

## ベクトルの有用性を理解させる

### 1 はじめに

数学Bでは、「数列」、「ベクトル」、「確率分布と統計的な推測」の3分野を学習するが、今回はその中の「ベクトル」の「平面上のベクトル」という単元についてのパフォーマンス課題を実施した。

この単元は、学習指導要領において「ベクトルの基本的な概念について理解し、その有用性を認識するとともに、事象の考察に活用できるようにする」となっており、ベクトルの有用性を生徒に理解させることが重要なポイントになっているため、それを目的としたパフォーマンス課題を設定した。

### 2 単元計画書を作成するに当たって

ベクトルの有用性を理解させる上で、ベクトルの一次独立、ベクトルの一意性を十分理解させる必要があると考え、ベクトルの和・差・実数倍では時間数を多めに設定した。また、パフォーマンス課題は、位置ベクトルを学習した直後に行うことにした。その後学習するベクトル方程式、及び空間ベクトルにおいてもベクトルの有用性を理解した上で学習できるように配慮したためである（資料7）。

### 3 実践報告と考察

#### (1) 授業での実践について

計画した当初は復習プリント（資料3）のパフォーマンス課題に各自で取り組んだ後、ベクトルの有用性を考えてもらうという授業を考えたが、これらのことを1時間の授業の中で全て一人でやるのは難しいと考え、当日はグループで取り組むスタイルで行うことにした。

また問題について、(ア)の点A、Bの座標をA(3, 0)、B(0, 5)と設定したが、実際解答してみると、案外簡単にAD:DBの比まで計算できてしまうことが分かった。これではベクトルを用いる有用性を感じることができないと考え、2点A、Bの座標を変更し、生徒に提示した。

授業当日は、まず4人の5グループに分けた上で、復習プリント、討議用プリント2種類（資料5、資料6）を配付し、本日の授業の進め方の説明をした。説明では、確認テストの2通りの解答を手分けして解くこと、解法が分からない場合は、他のグループに聞いてもよいことを伝えた。さらに主たる目的は確認テストの解答ではなく、2通りの解答それぞれの長所、短所をグループで討論することであり、その討論の内容については評価をすることを伝えた。なお、評価基準は、ベクトルの有用性に生徒自らが気付くことを期待して、観点2は伝えずに観点1のみ伝えた。

その後生徒は復習プリントに取り組んだ。従来ベクトルで解答する(イ)の解答は、各班15分くらいでおおむね解答できたが、(ア)の解答に時間がかかってしまった。多くの生徒が内分点の座標及び直線の方程式の公式を忘れていたことが主な原因であった。そのため、全てのグループで(ア)、(イ)の解答ができたのは開始から35分経過したところであった。そこで残りの15分で個人の討議用プリントに書き込み、ほぼ同時進行でグループで討論し、長所・短所を出し合った。最後に個人及びグループ討議用プリントを提出させて授業終了となった。

次の授業で、まとめの報告、授業アンケート（資料4）を行った。各グループでの発表は時間的に余裕がなかったため割愛し、教員で主なものを報告する形をとった。その上で、ベクトルの有用性は解きやすさだけではないことや、(イ)の解法はどのような三角形でも成り立つことを示していること

を伝えた。そのことから、(ア)の解法は一般性がなく、テストなどでは使えない解法であることも伝えた。

## (2) パフォーマンス課題の実践とその評価について

### パフォーマンス課題

三角形OABにおいて、辺OAを1:2に内分する点をP、辺OBを3:2に内分する点をQ、AQとBPの交点をR、さらに線分ORの延長と辺ABとの交点をDとする。

このとき、AD:DBを次の2通りの求め方で答えよ。

(ア) 3点O(0, 0), A(6, 0), B(5, 4)とにおいて、

(i) 直線AQ, BP, ABの方程式を求めよ。(ii) 点R, Dの座標を求めよ。

(iii) AD:DBを求めよ。

(イ)  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{OB} = \mathbf{b}$ とにおいて、(i)  $\vec{OR}$ を $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ を用いて表せ。

(ii) AD:DBを求めよ。

評価の仕方については、観点2については加算方式をとった。授業実施前に作成したルーブリックでは加算方式をとっていなかったが、(ア), (イ)の長所・短所それぞれ複数の記述があり、それらをひとまとめで評価するのは難しいと考え、変更した。

次に、各解法の長所、短所として挙げた主なものを示す。なお( )内の数字は、加点と評価したものである。また内容的に不十分若しくは内容的に合っていないと考えたものについては、特に減点はしなかった。

#### (ア)の解法の長所

- ・ 文字が少ない(+1)
- ・ 具体的な数字が出てくるので解きやすい(+1)
- ・ 計算方法が割と単純(+1)
- ・ 中学校の知識でも解ける(+1)
- ・ 文字を置かずに解ける(+1)

#### (ア)の解法の短所

- ・ 計算量が多い(+1)
- ・ 補助線の引き方が難しい
- ・ 比の求め方が分からないと解けない

#### (イ)の解法の長所

- ・ 計算が単純(+1)
- ・ 座標が分からなくても解ける(+2)
- ・ 授業で習った解法で解ける
- ・ どの公式を使えばよいか、ひらめけば解ける
- ・ 位置ベクトルだけで解ける

