体積を微分すれば面積になる？

１　学習活動の概要

(1) 科目・単元名

数学Ⅲ・体積

(2) 単元の目標

積分の考え方について理解し，それらの有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
定積分を用いて，いろいろな関数で囲まれた図形の面積，回転体の体積や曲線の長さについて考察しようとする。	いろいろな関数で囲まれた図形の面積や，回転体の体積，曲線の長さについて考察することができる。	いろいろな関数で囲まれた図形の面積や，回転体の体積，曲線の長さを求めることができる。	定積分と面積，体積，曲線の長さの関係を理解している。

(4) 取り上げる言語活動と教材（課題）

ア　言語活動

半径 r の円の面積 πr^2 を r で微分すると， $2\pi r$ となり，円周の長さ公式になる。同様に半径 r の体積の公式 $\frac{4}{3}\pi r^3$ を r で微分すると $4\pi r^2$ となり，球の表面積の公式となる。

しかし，一辺の長さ x の立方体の体積 x^3 を x で微分しても表面積 $6x^2$ にはならない。その理由について考えさせる。

イ　教材（課題）

パフォーマンス課題は以下の３問である。

問１	半径 r 円の面積 πr^2 と周の長さ $2\pi r$ の間に成り立つ関係式を考えよう。またその関係式が成り立つ理由も考えよう。
問２	半径 r の球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ とその表面積 $4\pi r^2$ の間に成り立つ関係式を考えよう。またその関係式が成り立つ理由も考えよう。
問３	立方体の体積と表面積には問１，２のような関係はあるだろうか，その理由も含めて考えてみよう。

個々にワークシート（パフォーマンス課題）を与えて，まず問１を時間を決めて取り組ませる。その後解説し，続けて問２，問３に取り組ませる。その後プリントは回収及び優れた解答を印刷したものを生徒に配布する。

(5) 単元の指導計画

体積・・・・・・２時間

回転体の体積・・４時間（パフォーマンス課題は最後の時間に実施）

(6) ルーブリック（評価基準表）

評価	関心・意欲・態度	考え方	表現
	数学の理論や体系に関心をもち，積極的に活用しているか。	数学的に筋道立てた考え方をしているか。	考え方をきちんと説明・表現できているか。
A　3	問１において円の面積の式を半径 r で微分すると円周を表すことに気付いた。または，それ以外の円の面積と円周との関係に気付いた。	問１において半径 r の増加分 dr が十分小さいときその際の面積の増加分 dS は円周 $L(r)$ を用いて $dS = L(r)dr$ が成り立っていることを示した上で，$\frac{dS}{dr} = L(r)$ つまり $S'(r) = L(r)$ を示すことができた。またはこれに準ずる説明がなされた。	式の羅列にならず，必要な文章が書かれている。
B　2	問１では関係式に気付くことができなかったが，問２の球の体積の式を半径 r で微分すると表面積の式となることに気付いた。または，それ以外の球の体積と表面積の関係に気付いた。	問１はできなかったが，問２において半径 r の増加分 dr が十分小さいときであれば，その際の体積の増加分 dV は表面積 $S(r)$ を用いて $dV = S(r)dr$ が成り立っていることを示し，そこから $\frac{dV}{dr} = S(r)$ つまり $V'(r) = S(r)$ を示すことができた。またはこれに準ずる説明がなされた。	式の羅列になっており，必要な文章が書かれていない。
C　1	円の面積と円周との間に成り立つ関係式及び，球の体積と表面積との間に成り立つ関係式に気付くことができなかった。	意味のない計算。数学的操作が全く行われていない。	数学的表現がない。

２　解説

(1) 指導事例と学習指導要領との関連

「学習指導要領　数学Ⅲ　３内容」には次のように示されている。

> 積分法についての理解を深めるとともに，その有用性を認識し，事象の考察に活用できるようにする。

本事例では，微分・積分の考え方を理解することで，円の面積と長さ，球の体積と表面積の関係について考察させることを意図している。

(2) 言語活動の充実の工夫

パフォーマンス課題の評価を的確に行うため，自分の考えを記述させる欄と板書，他の生徒の発言をまとめる欄を分けた。これにより，自分の考えをもつこと，更に互いの考えを伝え合うことで，自分の考えや集団の考えを発展させることができると考えた。

３　実践報告

７月８日（火）７限目に３年９組にて実施した。まずパフォーマンス課題を配布し，本日の授業について説明した。その際,「自分の考え」と「板書，他の生徒の発言」についてはそれぞれの欄に記述するように伝えた。

