように導き出されたのかを図を用いて丁寧に説明し，理解させた上で証明する際の文章の留意点について説明する。
第２次 （２）	・三角形の面積の基本公式を確認し，それを基にして他の公式を導きだし，それぞれの公式の特徴を押さえる。（本時は 1/2 及び 2/2）	・グループ学習を通して，他の生徒の考えを理解し，自分の考えを的確に伝える表現力を身に付けさせる。

(6) ルーブリック（評価基準表）

生徒のパフォーマンス課題への取り組みを，ワークシートを使い以下の課題別ルーブリック（**資料２～４**）を基に評価した。

資料２　①～④のルーブリック

	考え方	処　理	表　現
	数学的に筋道を立てた考え方をしているか。	解法の手続きを正しく実行できているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
Ａ ５	導き出す公式に向けて，必要とされる公式や定理を適切な場面で使用している。	文字を含む複雑な計算も確実にこなし，公式を導き出している。	状況に合わせて，図や記号，数式などを的確に使用し，論理的な文章となっている。

B3	公式や定理を利用しようとする意図は見られるものの，的確な場面で使用されていない。	方向性は正しいものの，計算を正しく行うことができず，正解には至らない。	図や数式などを利用しているが，説明等がなく，読み手が解答者の意図を考えながら読まなくてはいけない。
C1	的外れな公式や定理を使用している。	計算に至る前に，解答の方向性も見いだせずに終わってしまっている。	公式のみが羅列されている。計算の表記が断片的である。
D0	白紙で解答に至っていない。		

資料３　⑤のルーブリック

	関心・意欲・態度	考え方	表　現
	数学の理論や体系に関心を持ち，積極的に活用しているか。	公式を多面的に捉えているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
A3	一つの解答だけではなく，さまざまな考え方をしようとした痕跡が見られる。	公式の特徴をさまざまな角度から捉えている。	文脈が通り，読み手が理解しやすい文章である。
B1	単純な考察しかできず，深い考えには至っていない。	公式の特徴を正しく捉えることはできているが，さまざまな角度からは捉えられていない。	表現したいことは理解できるが，読み手が解答者の意図を考えながら読まなくてはいけない。
C0	白紙で解答に至っていない。		

資料４　⑥のルーブリック

	考え方	処　理
	数学的に筋道を立てた考え方をしているか。	解法の手続きを正しく実行できているか。
A3	適切な公式を使用し，効率のよい解答になっている。	計算ミスなく，正しい解答となっている。
B1	公式を利用して解答を出そうとしているが，効率のよい解答であるとは言えない。	計算ミスが生じてしまい，間違った解答となっている。
C0	白紙で解答に至っていない。	

２　解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領第２章第４節数学第３款の３」には，次のように示されている。

３　指導に当たっては，各科目の特質に応じ数学活動を重視し，数学を学習する意義などを実感できるようにするとともに，次の事項に配慮するものとする。 (1) 自ら課題を見いだし，解決するための構想を立て，考察・処理し，その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり，それを発展させたりすること。

本事例では,三角形の面積の公式を導くだけではなく,それぞれの公式の特徴を捉えることにより,得られた結果の意義を考えることにつながり，またその際にグループ学習を行うことでコミュニケーション能力を高めることにもつながると考える。

(2) 言語活動の充実の工夫

ア　コミュニケーション能力を高め，個の理解力へつなげる活動

基となる公式を，どのような公式や定理を用いて，次の公式へと導けばよいのかを各自で考える。その上で，３～４人でグループをつくり，お互いの考えを理解し合うことで，各自の考えをより論理的にまとめることへとつなげる。

イ　ワークシートにまとめる活動

自分の考えをまとめた上で，それを数式や図などを活用して分かりやすい解説を心がける。また，その公式の特徴を捉えることにより，どのような条件において効果的な活用が可能な公式であるかということを再確認するとともに,幅広い視野をもって問題に取り組む姿勢を育むことができる。

３　実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

ア　パフォーマンス課題実施までの流れ

本校生徒は数学に苦手意識をもっている者が多く，数学の公式などは導き出された背景や意味などは理解せず，ただ公式を丸暗記し数値を代入して解答に至る者がほとんどである。そのためか基本問題に対してはある一定程度まで正解を導き出すことができるが，応用問題となると全くと言っていいほど解答できないのが現状である。また記述式の解答においては，数式を羅列し説明文を書かない解答や，計算用紙に書いたメモのような解答も見受けられる。

そこで今回のパフォーマンス課題を実施するに当たり，論述の基礎力を身に付けることができ，また応用力を養成することができる題材を取り上げるよう配慮した。

イ　実施対象生徒及び授業

３年生の２学期の授業で，理系生徒 13 名を対象として実施した。

ウ　授業内容

授業は数学Ⅰ及び数学Ａの復習として，三角比の応用で実施することとした。パフォーマンス課題を実施する前に，正弦定理や余弦定理の証明及び三角形に関するさまざまな定理の意味や条件を確認した。特に証明においては論述の大切さを生徒に理解させるよう意識して丁寧に実施した。また、解答の方向性についてもできるだけ細かく解説し，その後実施するパフォーマンス課題に取り組みやすいよう配慮した。

上記の授業を２時間実施した後，次の１時間は三角形の面積の公式①～④を導くワークシート（**資料 14**）に取り組ませた。授業の前半 20 分は各自で解答に取り組ませ，その後３～４人で１グループとなり，各自で考えた解答や考え方などを発表し合い，各グループで最もよいと思われる解答を作成できるよう討論を繰り返した。その授業の最後の 15 分は，再度個人でワークシートの完成へ向けての時間とした。


グループ学習風景

次の１時間は，前時の解説を行った上で，それぞれの公式がもつ特徴についてのワークシートに各自で取り組んだ。またその後に導いた公式を利用し，⑥の問題に取り組んだ。その後アンケート（**資料 15**）を実施し，意識の変化を調査した。

エ　パフォーマンス課題の実践例

(ｱ) ①～④に関するパフォーマンス課題

公式を導く課題については，解答の方向性が比較的分かりやすいと思われる①，②の課題については，生徒の多くが各自で正解を導き出していた。また，そうでない生徒においてもグループワークの中で理解することができ，ワークシートに正答を書き込むことができた。しかし，③，④の課題に関しては自力で正解に至る者はほとんどおらず，ワークシートに空欄が目立った。しかし，グループ学習で活発な議論を交わす中で，方向性を見つけ出しそれぞれのグループで正解を導き出していった。また，自発的に出来上がった答案を互いに確認しあう場面も見受けられ，グループ学習の予期せぬ効果が得られた。

