

背理法の有用性と表現力の育成

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学 I ・集合と命題

(2) 単元の目標

命題と証明について理解し、それらの有用性を認識するとともに、事象を数学的に考察し、活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
<ul style="list-style-type: none"> 集合と命題に興味・関心をもち、問題解決に意欲的に取り組もうとする。 具体的な事象で論理に基づいた表現をしよう意識する。 対偶証明法や背理法などの証明方法を的確に利用しようとする。 	<ul style="list-style-type: none"> 集合に関する基本的な事項を理解し、いろいろな事象を論理的に考察し、分析・整理することができる。 数学の内容をより厳密に扱えるようになり、いろいろな事象や数学の概念を多面的・統合的に考察できる。 命題と証明についての数学的な見方や考え方を的確に活用できる。 	<ul style="list-style-type: none"> 集合の基本的な事項を図や表を使い表現し、的確に処理することができる。 命題の考え方をを用いて、事象を論理的に表現し、的確に処理することができる。 対偶証明法や背理法を的確に表現し、処理することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> 集合と命題について理解し、基本的な知識を身に付けている。 対偶証明法や背理法について、論理・概念を理解し、知識を身に付けている。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア 言語活動

物事を論理的に考え、図や言葉などを工夫しながら表現し、他者に伝えること。

イ 教材（課題）

思考力・判断力・表現力を評価する問題として、ワークシート（資料 1，資料 2）を提示する。

(5) 単元の指導計画

集合	1 時間
命題と条件	1 時間
命題とその逆・裏・対偶	1 時間
命題と証明	2 時間（パフォーマンス課題は最後の時間に実施）

(6) ルーブリック（評価基準表）

	関心・意欲・態度	考え方	表現
	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。

A 3	与えられた問題に対して、関心をもち、意欲的に取り組んでいる。グループ内での話し合いにも積極性が感じられる。	問題を正しく読み取り、論理的に考察することができている。背理法の証明について理解しており、仮定から矛盾を示すという方針を理解している。全ての場合を書き出して検討することができる。	背理法における仮定から矛盾を示すところまで、しっかりした論理展開ができている。全ての場合を書き出して、論理的に正しいものに絞り込むことができる。
B 2	与えられた問題に関心をもつが、他人からの意見を聞くにとどまり、自らは積極的に活動していない。	背理法の仮定の部分は分かっているが、矛盾を示すことが理解できていない。または、矛盾を示すために何をすればよいのかが捉えられていない。書き出す場合には、条件を満たす状況の把握ができていない。	背理法の証明において、仮定から先の見通しが不十分であり、正しい論理展開ができていない、あるいは、最終的な答えまで辿り着けていない。全ての場合を書き出したものの中から絞り込みを行っているが、答えだけなど、記述としては不十分である。
C 1	興味・関心を示さず、問題に取り組もうとしない。グループ内での話し合いに参加していない。	問題を正しく読み取ることができない。背理法の考え方を理解していない。あるいは、論理的な思考に至っていない。	背理法の仮定を理解できていない。問題文に合うような状況を書き出しきれていない。

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領 数学Ⅰ 3 内容と内容の取扱い」には、次のように示されている。

(1) ア (イ) 集合と命題に関する基本的な概念を理解し、それを事象の考察に活用すること。

本事例では、問題を解決するために論理的に考え、判断する力を養うこと、また、他者に理解してもらうために、読み手を意識して記述することや分かりやすく的確に説明することなど、表現力の育成にもつながることを目的の一つとしている。

(2) 言語活動の充実の工夫

○ 生徒の自力解決に基づき、根拠を明確にした説明を記述させるようにする。

まずは、自力で解決するための時間を確保し、各自の考えを自由に書かせる。その際、自己満足なものにならないように、結論に至った経緯が読み手に伝わるものであるかを意識して記述させる。

○ 生徒の誤答例を取り上げる。

問題を正しく読み取れていない場合や、論理的な思考がなされていない例があれば、それを取り上げて全体で共有する。

○ 話し合いの場を設け、意見交換をさせる。

3人～4人のグループで個々の考えを発表させ、考えを共有する。ヒントや新たな発想が生まれても、それぞれ自分の言葉で書かせ、読み手に伝わるような表現を工夫させる。また、ワークシートを使い、最終的には個人へフィードバックできるようにする。

○ これまでに学んできた分野との関連や有用性を感じさせ、議論につなげる。

背理法を用いて考えると簡潔に説明することができるが、個人やグループで十分考えさせる時間をとる。その上で、これまでに学習したものを使って考えることはできないか、また、問題文のどの部分がキーワードとなっているのかというヒントを出す。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