問１に 10 分ほど各自で取り組ませた。その際他の生徒とは相談しないように伝える。10 分後，生徒にπr^2と$2\pi r$との関係式には何があるか発言を求めたが，手を挙げる者がいなかったため，指名し発言を求めた。最初の生徒がπr^2を r で微分すると$2\pi r$となることを発言し，次の生徒がを r で積分するとπr^2となることを発言した，その後何人か指名したが特に新しいものは出なかった。

次になぜそのような関係式が成り立つか説明を求めたが，ここでも手が挙がらなかったので指名すると，数名の「分かりません」という発言が続いた後，円の半径 r を 0 から r まで変化させて次々にその円の面積を足すと半径 r の円になるという趣旨の発言が出る。また，他の生徒からは円を放射線状に n 等分すると n 個の扇形ができる。その扇形は近似的に長辺の長さが r の２等辺三角形であり円周の長さをlとして，短辺の長さを dl とおくと扇形の面積は $\frac{1}{2}r\,dl$ となり，これを n 個足したものが円の面積になる。よって $\frac{1}{2}r\,dl\times n=\pi r^2$ が成り立ち，$dl\times n$ が円周を表わすので，円の面積と円周には関係があるとの趣旨の発言が出る。これらの発言内容に対し特に教員から評価することはしなかった。

次に問２に 10 分ほど取り組ませた。ここでも他の生徒との相談はしないように伝える。その後，指名し $\frac{4}{3}\pi r^3$ と $4\pi r^2$ との関係式について何があるか発言を求めると，$\frac{4}{3}\pi r^3$ を r で微分すると$4\pi r^2$となること，及び$4\pi r^2$を r で積分すると $\frac{4}{3}\pi r^3$ となることはすぐに出てきた。

なぜそうなるかについては，球の半径 r を 0 から r まで変化させて次々にその球の体積を足すと半径 r の球の体積になるという問１を踏襲した発言が出た。

ここまでで残り時間が 10 分を切っていたため，問３には進まず問１の簡単な解説を行った後，アンケートを配布，記入してもらい論証プリントとともに回収して授業を終えた。

次にパフォーマンス課題の評価に入るのであるが，授業において問３ができなかったため，評価基準の変更を余儀なくされた。その上で採点し評価を与えた。その結果，各評価基準の平均点は次のとおりである。