(ｲ) ⑤，⑥に関するパフォーマンス課題

⑤,⑥の課題については各自で取り組むこととしたが,前時の授業で公式の理解度が増したためか,多くの生徒が積極的に課題に取り組んでいた。

⑤の課題では，面積を求めるときの条件として特徴を捉えるだけではなく，②の公式を「内接円の半径を求めるときに使用する」といったように,通常とは異なる視点から公式の特徴を捉えた解答も見受けられた。「幅広い視野をもって問題に取り組む姿勢を育む」という目標を達成できた手ごたえを感じた。

⑥の課題においては，今までであれば正弦定理や余弦定理，三角形の相互関係などを用いて計算に多くの時間を費やしていた生徒も，四つの公式をうまく活用して効率よく解答していた。

(2) 評価事例

生徒が取り組んだワークシートの評価としては，前述したルーブリック（評価基準表）に基づき評価を行った。

ア　①～④のワークシートに関する評価

①～④のワークシートに関する評価をルーブリックに掲げたそれぞれの観点から，同一内容で評価しようとしたが，以下の二つの問題が生じることとなった。

一つ目の問題は，①～④に関する評価において[各自で考えた解答]と[グループで考えた解答]のどちらを評価するかということである。グループ学習以前に正答を導いた生徒もいれば，グループ学習

で理解度を高めた結果，正答に至った生徒もいる。それらの評価をどのように得点差をつけて，採点するのかということが問題となったのである。

生徒個人の能力を評価すべきであることは当然であるが，グループ学習で行われた通常での授業では見ることができない生徒の数学に対する関心，意欲，積極性なども評価したいと考え，[各自で考えた解答]と[グループで考えた解答]のそれぞれにおいて採点し，合計得点で評価を行うものとした。この結果，より正確な評価を行うことができたが，全体の得点に対する①～④の課題の得点割合が47.6%から64.5%と高くなってしまい，他の課題での評価得点と差が開いてしまったことは反省としてあげられる。

また④の課題の評価において，①～③と同様のルーブリックでは評価が十分に行えないということが問題として浮上した。④のワークシートは，当初は①～③のワークシート同様，自由記述式のワークシートを予定していたが，内容的に本校生徒にとっては難しいと判断し，穴埋め形式のワークシートに急きょ変更した。したがって，①～③のルーブリックでは十分な評価を行うことができなった。そこで，以下のようなルーブリック（**資料５**）に変更をして評価を行った。

資料５　④のルーブリック改訂版

	知識・理解	数学的な技能			
	三平方の定理を理解しているか。	文字を含む整式の式変形を正しく行うことができているか。			
A3	三平方の定理を理解し，二つの三角形でともに正しく立式することができた。	A6	①，②から $4c^2y^2$ の式をつくり，因数分解することができた。	A6	$2s=a+b+c$ と置き換えることで，ヘロンの公式を正しく導くことができた。
B1	一つの三角形で三平方の定理を用いて，立式することができた。	B3	①，②から $4c^2y^2$ の式を作ることはできたが，因数分解には至っていない。	B3	$2s=a+b+c$ と置き換えることはできているが，解答にいたる途中の計算ミス等で，ヘロンの公式の形には至らなかった。
C0	白紙で解答に至っていない。	C0	白紙で解答に至っていない。	C0	白紙で解答に至っていない。

上記のルーブリックを使用することで明確な採点が可能となり，生徒の取り組みに対する評価を正しく行うことができたと考える。

イ　⑤のワークシートに関する評価

この設問に関しては，特に問題なくルーブリックの基準をもとに正しく評価することができた。

ウ　⑥のワークシートに関する評価

この設問に関しては，「考え方」「処理」の２観点についてルーブリックを作成し評価を行ったが，「表現」という観点についても加えておくべきであったと反省している。グループ学習などを通して，コミュニケーション能力を高めることを目的とし，効果が得られたように感じたが，数学の解答となると以前同様，以下の解答（**資料６**）のように数式の羅列のみの解答が目立った。

資料６　⑥のワークシート解答例

(1) $2\sqrt{14} = \frac{1}{2}\times 3\times 5\times \sin B$ ∴ $\sin B = \frac{4}{15}\sqrt{14}$

(2) $AC^2 = 3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos B$.

$\sin B = \frac{4\sqrt{14}}{15}$ より　$\cos B = \frac{1}{15}$ なので

$AC^2 = 9+25-30\times\frac{1}{15} = 32$.

$AC>0$ より　$AC = 4\sqrt{2}$

(3) $2\sqrt{14} = \frac{1}{2}r(3+5+4\sqrt{2})$.

∴ $r = \frac{4\sqrt{14}}{8+4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}+\sqrt{28}}{4-2} = \sqrt{14}+\sqrt{7}$

(4) $2\sqrt{14} = \frac{3\times 5\times 4\sqrt{2}}{4R}$ ∴ $R = \frac{60\sqrt{2}}{8\sqrt{14}} = \frac{15\sqrt{28}}{28} = \frac{30}{28}\sqrt{7} = \frac{15}{14}\sqrt{7}$

(5) $4\sqrt{14} = \frac{4\sqrt{2}\times AD^2}{4\times\frac{15}{14}\sqrt{7}}$ ∴ $AD^2 = 4\sqrt{14}\times\frac{4\times 15\sqrt{7}}{14\times 4\sqrt{2}}$ ∴ $AD = \sqrt{30}$

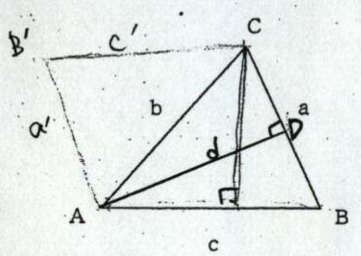
$= \frac{\sqrt{7}}{14}\times 60\sqrt{7}. = 30$