二つのクラスにおいて、50分授業の際に実施した。まずは問題①（資料1）について、個人で考えさせる時間を設けたが、半数ほどは手がかりがつかめずワークシートに何も書けないという状況であった。何か書けていたとしても、三人の配置図、赤・白などの言葉のみがほとんどであった。文章となっているものでも、根拠のない記述や文章を読み間違えているものばかりであった（例えば、瞳に映っている色を見た。目で合図をした。Cの色が分かるということは、AとBが赤でCが白。など）。この時点で背理法を使うことに気付き、ワークシートを埋められている生徒は一人もいなかった。

次に、一旦作業をやめさせ、誤答について触れた。合図などではなく、与えられた状況から問題解決ができるということなどを伝えた。また、問題文の中のキーワードはどこか、既習内容を使うとしたらどの分野なのかを考えながら論理展開をするよう促した。さらに、四人グループをつくり、その中で話し合いをさせた。誤答例やヒントを出したということもあったためか、どのグループも議論にはなっていた。

この時点においても、背理法を使うのではないかという意見は出ても、きちんと記述できている生徒はいなかった。そのため、問題①について背理法を使った模範解答を示し、問題②（資料2）のみを評価の対象とすることとした。問題①と同様に、まずは個人で考えさせ、次にグループで、最終的な考えは個人でという流れでワークシートを埋めながら進めさせた。問題①の解説の後ということもあり、背理法を使えばよいのではないかと考え、手を動かし始める生徒が多かった。

(2) 評価事例（具体的な評価物を載せながら）

別紙のようなワークシートと模範解答（資料1）から（資料2）を用意していたが、想像していた以上にさまざまな書き方があった。生徒の解答例（資料3）から（資料6）として、以下の四人の例を挙げる。

【解答例1】においては、最初に一人で考える段階から背理法の証明方法について理解できており、最終的な結論に至るまで論理的に的確に述べている（グループでの話し合いも、リーダーシップを発揮して活発な議論がなされていた）。

【解答例2】においては、背理法を理解し、最初の考えから最終的な考えまで、自分の言葉で整合性のある記述ができている。ただし、結論の部分は十分であるとは言えない（Aは赤であることまでは言えたが、三人とも赤であるということまでは言及できてはいない）。

【解答例3】においては、自分の意見はもっていなかったが、グループ内での話し合いから問題②も背理法を用いて論述できると分かり、最終的な考えを自分の言葉で述べている。背理法で矛盾を示すことは理解できているが、三人とも赤であるという結論の否定が間違っており、更に論理的な展開に至っていない。

【解答例4】においては、背理法を使うというところまでは理解できている。グループ内での話し合いでは、なぜ色が特定できるのかではなく、色が特定できる条件について考えようとしていた。方

向性としては間違っているが、議論は盛り上がっていた。また、最終的な考えでは、背理法の仮定はできているものの、矛盾を示すというところまでは理解できていない。

ルーブリック（評価基準表）により、下の表のような得点を付けた。

	関心・意欲・態度	考え方	表現	合計
解答例 1	3	3	3	9
解答例 2	3	3	2	8
解答例 3	2	2	1	5
解答例 4	3	1	2	6
全体の平均点	2.8	2.4	2.1	7.3

(3) まとめ（研究の成果）と今後の課題

以下は生徒の振り返りアンケート（感想のみ）を簡単にまとめた。

- ・ 結局、分かったような、分からなかったようなモヤモヤした感じです。
- ・ 頭は使ったけど、計算とかじゃない授業で楽しかった。
- ・ 相手に伝えて理解してもらおうということの大変さが分かった。グループの人に説明するだけで難しいので、書いたものを読んで分かってもらうのはもっと大変だと思う。
- ・ 背理法を勉強したときは実際何のためにあるのか分からなかったが、この問題を解いてみて役に立つことが分かった。
- ・ 授業があつという間で楽しかった。こういう授業をもっとやってほしい。
- ・ 背理法を勉強する前にやってもおもしろいと思う。