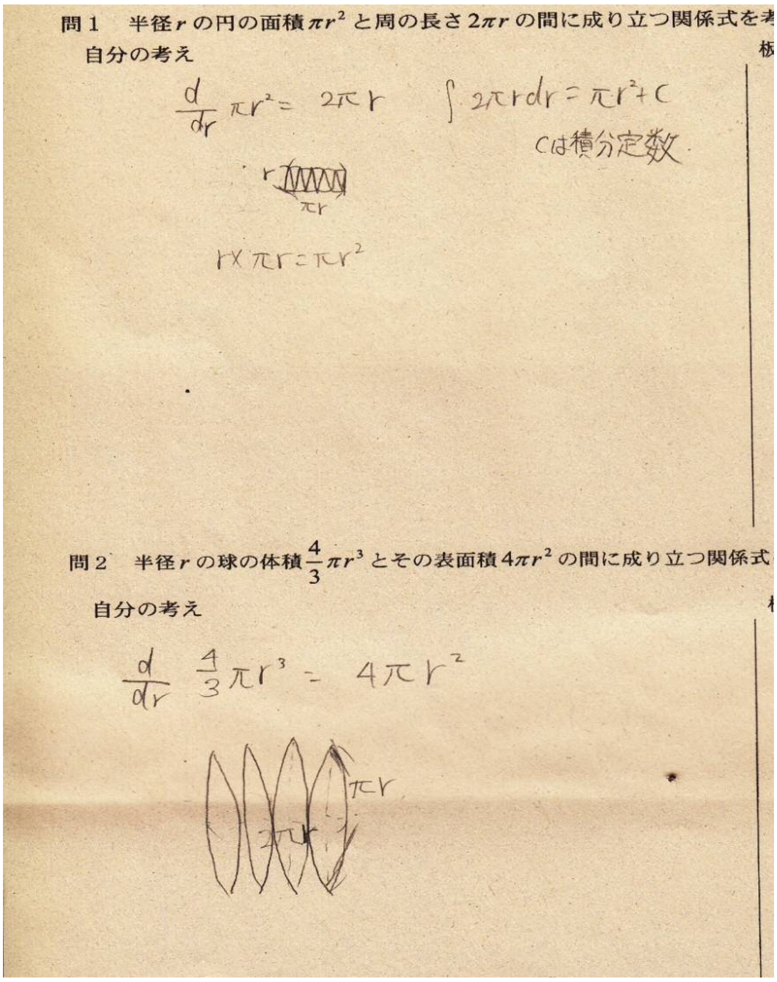
(1) 各評価基準の平均点

資料１　各評価基準の平均点

関心・意欲・態度 ３点満点	考え方 ３点満点	表現 ３点満点	合計 ９点満点
2.7	1.4	2.4	6.5

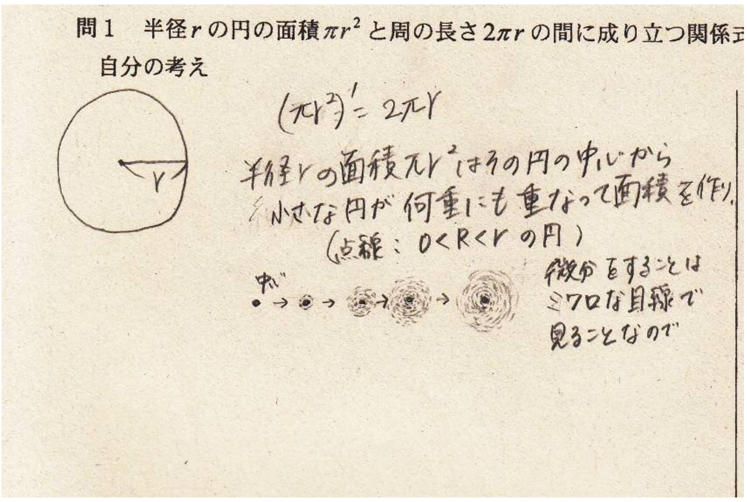
(2) 生徒のパフォーマンス課題の取組例と評価

資料２　生徒の取組例　考え方で１点だった生徒の例



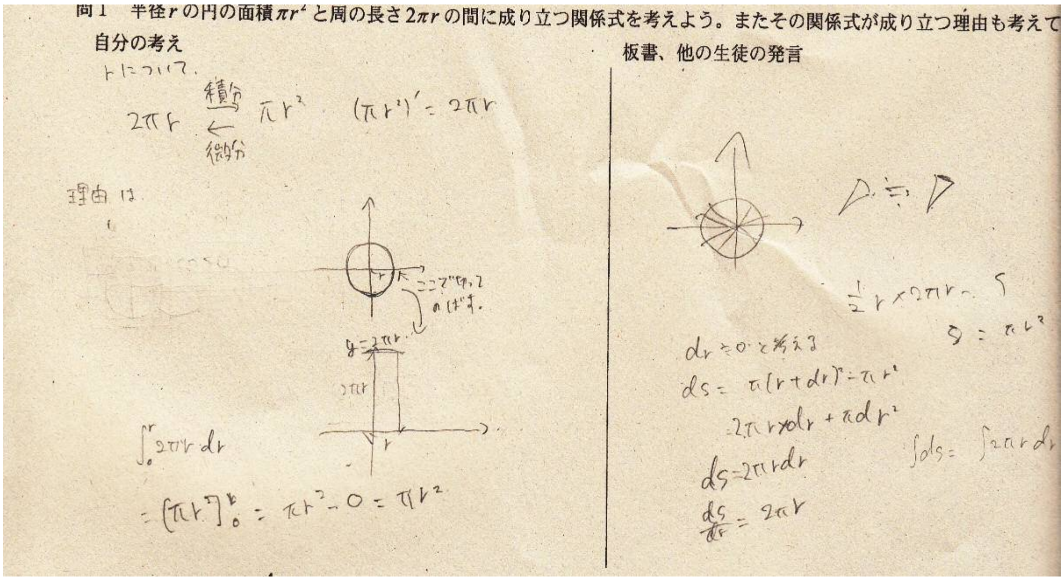
多くの生徒が，このように記述しており，微分，積分の関係には気付いたが，説明の仕方が分からなかったようである。