それらのことを正すためにも，⑥の評価こそ「表現」の観点に重きを置き，評価すべきであったと反省している。

以下に，実際の解答と評価事例（**資料７～11**）を挙げる。

資料７　パフォーマンス課題①解答例及び評価

【公式】　$S = \frac{1}{2}\,b\cdot c\cdot \sin A$



垂線AD = dとする

【各自で考えた解答】点Aから辺BCにおろした垂線の足をDとすると，△ADC∽△ADBができる。

よって△ADBの面積は $\frac{a}{2}\times d = \frac{ad}{2}$

△ADC：$\frac{a}{2}\times d = \frac{ad}{2}$

【グループで考えた解答】

点Cから辺ABにおろした垂線の足をDとすると，

$b\sin A = CD$　となる．

よって $S = \frac{1}{2}c\cdot CD$

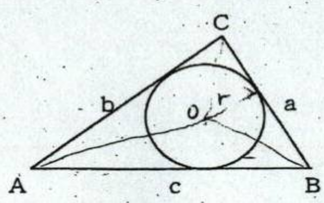
$= \frac{1}{2}cb\sin A$

$= \frac{1}{2}bc\sin A$

この解答の評価は，［各自で考えた解答］においては，考え方１点，処理１点，表現３点とした。底辺と高さが必要となることを考え，頂点から垂線を下ろしたところを評価して，考え方で１点の得点を与えた。また式のみを羅列したのではなく，説明文をしっかりと書いている所を評価して，表現で３点を与えた。［グループで考えた解答］においては，それぞれの項目で５点満点の得点とした。

資料８　パフォーマンス課題②解答例及び評価

【公式】　$S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(a+b+c)$



【各自で考えた解答】

内接円の中心をOとする

△AOBにおいて底辺c高さrより

△BOCにおいて底辺a高さrより

【グループで考えた解答】

内接円の中心をOとする

△AOBにおいて底辺c 高さrより 面積S_1は

$S_1=\frac{1}{2}cr$

△BOCにおいて底辺a高さrより面積S_2は

$S_2=\frac{1}{2}ar$

△COAにおいて底辺b 高さrより 面積S_3は

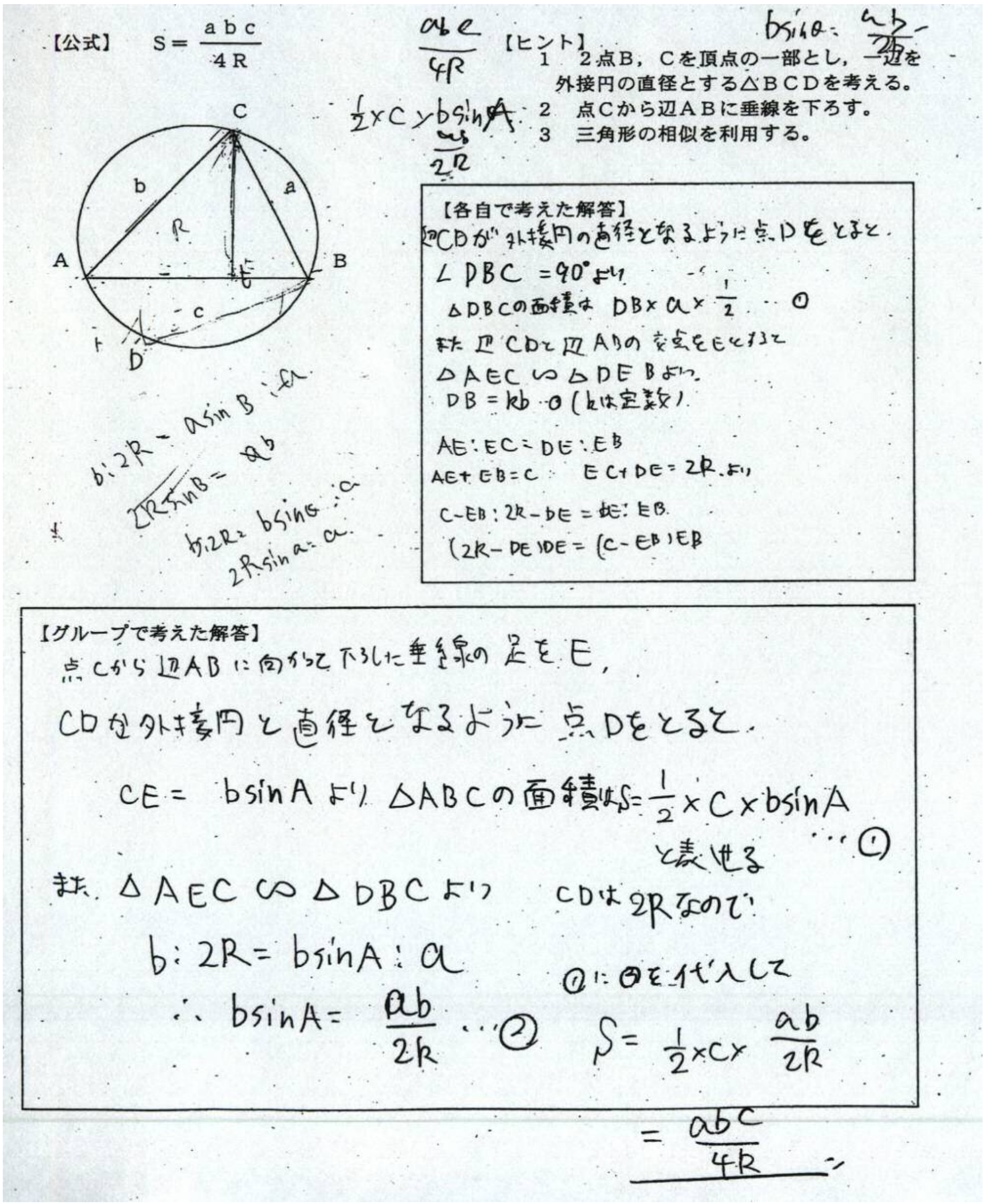
$S_3=\frac{1}{2}br$

よって

$S=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

この解答の評価は，［各自で考えた解答］においては，考え方３点，処理１点，表現３点とした。△ＡＢＣを三つの三角形に分けて考えるという方向性は理解していると考え，考え方は３点，そのうちの二つの三角形の底辺及び高さを理解しているところを評価して処理１点，表現も内接円の中心などの表記があるところから３点とした。［グループで考えた解答］においては，考え方５点，処理５点，表現３点とした。表現で２点減点した理由は，中心Ｏから内接円と辺の接点へ引いた線分は辺と垂直になるという表記がなかったためである。

資料９　パフォーマンス課題③解答例及び評価


【公式】　$S=\dfrac{abc}{4R}$

【ヒント】
1　２点Ｂ，Ｃを頂点の一部とし，一辺を外接円の直径とする△ＢＣＤを考える。
2　点Ｃから辺ＡＢに垂線を下ろす。
3　三角形の相似を利用する。

【各自で考えた解答】
辺CDが外接円の直径となるように点Dをとると
$\angle DBC=90°$より
$\triangle DBC$の面積は $DB\times a\times\frac{1}{2}$ …①
また辺CDと辺ABの交点をEとすると
$\triangle AEC \backsim \triangle DEB$より
$DB=kb$ …②（kは定数）
$AE:EC=DE:EB$
$AE+EB=c$　$EC+DE=2R$より
$c-EB:2R-DE=DE:EB$
$(2R-DE)DE=(c-EB)EB$

