

モンティ・ホール問題を考える

1 学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学A・場合の数と確率 ～条件付き確率～

(2) 単元の目標

条件付き確率の意味を理解し、さまざまな事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
・条件付き確率や確率の乗法定理の考えに興味・関心をもち、積極的に活用しようとする。	・条件付き確率や乗法定理を具体的な例から直感的に考え、考察することができる。	・条件付き確率を、記号を用いて表すことができる。 ・条件付き確率の式から確率の乗法定理の等式を導くことができる。	・確率の乗法定理を用いて二つの事象がともに起こる確率を求めることを身に付けている。 ・条件付き確率や確率の乗法定理を用いた確率の計算方法を身に付けている。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア 言語活動

- ・自分ならどうするかを考え、グループ内で発表や検証を行うこと。
- ・どちらが得かを考え、確率を活用して解決する課題として次の問題を提示する。

イ 教材（課題）

三つの箱があり、そのうち一つが当たりである。あなたは当たりの箱を選びたい。一つの箱を選んで開けようとする、主催者が残った二つの箱のうち、はずれの箱を開け、「箱を選び変えてもいいですが、どうしますか?」と言いました。さあ、あなたならどうしますか?

(5) 単元の指導計画（全3時間）

	学 習 活 動	言語活動に関する指導上の留意点
第1次 (1)	・条件付き確率について理解し、それを用いて実際の問題を解く。	・定義に基づいての計算だけではなく、感覚的にも理解できるよう、考え方をお互いに説明させる。
第2次 (2)	・条件付き確率や乗法定理が適用できる事象を考察し、それを利用して問題を解決する。	・自分ならどうするかを考えたり、実験の結果を踏まえながら生徒同士で議論したりする中で解決させる。

(6) ルーブリック (評価基準表)

質問①

	関心・意欲・態度
	数学の論理や体系に関心をもち、積極的に活用しているか。
5点	自分ならどうするかが確率の計算による根拠とともに書くことができる。
3点	自分ならどうするかが根拠とともに書くことができる。(1/2や1/3などの数値が書かれている)
2点	自分ならどうするかが根拠とともに書くことができる。(数値は書かれていない)
1点	自分ならどうするかが書かれているが、根拠が示されていない。もしくは、根拠になっていない。
0点	興味・関心を示さず、何も書いていない。

質問②

	表現
	方法や結果をきちんと説明・表現できているか。
5点	方法が具体的に書かれており、結果も表などを用いて、分かりやすく書かれている。さらに、推測(「変える」方が2倍当たりやすそうだ等)にも触れている。
3点	方法が具体的に書かれており、結果も表などを用いて、分かりやすく書くことができる。
1点	具体的ではないが方法や結果が書くことができる。
0点	やっていることを理解しておらず、説明できない。または説明におかしな点がある。

質問③

	考え方		処理
	数学的に筋道立てた考え方をしているか。		解法の手続きを正しく実行できているか。
5点	実験結果で回数の多かった方に行動すると書かれている。 箱Bを開けたときに箱Aが当たる確率と箱Cが当たる確率を求め、確率が大きい方を選べばいいことが書かれている。	5点	「変えない」確率が1/3で「変える」確率が2/3であることが導かれている。
2点	確率を求めればよいということが書かれている。	3点	条件付き確率を計算しようとしている。
1点	実験結果の意味を理解しており、回数の多かった方に行動すると書かれている。	1点	条件付き確率ではないが、何かしら確率を計算しようとしている。
0点	実験結果の意味が理解できておらず、行動が一致していない。	0点	確率の計算を全くしようとしていない。

2 解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

(1) イ (ウ) 条件付き確率の意味を理解し、簡単な場合について条件付き確率を求めること。また、それを事象の考察に活用すること。

本事例で取り上げる課題は、大方の生徒の予想とは異なる結果となることが多い。条件付き確率を事象の考察に活用することで、直感では誤解してしまうような事象の確率がしっかり解析できることを実感する。実際にグループで実験し、その結果を検証することで確率の有用性を認識する。また、箱の数を増やしたときを考えたりすることで、思考の過程や判断の根拠などを数学的に表現して説明する。なお、課題学習の意味合いも含む。

(2) 言語活動の充実の工夫

○ 生徒に自分ならどうするかを考えさせる。

問題の意味を理解させるためや問題に興味をもたせるため、実際に代表者に前に出てきてもらい、教員が主催者役になり実験を行う。また、感覚的には伝わっていると思うが、当たりの箱を選んだ場合、主催者は確率 $1/2$ で残りの箱の片方を開けるとする。これを数回実験する中で説明しておく。その後、生徒に自分ならどうするかを考えさせワークシート（質問①）を記入させる。