生徒の雰囲気としては、多くの生徒が楽しんで取り組んでいたように感じる。数学が得意な生徒が必ずしもできたわけではなく、ふだん数学を苦手とするような生徒も前向きに議論に参加していた。多くの教科書では「 $\sqrt{2}$ は無理数である」ことを証明するのに用いられる背理法であるが、それ自体を示して何の役に立つのかと考える生徒もいる。今回の取組においては、背理法を使うという方法を思いつかず、すべての場合の数を書き出してそれぞれ検討しようとする生徒の姿が見られたが、背理法の解説を聞いた時に「なるほど」と納得しうなずく姿が印象的であった。背理法の有用性を感じさせることで、授業で取り上げる内容が少しは身近なものになったのではないかと生徒の感想を見て感じた。日常にありがちな問題に対して、数学を使って解決できることを感じさせられれば、より数学を学ぶ意義を伝えられるのではないだろうか。今回は問題を与えて取り組ませたが、有用性について考えさせる手段の一つとして、背理法が使える場面について書かせてもよかったのではないと思う。

また、ふだんの生徒の学習を見ていると、答えを出すということに重点をおきがちである。すぐ解法パターンを覚えてそれに当てはめて答えを出そうとしたり、「この問題は、どの公式に代入したら解けますか」などと質問したりする生徒は少なくない。今回は、図や言葉を工夫して表現し他者に伝えるという取組をさせたが、予想以上にさまざまな記述が出た。自分の言葉で伝える工夫について、考えさせることができたと言える。数学は過程こそが大切で、それを伝える表現力を磨くことが重要だということを、少しでも実感させることができたと考える。題材を設定するのに苦労すると思われるが、今後の授業でも、数学の有用性を理解させ表現力を向上させられる取組を工夫していきたい。

資料1 模範解答1

【模範解答1】

【問題①】

A, B, C の3人の目の前には、赤い帽子2つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、いずれかの帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目を開けさせた。

そして、

「あなたの帽子の色はわかりますか？」と順にたずねた。

すると、

A：「分かりません」

B：「分かりません」

C：「分かりました」と答えた。

Cが被っていた帽子は何色ですか。また、帽子の色を言い当てることができた理由はなぜですか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

【その③ 最終的な考え】

Cが赤い帽子を被っていたと仮定する。

Aが分からなかったことから、Bは白い帽子を被っていることが決まる。

(もしBも赤なら、Aは自分は白だと答えるから。)

しかし、Bも分からないと答えることに矛盾する。

背理法により、Cの仮定が間違っていた。

つまり、Cは白い帽子を被っているということがいえる。

(1) 名前 ()

【模範解答2】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。
 3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。
 残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。
 そして、
 「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。
 自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」とたずねた。
 3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。
 3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

【その③ 最終的な考え】

Aが白い帽子を被っていたと仮定する。Aは次のように考えた。
 BにはAとCが見えている。Bは自分(B)の帽子が白だと考えているとすると、
 「少なくとも一人は赤である」ことから、
 Cはすぐに手を挙げるはずである。しかし、しばらく間があり、Cがすぐに手を挙げないことから、
 自分(B)は赤である、という判断ができるはずである。
 しかし、Bがしばらく手を挙げないことに矛盾する。
 背理法により、Aの仮定が間違っていた、つまり、自分(A)は赤い帽子を被っていると判断する。
 B, Cも同様に考え、同時に「自分は赤い帽子を被っている」という同じ結論に達した。

(1) 名前 ()

【解答例1】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

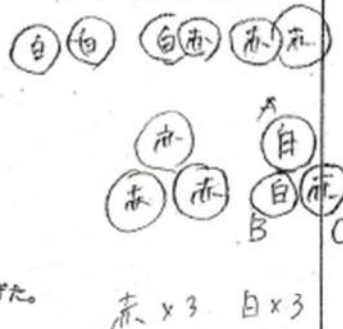
「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」

とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。



読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

- しばらくの間お互いを見回したということは誰かが手を上げるか上げないかの様子をわけていたということになる。
- 背理法で矛盾が生まれるということは誰かすぐに結論がでる人がいる。

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

／

【その③ 最終的な考え】

- 背理法を使う Aは白色の中帽子であると仮定する。Bは白だとするとCは自分は赤であると答えられるはず。でもCはすぐに手を上げないのでBは自分が赤だとわかる。しかしBは分かったとすぐに答えなかったので矛盾する。よってAは赤。BとCも同様に答え同じ結論に至ったもの。

(1) 名前 ()

【解答例2】

【問題②】

A, B, C の3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がある。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」

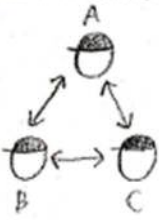
とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると感じたのでしょうか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】



$\ominus \rightarrow \ominus \ominus$ 「少なくとも1人は赤い」に矛盾
 A B C
 $\ominus \rightarrow \ominus \ominus$ 「しばらくの間お互いを見回す」に矛盾
 $\ominus \rightarrow \ominus \ominus$ 「しばらくの間お互いを見回す」に矛盾