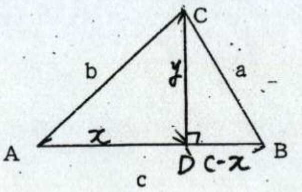
【グループで考えた解答】
点Cから辺ABに向かって下ろした垂線の足をE，
CDが外接円と直径となるように点Dをとると．
$CE=b\sin A$より$\triangle ABC$の面積はS$=\frac{1}{2}\times c\times b\sin A$と表せる …①
また，$\triangle AEC \backsim \triangle DBC$より　CDは2Rなので
$b:2R=b\sin A:a$
$\therefore b\sin A=\dfrac{ab}{2R}$ …②
①に②を代入して
$S=\frac{1}{2}\times c\times\dfrac{ab}{2R}$
$=\dfrac{abc}{4R}$

この解答の評価は，［各自で考えた解答］においては，考え方３点，処理１点，表現３点とした。この解答をした生徒には「相似を利用する」というヒントのみを与え，解答に臨ませたが，底辺や高さとは直接関係のない三角形の相似を考え解答を進めたため，正答には至らなかった。しかし，ルーブリックに「関心・意欲・態度」の観点があれば高く評価されたであろう。

［グループで考えた解答］においては，考え方５点，処理３点，表現３点とした。処理及び表現で２点減点した理由は，①の公式に変形する必要はないにもかかわらず変形している点，三角形の相似条件が表記されていない点から減点することとした。

資料 10　パフォーマンス課題④解答例及び評価

【公式】　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　ただし，$2s=a+b+c$



$$\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c}=b^2-y^2$$

【解答】

点Cから辺ABに垂線を下ろし，その足をD，またAD＝x，CD＝yとする。 $y^2=b^2-x^2$

△ACDで三平方の定理より　$b^2=\boxed{x^2+y^2}$　$\therefore x^2=\boxed{b^2-y^2}$　…①

また，△BCDで三平方の定理より　$a^2=\boxed{(c-x)^2+y^2}$　$a^2=c^2-2xc+x^2+y^2$

$\therefore x^2=\boxed{a^2-c^2-y^2+2xc}$　…②

$b^2-y^2=a^2-c^2-y^2+2xc$

①，②より x^2 を消去すると　$x=\boxed{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}}$

$b^2=a^2-c^2+2xc$

$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}=x$

これを①に代入して　$y^2=\boxed{b^2-\dfrac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}}$

$\therefore 4c^2\cdot y^2=4c^2b^2-(\boxed{b^2+c^2-a^2})^2$

$=\{2bc+(\boxed{b^2+c^2-a^2})\}\{2bc-(\boxed{b^2+c^2-a^2})\}$

$=-\{a^2-(\boxed{b+c})^2\}\{a^2-(\boxed{b-c})^2\}$

$=(\boxed{b+c-a})(\boxed{b+c+a})(\boxed{a-b+c})(\boxed{a+b-c})$

ここで $2s=a+b+c$ とすると

$4c^2\cdot y^2=2s(\boxed{2s-2a})(\boxed{2s-2b})(\boxed{2s-2c})$

$\therefore c\cdot y=\boxed{\sqrt{4s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

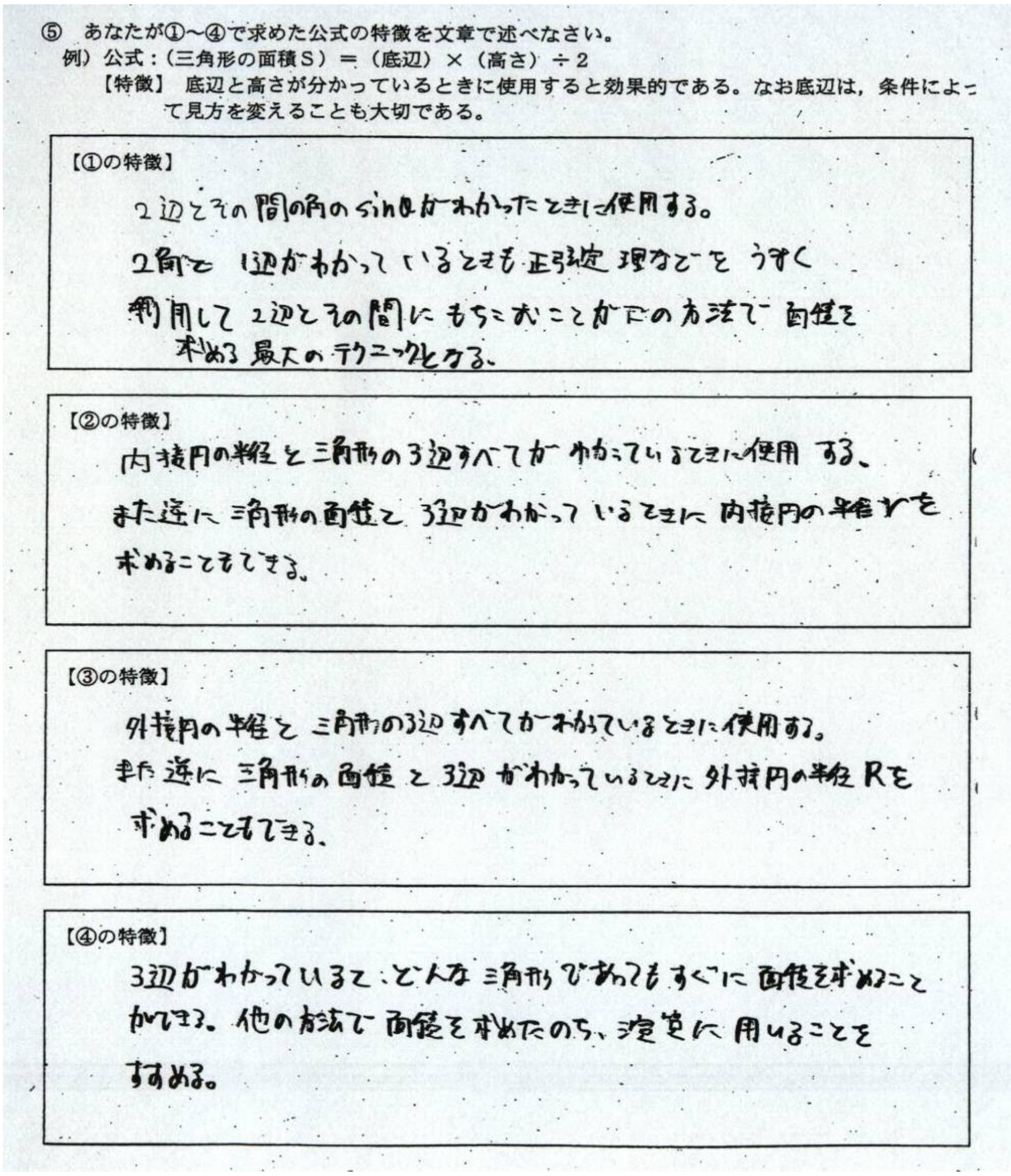
よって

$S=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot y=\boxed{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