資料３　生徒の取組例　考え方で２点を与えた生徒の例



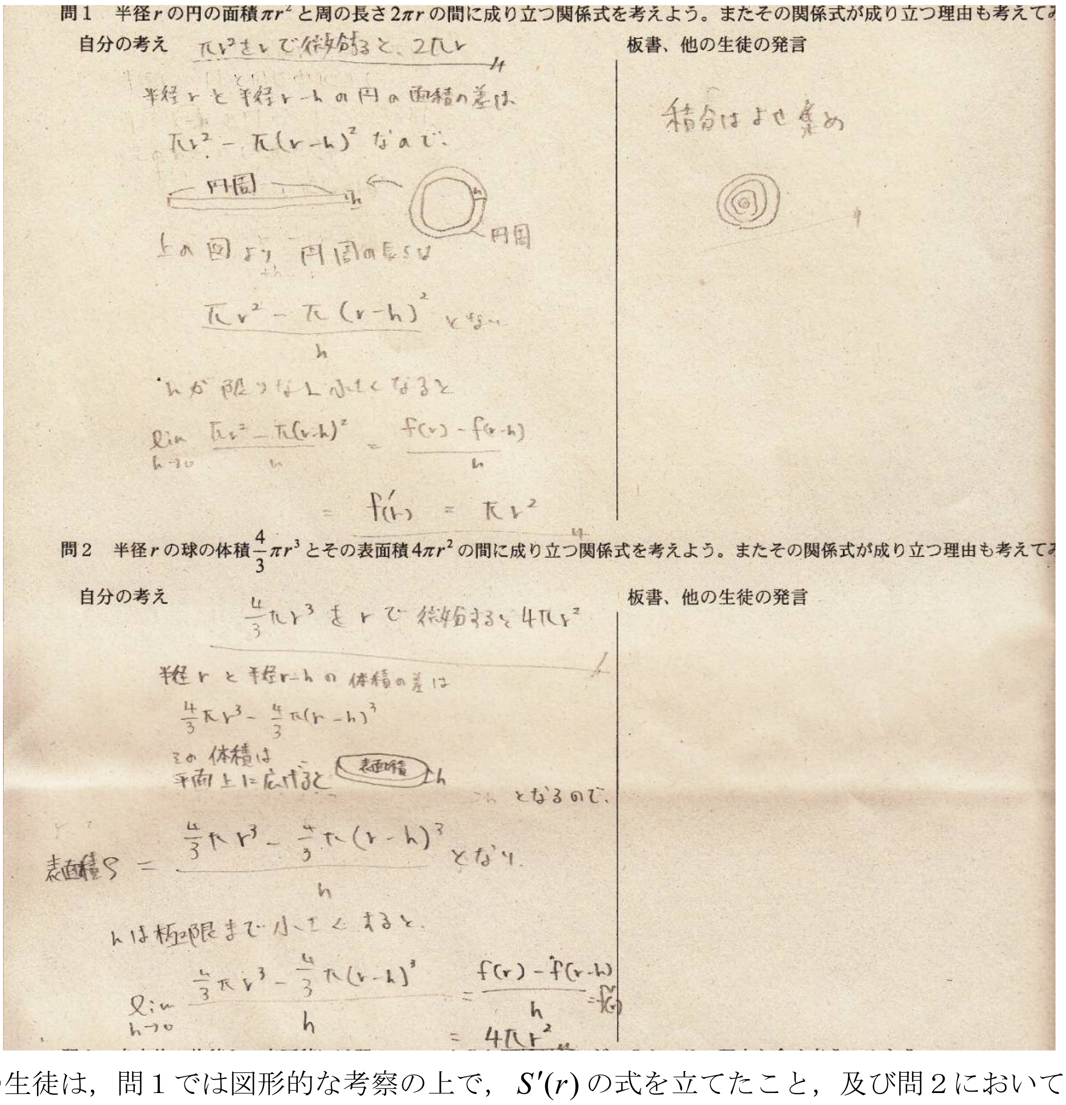
微小面積を足し集めることは考えられたが，式を立てることはできなかった。

資料４　生徒の取組例　考え方で３点を与えた生徒の例①



問１において，半径 r の増加に伴う面積の増加分を図形的に $2\pi r\,dr$ と考えている点を評価した。

資料５　生徒の取組例　考え方で３点を与えた生徒の例②



この生徒は，問１では図形的な考察の上で，$S'(r)$ の式を立てたこと，及び問２においても同様に $V'(r)$ を求めている点を評価した。

全体としては，生徒はおおむね意欲的に授業に取り組んだため，授業前に心配していた白紙での提出は，ほとんど見当たらなかった。

また，多くの生徒が円の面積と円周の長さの関係及び球の体積と表面積の関係には気付くことができたため，関心・意欲・態度の評価は高かった。反面その関係を論理的に説明することは難しかったらしく，あまり書けてなかった。そのため考え方の評価は低いものになった。