○ グループで実験する。

3～4名のグループで実験をする。各グループに例えば3枚のトランプ（ハートのAを当たりとするなど）などを渡し、主催者役とお客役を決め何回か実験させ（役割や方法、回数などは細かく指示せずグループごとの話し合いに任せる）、結果を導く。30回程度行えば「変えて」当たる回数が「変えない」で当たる回数の2倍くらいになり、グループによっては「変える」確率が $2/3$ なのではないかという結論が推測されるだろうと思われる。その後各個人で、方法や自分の役割、結果についてワークシート（質問②）に記入させる。

○ グループごとに結果の検証を行い、結論を導く。

グループで実験の結果を検証し、どう行動する（「変える」か「変えない」か）方がよいかを考える。また、結果が正しかったかどうか、また正しかったとしたらどうすればそれを他のグループの人に納得してもらえるかを考え、その方法を説明する。そして各個人でそれを踏まえて結局自分ならどうするかをワークシート（質問③）に記入させる。問題が漠然としていて考えにくいと思われるので、「3つの箱をA、B、Cとして、あなたは箱Aを選び、このとき主催者が箱Bを開けました。つまり、箱Aのままなら「変えない」、箱Cにすれば「変える」ということ」というヒントを与える。手をつけられない生徒が多い場合は、更に適宜ヒントを与える。計算ができるかどうかではなく、どういう計算をすればいいか等を書かせることを重視する。

○ 計算の確認、及び感覚を結果に近づける。

ワークシートを採点・評価し、返却した時（次の時間）に、ループリックの説明などと同時に、確率を求めればよいということ、条件付確率が使えらるということ、計算の方法などを説明する。

「変える」方の確率が2倍高いという結果に対して、感覚的になかなか納得できない生徒も多いだろう。そのため、箱を10個にした場合（主催者が選ばれなかった箱のうち外れの箱8個を開ける）で考えてみると、「変えた方が得だ！」という感覚になるだろうと考えられる。確率の有用性や、工夫して考えることで正確なことが分かるということを実感させ、日常の他の場面でも利用できるというであろう。

3 実践報告

(1) パフォーマンス課題の実施状況

1年3組の数学Aの分割授業（18名）1.5時間を使って行った。生徒たちは初めいつもの授業との違いに戸惑っているようだったが、グループ学習に入ってからはとても楽しそうに積極的に取り組んでいた。どのグループもコミュニケーションがとれ、活発な言語活動が行われており、グループごとに実験の仕方もさまざまだった。初めはただ「当たった」「外れた」と楽しんでいるだけだったが、実験を繰り返す中で、だんだん考えるようになり、「変える」「変えない」を交互に繰り返すグループや、何回かずつ「変える」「変えない」を行うことで、検証しようとするグループが出てきた。

右の（資料1）は実際の記録用紙の一部を載せたものである。上のグループは、お客役の人が毎回ランダム（本気で当てようとしている）にカードを引き、その結果をただ羅列していったものになっている。

一方、下のグループは一定回数「変える」「変えない」を行っているのが分かる。どちらのグループも最終的に「変えて」当たる回数が「変えない」で当たる回数の2倍にかなり近い結果になっていた。

ただ、「変えて」当たったときは、「変えない」で外れた訳だから、これを記録していくのが効率的だしよいことになる。しかし、実際にはこのことに気付いたグループはなく、どのグループも（資料1）の記録用紙のように「変えて」当たり、外れ、「変えない」で当たり、外れを4パターン記録していた。このことについては、大変残念だった。

また、ワークシートへの記入はどの生徒も真剣に一生懸命取り組んでいた。

当初はワークシートを採点・評価し、返却した時（次の時間）にやる予定であった箱10個の場合を最後に説明した。これにより感覚的に納得できた生徒が多かったようで、感想にもそのことが書いてあるものが多数あった。

(2) 評価結果について

質問②において、実験の方法等の説明と実験結果の説明・表現は一緒には評価できないことが分かったため、ループリックを別々に分けることにした。

資料1 実験の記録用紙

変えない	変えない	変える	変えない	変えない
0	X	X	0	0
変えない	変える	変えない	変える	変えない
X	0	0	X	X
変えない	変えない	変えない	変える	変える
X	X	X	X	0

1回目	変えない	2回目	
1	0	1	0
2	X	2	X
3	0	3	X
4	X	4	X
5	X	5	X
	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{5}$
			$\frac{3}{10}$
変える			
1	0	1	X
2	X	2	0
3	0	3	0
4	X	4	0
5	0	5	0
	$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$
			$\frac{7}{10}$