パフォーマンス課題④は穴埋め形式のため，［各自で考えた解答］と［グループで考えた解答］との区別をつけるため，各自での解答終了後，自分で解答をした部分にアンダーラインを引くことで評価しやすいようにした。

この解答の評価としては［各自で考えた解答］においては，「知識・理解」３点，「数学的な技能」０点とした。多くの文字を含む計算になると，どの文字について整理していけばよいのかが分からなくなるという，本校に多く見られる課題がこの解答からも見受けられた。しかし［グループで考えた解答］においては，「知識・理解」及び「数学的な技能」ともに満点をつけた。グループ学習においては，友人と式変形を確認し合いながら解答をつくる姿勢が見受けられ，公式を正しく導けた際にはグループ一同歓声が上がっていた。

資料 11　パフォーマンス課題⑤解答例及び評価


⑤　あなたが①～④で求めた公式の特徴を文章で述べなさい。
例）公式：（三角形の面積Ｓ）＝（底辺）×（高さ）÷２
【特徴】　底辺と高さが分かっているときに使用すると効果的である。なお底辺は，条件によって見方を変えることも大切である。

【①の特徴】
2辺とその間の角のsinθがわかったときに使用する。
2角と1辺がわかっているときも正弦定理などをうまく
利用して2辺とその間にもちこむことが下の方法で面積を
求める最大のテクニックとなる。

【②の特徴】
内接円の半径と三角形の3辺すべてがわかっているときに使用する。
また逆に三角形の面積と3辺がわかっているときに内接円の半径rを
求めることもできる。

【③の特徴】
外接円の半径と三角形の3辺すべてがわかっているときに使用する。
また逆に三角形の面積と3辺がわかっているときに外接円の半径Rを
求めることもできる。

【④の特徴】
3辺がわかっているとき、どんな三角形であってもすぐに面積を求めること
ができる。他の方法で面積を求めたのち、逆算に用いることを
すすめる。

この解答の評価は，［各自で考えた解答］においては，①～③の特徴では「関心・意欲・態度」「考え方」「表現」の３観点とも満点をつけた。しかし，④の特徴では，単一的な特徴の捉え方しかできていないと判断し，「考え方」の観点では２点減点の１点とした。

しかしながら，演習問題等でそれぞれの公式がどのように使用されるかというポイントを押さえており，「関心・意欲・態度」の観点では満点の３点を超える得点を与えたいと感じた。

(3)　まとめと今後の課題

今回は三角形の面積の公式を導く考察を通して，言語活動の充実を図り，幅広い視野をもって問題に取り組むことができる能力を育むことをねらいとして授業を行った。

アンケート結果から，グループ学習を通してコミュニケーション能力の必要性を生徒が多少なりとも感じ取ったことは，以下の回答（**資料 12**）からもうかがえる。

資料 12　授業アンケート５の回答事例①

グループの時間が少し短いと感じました。
もんもんとして時間をかけてとけた時はうれしかったです。
とけなかったときに話し合ってわかったときもすっきりしました。
難しかったでした。

また，物事の本質を理解した上で取り組むことの重要性についても，以下のアンケートの回答(資料13)からも生徒に伝わったようである。

資料 13　授業アンケート５の回答事例②

公式を暗記するだけで終わっていた数学が、公式を作る段階で理解
することによって、さらに理解が深まり、とても分かりやすくなった。
また、今回は図形の問題だったので、これからの図形の問題が解きやすくなった
と思います。

普段の数学の勉強では習った公式を使って解いていたけど
公式の成り立ちは考えたことがなかったので公式の考え方を理解する
ことが大切だと分かった。

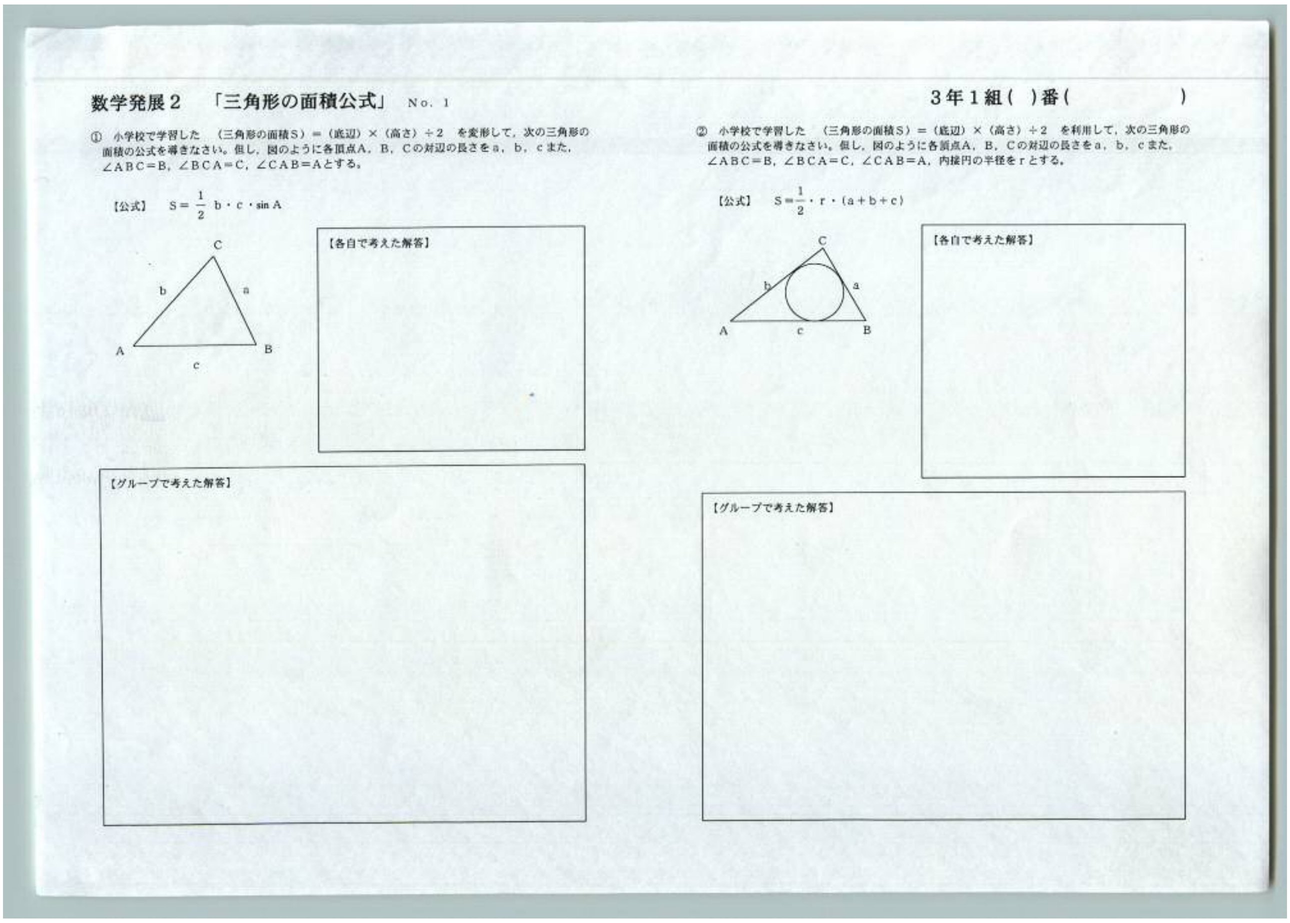
また，「考える力が身に付いたと思いますか」という問いについては，「そう思う」「まあそう思う」と全員が回答している。本校生徒にとって，授業時間内にこのような学習形態を取り入れることは，効果のある形態であることが判明した。