(3) アンケート結果（43名）

資料６　アンケート

１　考える力が身に付いたと思いますか。			
ア　そう思う	イ　まあそう思う	ウ　あまり思わない	エ　思わない
8	29	6	0
18.6%	67.4%	14.0%	0.0%

２　論理的な文章の書き方が身に付いたと思いますか。			
ア　そう思う	イ　まあそう思う	ウ　あまり思わない	エ　思わない
6	11	23	3
14.0%	25.6%	53.5%	7.0%

３　授業の難易度はあなたにとってどうでしたか。				
ア　難しかった	イ　やや難しかった	ウ　普通だった	エ　やや易しかった	オ　易しかった
25	11	5	2	0
58.1%	25.6%	11.6%	4.7%	0.0%

４　授業の内容は理解できましたか。			
ア　理解できた	イ　だいたい理解できた	ウ　あまり理解できなかった	エ　理解できなかった
17	22	4	0
39.5%	51.2%	9.3%	0.0%

５　今日の授業の感想を書いてください。

- 考えれば分かるけれど，それを言葉や式で表すのは難しかったです。
- 問３の答えが知りたかった。
- 今まで習ったことで，円の周の長さと面積の関係を考えられたのがおもしろかった。
- 難しい！
- おもしろかった！
- 数学を論理的に考えるのが，大人の数学っぽくておもしろかったです！！
- 微分や積分について本質的に理解していないと文章は書けないなと思いました。
- 違った見方が分かっておもしろかった。
- ７時間目の雰囲気の中では大変きつい授業だと思う。みんなで話し合う時間があればよいと思う。
- 自分のアイデアがあまり解に直結しなかった。

- 分かりやすく説明を考えるのが，難しかった。
- 自分が知っていた公式の導き方を改めて知ることができ，新しい導き方も知れてよかった。
- ただ問題を解くいつもの授業と違い，そうなる根拠を考えることができておもしろかった。
- 時間が足りない。
- たまにはあっていいと思う。
- 公式と公式の間に関係式があるとは全く思わなかった。
- 言われれば分かるけど，自分で導けるかは分からない。
- 楽しかった！！
- 円の公式が解明されて感動した。
- いつもは考えないことを考えたので新鮮だった。
- 関係式をつくるのにいろいろな方法があっておもしろかった。

(4) まとめと今後の課題

今回の取組から得られた課題は次の二つである。

ア　パフォーマンス課題の難易度の設定が難しい

生徒にとって，易しすぎず，難しすぎずというレベル設定することはかなり大変なことであると感じた。また同じ趣旨の問題であっても，聞き方を変えるだけで生徒の反応が変わることも十分あり得ると感じた。そういう意味でも，問題の設定は十分考えた上で出題しなければならない。

イ　ルーブリックの設定は最低２回必要である

事前にルーブリックを作成して授業に臨んだが，結局問３はできなかったため，ルーブリックの変更を余儀なくされた。また，採点過程においても想定外の解答も多く，評価に困ることも多かった。今後このような授業を行う場合には,事前に作成したルーブリックはあくまで案であり,授業後にルーブリックを完成させるという認識が必要だと感じた。

(5) おわりに

アンケートでは８割以上の者が課題の難易度について「難しかった」「やや難しかった」と答えているとおり，課題の難易度としては生徒にとって高かったと思われる。一方で「考える力が付いたか」という問に対して，８割以上の者が「そう思う」「まあそう思う」と答えている。これは難しい課題に対して生徒が一生懸命に考えたことを示していると思う。このことは，パフォーマンス課題の設定をする際に，生徒にとって難しいから不適切であるとは一概には言えないのではないかと感じた。そういう意味でも課題の難易度の設定は難しいと思う。

ふだんの授業では，例題を説明し，その類題を生徒たちが演習するという形式の授業を展開しているが，今回の取組の様子とアンケート結果を見ると，生徒たちが主体的に“考える”という活動が少ないということがわかった。その点ではこのような取組を定期的に実施することは，生徒にとって大いに刺激になると思われる。また，ルーブリックの作成も含めた評価を行う過程は大変であったが，その取組自体が自分にとって，授業を見直すよい機会になったことは間違いない。生徒だけでなく教員にとっても大変価値のある取組であると感じた。今後も機会をつくり取り組んでいきたい。