表 現			
	実験の方法等をきちんと説明できているか。		実験結果をきちんと説明・表現できているか。
5点	方法が具体的に文章で書かれている。	5点	結果が分かりやすく書かれている。または、推測（変える方が2倍）についても触れている。
3点	方法について書かれている。	3点	結果が数値を使って書かれている。
0点	やっていることを理解しておらず、説明できない。または説明におかしな点がある。	1点	結果は書かれているが、数値が書かれていない。
		0点	結果が書かれていない。

【質問①について】

5点	3点	2点	1点	0点
0人	9人	3人	6人	0人

3点だった生徒の解答は「変えても、変えなくても確率は $1/2$ だから」というものが多く、似たような内容でも数値が書かれていないものを2点とした。

次のものは3点をつけた解答である（資料2）。

資料2 実際の答案1

質問①
自分ならどうするかを書きなさい。なるべく根拠（そう考えた理由）を示すこと。

変えない

あたりもはずれも $\frac{1}{2}$ の確率だから。
たぶん

1点だったものには、資料3のように根拠になっていないものや、中には「変える」とだけ書いていたものもあった。予想よりも数値を使って、根拠を書いた生徒が多く、「確率」という言葉もよく使われていた。しかし、計算をしている解答（5点）はなかった。計算となるとなかなか難しいが、感覚的には確率というものを理解できているのだと思う。

資料3 実際の答案2

質問①
自分ならどうするかを書きなさい。なるべく根拠（そう考えた理由）を示すこと。

変えない

理由は一度決めたら変えたくないから

【質問②について】

実験の方法等の説明

5点	3点	0点
4人	14人	0人

実験の結果の説明

5点	3点	1点	0点
4人	10人	4人	0人

方法等の説明については、記述力や表現を見るところなので、文章で書かれているものを具体的に判断し5点とした。結果の説明については、行った回数や当たった回数などが書かれているものを3点以上とした。

次のものは5点をつけた解答である（資料4）。

資料4 実際の答案3

質問②
 実験について、方法やグループの中での自分の役割、結果を詳しく丁寧に説明してください。

変えるのと変えないのを川貝番にやってみて
 どちらの方が当たる確率が高いかをやってみた。

結果は 変える → 変えないの川貝をそれぞれ5回計10回やってみると
 変えるで当たった確率は $\frac{4}{5}$ 変えないで当たった確率は $\frac{2}{5}$ になった。（2倍）

次に 変えない → 変えるの川貝をそれぞれ7回計14回やってみると
 変えないで当たった確率 $\frac{1}{7}$ 、変えるで当たった確率 $\frac{5}{7}$ になった。
 2倍以上。

変えて当たった確率が、変えないで当たった確率の2倍になることが書かれている。

また、1点だったものには、（資料5）のように結果が詳しく分からないものが多かった。

資料5 実際の答案4

質問②
 実験について、方法やグループの中での自分の役割、結果を詳しく丁寧に説明してください。

選んだ
 変えないだとあたる確率は、低確率。
 変えるとあたる確率は、高確率。

【質問③について】

この質問は「変えない（箱Aのまま）、変えた（箱Cにした）ときの確率をそれぞれ計算してください」とすれば、質問の意味は分かりやすかったと思うが、「計算」をさせるのは厳しいと思い、説明させるだけにとどめた。その結果大変分かりにくい質問になってしまったと反省している。解答としては「実験が正しいかどうかを検証するには、箱A、箱Cを選んだときの（条件付き）確率を計算する。また、その結果確率の大きい方に行動すればいい」というような内容を期待した。生徒に取り組みませるときは、助言・説明もしたのだが、このような解答をした生徒はいなかった。したがって、全員が0～1点となってしまった。素直に「確率を計算してみましょう」とすれば書ける生徒がいたかもしれない。

(3) アンケート結果について

授業後に簡単なアンケートを実施し、本時の振り返りを行った。

1 課題内容は理解できましたか。				
理解できた	だいたい理解できた	あまり理解できなかった	理解できなかった	
10名	8名	0名	0名	
2 課題（授業）の難易度はあなたにとってどうでしたか。				
簡単だった	やや簡単だった	普通だった	やや難しかった	難しかった
0名	0名	3名	5名	10名
3 課題には意欲的に取り組むことができましたか。				
取り組めた	まあまあ取り組めた	あまり取り組めなかった	取り組めなかった	
13名	5名	0名	0名	
4 考える力（考えようとする力）が身についたと思いますか。				
そう思う	まあそう思う	あまり思わない	全く思わない	
1名	16名	1名	0名	