ふだんでは評価しにくい「関心・意欲・態度」「数学的な見方や考え方」を，ワークシートに書かれた解答でルーブリックを基に評価していったが，評価基準となるルーブリックの作成に思いの外時間を費やすこととなった。「各設問における評価の観点をどのように設定することが，本校生徒に適しているのか」ということから始まり、「設定した観点をより評価しやすくするためのワークシートの変更」などを繰り返し行った。最終的には前述したワークシート及びルーブリックに落ち着いたが，率直な感想としては，今回のように教員一人が担当し単独クラスで実施できるような場合は，大まかなルーブリックを作成した後，生徒の解答を一度評価した上で，再度ルーブリックを改定し最終的な評価を行う方が，授業進度や生徒の能力に的確に合わせることができ，より正確に評価できるのではないかと思われる。

しかし，多くの教員で分担し授業を行う場合や，さまざまな生徒に対して同一のパフォーマンス課題を実施する場合は，事前に的確な評価基準を定めておく必要があり，かなり綿密な打ち合わせが必要となる。

今後継続してこの取組を行うのであれば，複数の学校で同一のパフォーマンス課題でワークシート及びルーブリックを作成し，評価の在り方を研究したい。

資料 14　ワークシート



数学発展２　「三角形の面積公式」　No. 1　　　　３年１組（　）番（　　　　　）

① 小学校で学習した　（三角形の面積S）＝（底辺）×（高さ）÷２　を変形して，次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し，図のように各頂点A，B，Cの対辺の長さをa，b，cまた，∠ABC＝B，∠BCA＝C，∠CAB＝Aとする。