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

本理法

【その③ 最終的な考え】

Aは白と仮定する。
 このとき、BとCが「白の場合、
 少なくとも1人は赤」ということに矛盾する。
 BとCが「白と赤だった場合、
 赤のほうはAともうひとりか」白とわかるため。
 自分が「赤だ」とすぐわかる。
 これはしばらくの間お互いを見回したことに矛盾する。

(1) 名前 ()

【解答例3】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」

とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

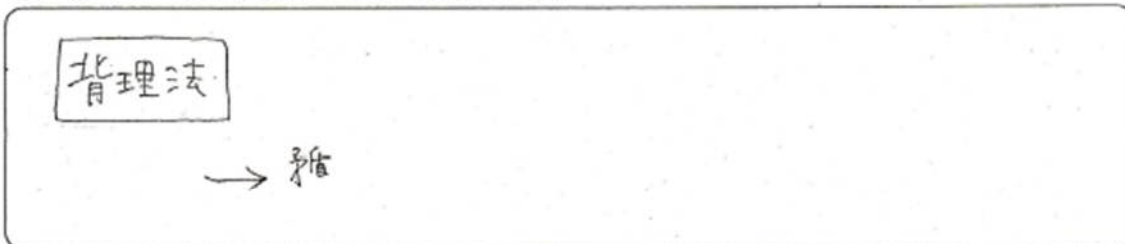
3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。

読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

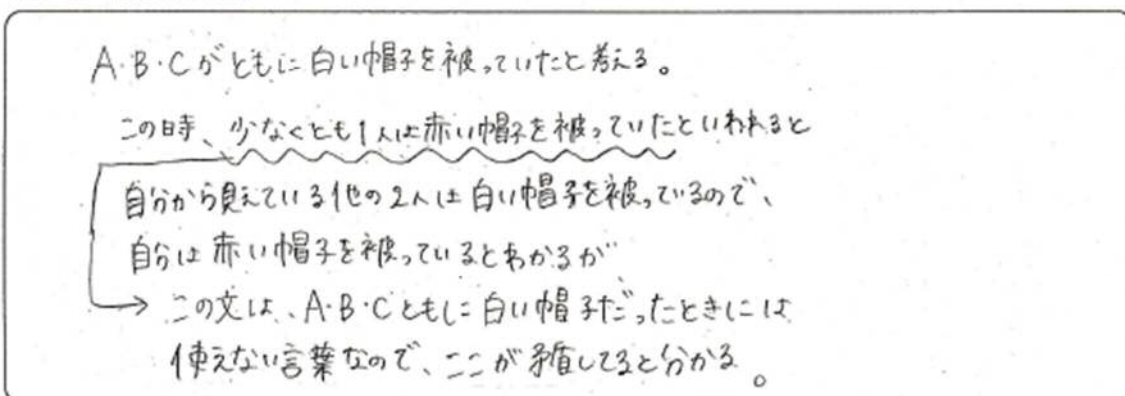
【その① まずは自分で考えてみよう】



【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】



【その③ 最終的な考え】



(1) 名前 ()

【解答例4】

【問題②】

A, B, Cの3人の目の前には、赤い帽子3つと白い帽子3つがある。

3人に目をつぶらせ、3人ともに赤い帽子を被らせた。

残った帽子を隠し、3人に目開けさせた。

そして、

「この中に、少なくとも1人は赤い帽子を被った人がいる。

自分が赤い帽子を被っていると思った人は、手を挙げて下さい」とたずねた。

とたずねた。

3人はしばらくの間お互いを見回した。同じ結論に達した3人は、同時に手を挙げた。

3人はなぜ、自分が赤い帽子を被っていると気づいたのでしょうか。



読み手に伝わるように、図や言葉などを使って説明しなさい。

【その① まずは自分で考えてみよう】

Aは白と仮定する

Bから見るとCが赤なので自分が赤と特定できない。

Cから見るとBが赤なので特定できない。

Aから見てもBとCが赤なので特定できない。

$$\frac{1}{9} \quad \frac{8}{9}$$

【その② グループ内の意見やヒントで参考になったこと】

自分が赤と特定できる条件、

① 他の2人が白である

② 他の2人が赤である why?

【その③ 最終的な考え】

Aは白と仮定する

Bが白の場合: Cが(赤)

Cが白の場合 Bが(赤)

BとCが赤の場合

(1) 名前 ()