次は授業の感想等を自由記述で書かせた主なものである。

- ・ よく分かり、とても深かった。理解するのによく考えた。
- ・ 3個で考えると難しかったけど、10個で考えたら理解（納得）することができました。（似た内容10名）
- ・ 自分が感覚でそうだと思っても結果が違うこともあるから、これからはしっかり考えてみようと思いました。
- ・ 改めて数学のおもしろさを感じることができたと思います。
- ・ 楽しかったけど難しく、グループ内でも自分でもよく考えたと思います。
- ・ 「なるほど」と思えて楽しかったです。ちょっと難しいけど他にもそういう確率のものがあつたらやってみたいと思いました。
- ・ 最初はただの運だと思っていたけど、実験してみると数字として結果が出てきて、おもしろいと思った。
- ・ まさか変えた方が倍の確率だなんて思いませんでした。
- ・ いつもより頭を使って考える授業だったので、難しく感じました。
- ・ いつもは考えずに適当に当てたりするだけだったので、これからは少し考えたいと思います。個人で考えたり、班でコミュニケーションがとれたりしていたので、その辺りも良かったと思います。
- ・ 実験を踏まえて考えることはとても頭を使うけど、分かったときのおもしろさが多くあつても楽しかったです。

「考えてみよう」「よく考えた」「考える授業だった」「考えたいと思います」などが「考えた」という表現が多数あり、一生懸命考えて取り組んだ様子が分かる。このことについてはよかったのではないかと、パフォーマンス課題に取り組ませる意味があつたのではないかと思う。

(4) まとめ（研究の成果）と今後の課題

アンケート結果から課題内容が難しかったと答えた生徒が15名いるのに対し、課題内容は理解できたと答えた生徒が18名いた。「最初はあまり理解できなかったが、取り組むうちに少しずつ課題の内容が理解できた」と書いた生徒が複数おり、グループ学習が理解を助けたり、深めたりしたと思われる。これは言語活動が活発に行われた結果であると考ええる。

パフォーマンス課題に取り組ませるに当たり、課題の設定、特に生徒が多様な考えを書けるようにするにはどのような課題にすればよいか大変悩んだ。あまり課題の設定を細かくし過ぎると全員が同じ答えになってしまうのではないかと、漠然とした設問では何も書けなくなって白紙答案が増えてしまうのではないかと、などである。そこでまず考えたのは、とにかく生徒が興味をもって取り組める課題にするということであった。さらに、パフォーマンス課題を行う最大の目的である、関心・意欲・態度など定期考査では評価しにくい部分を評価できるようにしようと考え、計算を求めない課題とした。その結果、全員が「意欲的に取り組めた」「まあまあ意欲的に取り組めた」と答えており、成果があったと考える。当初は、白紙の答案が多く出るのではないかと心配したが、予想していたよりも一生懸命書こうとする生徒が多く、取組はとてもよいものであった。定期考査ではあまり点数が取れないような生徒でも、ある程度得点することができたのはよかった。しかし、説明がうまくできず、表現がおかしかったり、箇条書きや単語で書いたりする生徒もいた。本校ではふだんの問題演習やテストで途中の過程をきちんと記述できない生徒が多い。このようなパフォーマンス課題を定期的に行っていくことは、記述力を養うのに効果があると考ええる。

ループリックの作成については、どこまでできたら何点にするのか、どの項目の配点をどれくらいにするか、など大ざっぱに決めてしまい不十分な部分があった。先行研究にならって、ループリックの点数を5点、3点、1点とつけた。実際に評価を付けてみて感じたことは、点数化したり、各観点の点数を合計したりはしない方がよいのではないかとということである。各観点ごとの重みを考慮し、観点ごとの配点を変える方法をとるなら、合計をする意味があるが、今回の取組については、点数はつけず、項目ごとに何段階の何番目かを本人に知らせる方がよいのではないかと感じた。合計点がよかった、悪かったということで一喜一憂することは、パフォーマンス評価の目的に反する。どのような観点が今自分に足りないのか、どのような力を身に付ければよいのかを生徒自身が知ることが、このパフォーマンス評価の重要な目的である。次にループリックを作成するときには、このことを考慮して作成したい。

ループリックは、パフォーマンス課題の実施前に作成した。しかし、実際の生徒のワークシートを見ると、判断に迷うものが多数あり、評価の途中でループリックを修正しなければならなくなり、事前に作成することの難しさを実感した。ループリックを事前に作成することで、到達してほしいレベルが教員自身も明確になり、生徒がどこまで到達しているか、どのような観点が弱いのかを個々の生徒ごとに把握できる。それを実現するためには、より綿密なループリックの作成が必要である。

今回は、事前に生徒にループリックの提示をしなかった。理由は、解答が画一的になることを避けるためである。しかし、目標を明確にするという点では、事前に生徒にループリックを提示することも必要である。いずれにしても取り組ませ方や、評価の仕方、本人への知らせ方などまだまだ検討することは多い。

今後も、今回の反省を生かし、目指す生徒像を明確にして、どのような力が身に付いたか教員も生徒自身も把握できるパフォーマンス課題とループリックを作成し、より効果的な指導方法と評価方法を研究していきたい。