【公式】　$S=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A$

【各自で考えた解答】

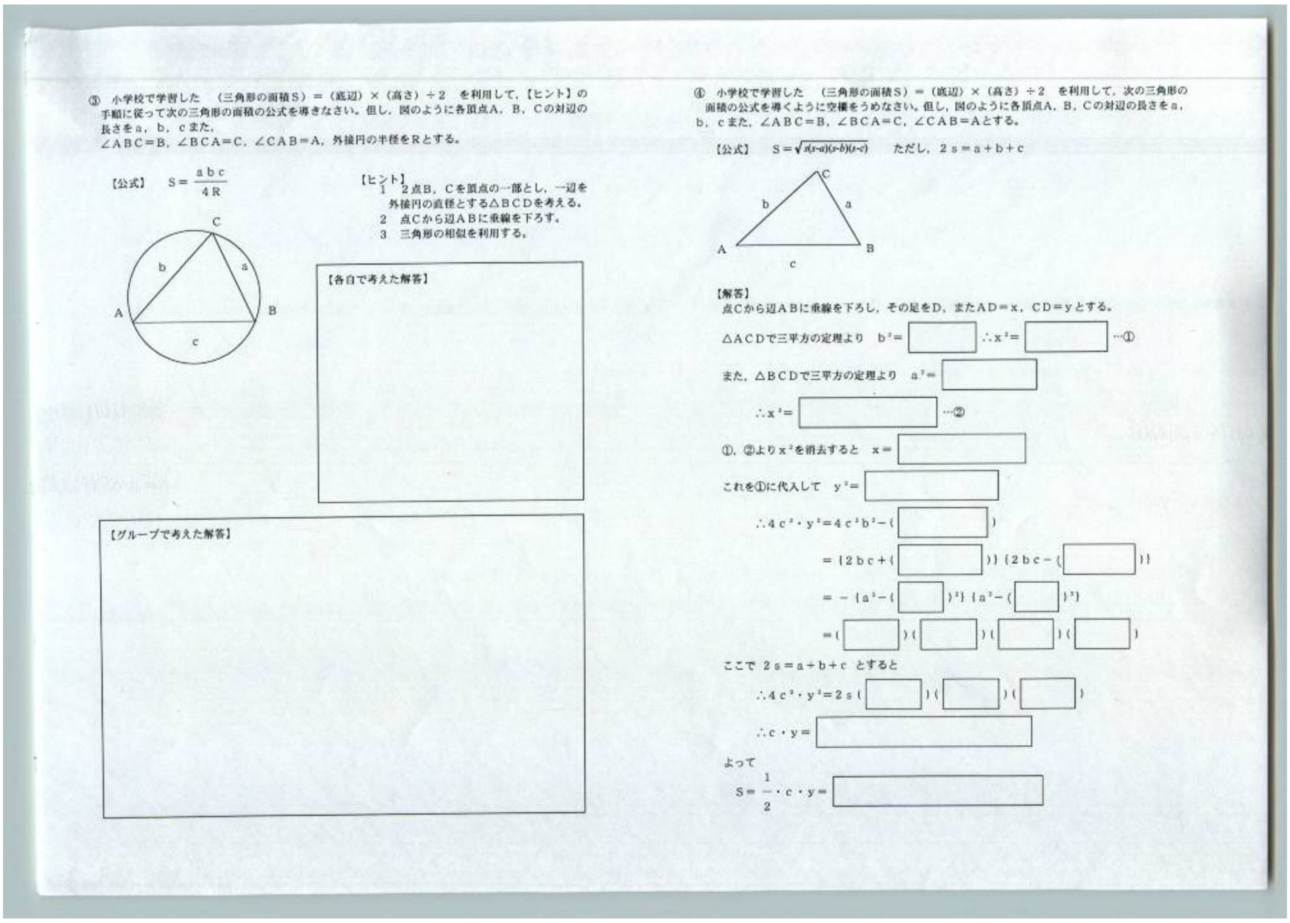
【グループで考えた解答】

② 小学校で学習した　（三角形の面積S）＝（底辺）×（高さ）÷２　を利用して，次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し，図のように各頂点A，B，Cの対辺の長さをa，b，cまた，∠ABC＝B，∠BCA＝C，∠CAB＝A，内接円の半径をrとする。

【公式】　$S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(a+b+c)$

【各自で考えた解答】

【グループで考えた解答】



③ 小学校で学習した　（三角形の面積S）＝（底辺）×（高さ）÷２　を利用して，【ヒント】の手順に従って次の三角形の面積の公式を導きなさい。但し，図のように各頂点A，B，Cの対辺の長さをa，b，cまた，
∠ABC＝B，∠BCA＝C，∠CAB＝A，外接円の半径をRとする。

【公式】　$S=\frac{abc}{4R}$

【ヒント】
1　2点B，Cを頂点の一部とし，一辺を外接円の直径とする△BCDを考える。
2　点Cから辺ABに垂線を下ろす。
3　三角形の相似を利用する。

【各自で考えた解答】

【グループで考えた解答】

④ 小学校で学習した　（三角形の面積S）＝（底辺）×（高さ）÷２　を利用して，次の三角形の面積の公式を導くように空欄をうめなさい。但し，図のように各頂点A，B，Cの対辺の長さをa，b，cまた，∠ABC＝B，∠BCA＝C，∠CAB＝Aとする。

【公式】　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　ただし，$2s=a+b+c$

【解答】
点Cから辺ABに垂線を下ろし，その足をD，またAD＝x，CD＝yとする。

△ACDで三平方の定理より　$b^2=\boxed{\quad}$　$\therefore x^2=\boxed{\quad}$　…①

また，△BCDで三平方の定理より　$a^2=\boxed{\quad}$

$\therefore x^2=\boxed{\quad}$　…②

①，②よりx^2を消去すると　$x=\boxed{\quad}$

これを①に代入して　$y^2=\boxed{\quad}$

$\therefore 4c^2\cdot y^2=4c^2b^2-(\boxed{\quad})$

$=\{2bc+(\boxed{\quad})\}\{2bc-(\boxed{\quad})\}$

$=-\{a^2-(\boxed{\quad})^2\}\{a^2-(\boxed{\quad})^2\}$

$=(\boxed{\quad})(\boxed{\quad})(\boxed{\quad})(\boxed{\quad})$

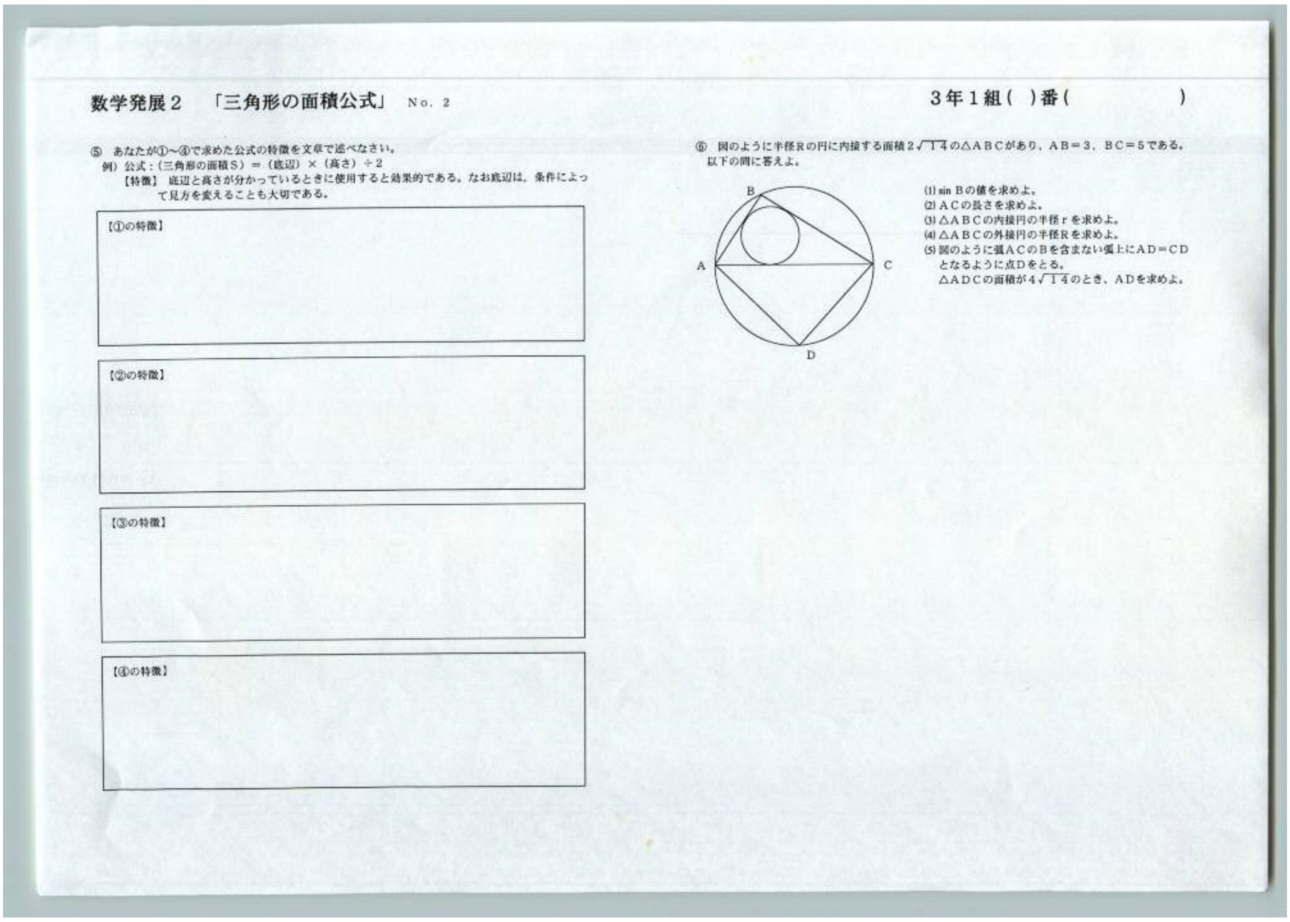
ここで　$2s=a+b+c$　とすると

$\therefore 4c^2\cdot y^2=2s(\boxed{\quad})(\boxed{\quad})(\boxed{\quad})$

$\therefore c\cdot y=\boxed{\quad}$

よって

$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot y=\boxed{\quad}$



数学発展２　「三角形の面積公式」 No. 2　　　　３年１組（　）番（　　　　　）

⑤ あなたが①～④で求めた公式の特徴を文章で述べなさい。
例）公式：（三角形の面積Ｓ）＝（底辺）×（高さ）÷２
【特徴】 底辺と高さが分かっているときに使用すると効果的である。なお底辺は，条件によって見方を変えることも大切である。

【①の特徴】

【②の特徴】

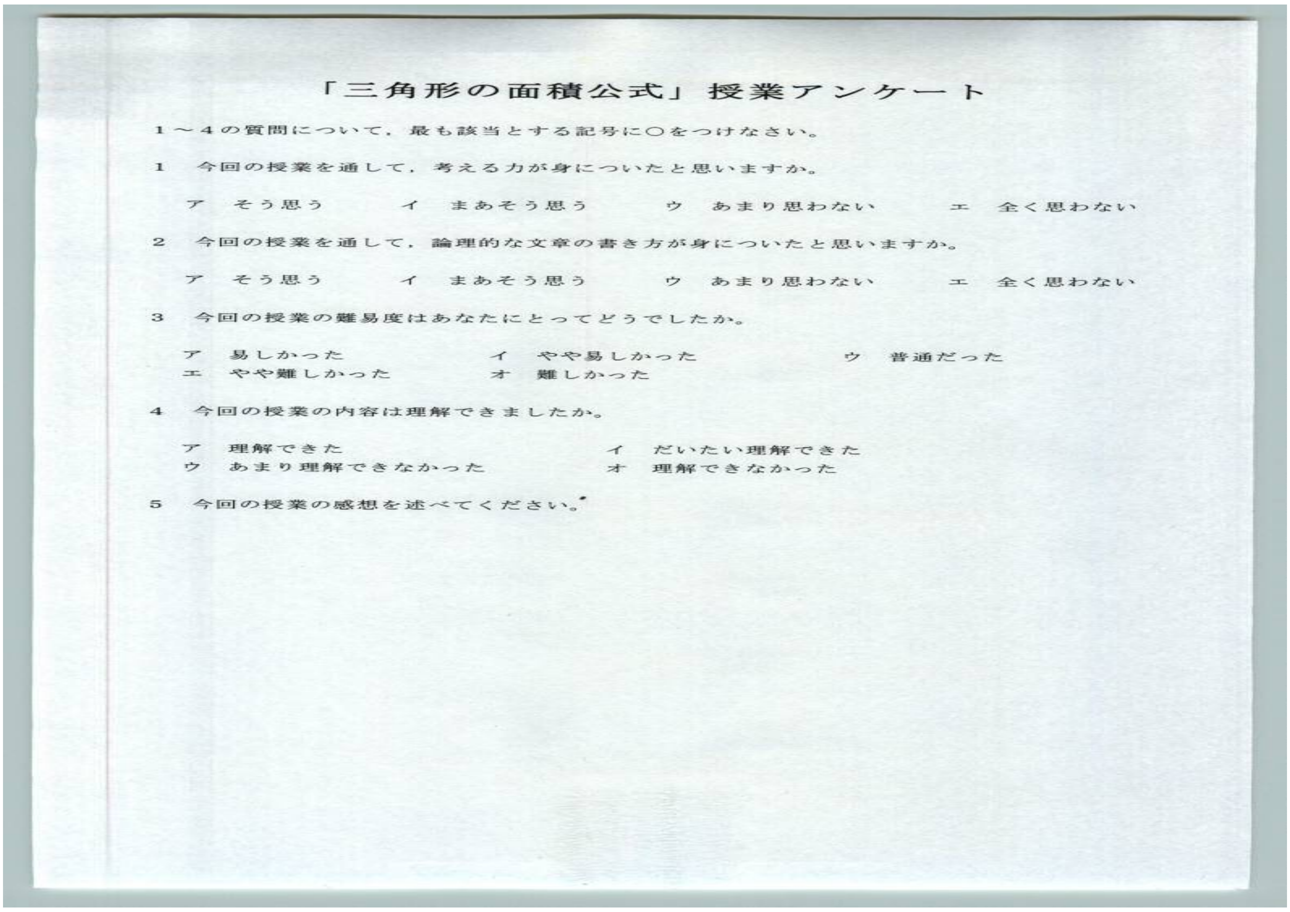
【③の特徴】

【④の特徴】

⑥ 図のように半径Ｒの円に内接する面積$2\sqrt{14}$の△ＡＢＣがあり，ＡＢ＝３，ＢＣ＝５である。以下の問に答えよ。

(1) sin Ｂの値を求めよ。
(2) ＡＣの長さを求めよ。
(3) △ＡＢＣの内接円の半径ｒを求めよ。
(4) △ＡＢＣの外接円の半径Ｒを求めよ。
(5) 図のように弧ＡＣのＢを含まない弧上にＡＤ＝ＣＤとなるように点Ｄをとる。
△ＡＤＣの面積が$4\sqrt{14}$のとき，ＡＤを求めよ。

資料 15　授業アンケート



「三角形の面積公式」授業アンケート

１～４の質問について，最も該当とする記号に○をつけなさい。

１　今回の授業を通して，考える力が身についたと思いますか。

ア　そう思う　イ　まあそう思う　ウ　あまり思わない　エ　全く思わない

２　今回の授業を通して，論理的な文章の書き方が身についたと思いますか。

ア　そう思う　イ　まあそう思う　ウ　あまり思わない　エ　全く思わない

３　今回の授業の難易度はあなたにとってどうでしたか。

ア　易しかった　イ　やや易しかった　ウ　普通だった
エ　やや難しかった　オ　難しかった

４　今回の授業の内容は理解できましたか。

ア　理解できた　イ　だいたい理解できた
ウ　あまり理解できなかった　オ　理解できなかった

５　今回の授業の感想を述べてください。