#### (イ)の解法の短所

- ・ 文字が多い(+1)
- ・ 計算が長い(+1)
- ・ 解法が理解できていないと解けない(+1)

- ・ 順序立てて解かないといけない (+1)
- ・ 二つ式が必要なので, 計算が大変
- ・ 途中式がない

【資料1 評価結果】

グループ	生徒	観点1	ア長所	ア短所	イ長所	イ短所	合計
1	a	4	2	2	2	3	13
1	b	4	2	2	1	2	11
1	c	4	2	2	1	3	12
1	d	4	2	2	1	3	12
2	e	4	1	2	1	2	10
2	f	4	2	2	1	2	11
2	g	4	2	2	1	2	11
2	h	4	2	2	1	2	11
3	i	4	3	2	1	2	12
3	j	4	1	2	1	1	9
3	k	4	2	2	1	1	10
3	l	4	2	2	1	1	10
4	m	4	1	2	1	1	9
4	n	4	2	2	1	1	10
4	o	4	2	2	1	1	10
4	p	4	2	2	1	1	10
5	q	4	2	2	1	1	10
5	r	4	2	2	1	2	11
5	s	4	2	2	3	2	13
5	t	4	2	2	3	2	13
	平均	4.0	1.9	2.0	1.3	1.8	10.9

資料1において、観点1については、全ての生徒が（ア）、（イ）の解法の長所、短所について何かしら述べていたので4点をつけた。

観点2については、（ア）の解法の長所はほとんどの生徒が、「式さえ立てられれば解ける」などの内容を書いており、このような記述があれば加点した。また、（ア）の解法の短所はほぼ全員の生徒が、「計算量が多い」と書いており、このような記述があれば加点した。それに比べ（イ）の解法の長所はなかなか難しかったらしく、多くの生徒が「授業で習ったことを使えば解ける」という主旨の記述が目立った。これに関しては、あまり数学的な内容を含んでいないと考え、加点しなかった。こうした中、2名の生徒が「座標が分からなくても解ける」と書いており、ベクトルを用いた解法の一般性に気付いていると考えて加点した。（イ）の解法の短所は多くの生徒が「文字が多い」と書いており、このような記述があれば加点した。また、内分点の公式、ベクトルの一意性、3点が一直線上にあるときの条件など、「複数の考え方が必要である」と書いている生徒には加点した。

(3) アンケート結果 (【資料4 授業アンケート】)

【資料2 アンケート結果 (単位:人)】

1 今回の授業は、ベクトルの有用性を理解することに有効だと思いますか。

ア そう思う	イ まあそう思う	ウ あまり思わない	エ 全く思わない
6	12	2	0

2 課題の難易度はあなたにとってどうでしたか。

ア 難しかった	イ やや 難しかった	ウ 普通だった	エ やや 易しかった	オ 易しかった
1	16	2	1	0

3 今回のような討論は、以下の力を身に付けることに有効だと思いますか。

① 文章表現力

ア そう思う	イ まあそう思う	ウ あまり思わない	エ 全く思わない
2	13	5	0

② 論理的思考力

ア そう思う	イ まあそう思う	ウ あまり思わない	エ 全く思わない
8	12	0	0

③ コミュニケーション力

ア そう思う	イ まあそう思う	ウ あまり思わない	エ 全く思わない
8	9	3	0

4 このような討論を行う授業の感想を述べてください。(主な意見)

- ・ 解法はどっちがよいか議論できるので、今後似た問題が出たら、やりやすかった解法で解ける。
- ・ たまにはこんな授業はあってもおもしろいかもしれない。
- ・ 班の子と話し合えたのは楽しかったが、班の子全員が分からないとすごく困る。
- ・ 自分たちで一から考えてやっていくので、頭に残りやすいと思った。
- ・ 協力しないと答えが出ないので、コミュニケーション力を付けるにはよい授業だと思った。
- ・ 分からないところを気軽に聞けていいと思いました。
- ・ 自分の考えをもっていることが、第一条件だと思います。問題を通して、自分で考え、相手の考えを聞くことは大切だと思った。
- ・ 自力で考える力がつく。
- ・ 数学の問題について討論を行ったことはなかったので難しかったです。
- ・ 正直めんどうくさかったけど、お互いに教え合うのは理解が深まっていいと思いました。

5 今日の授業全般の感想を述べてください。(主な意見)

- ・ 一つの問題に時間がかかって次の章に行くのが遅くなるので、グループで解くなら難易度の高いものをやりたいと思った。

- ・ 自分や班の人で答えを出せたときの達成感があったり、できている人の解答を見せてもらって教えてもらうことで、この問題の印象が残ってよかった。
- ・ (ア)しか解いていないので、ベクトルの有用性はよく分からなかったです。
- ・ 解き方には長所と短所があることがよく分かった。
- ・ 問題で行き詰まったときに、誰かと協力して解くのは思ったよりも楽しかった。
- ・ 難しい問題だったけど、分かる人に解き方を教えてもらえたので身になった。

資料2では、9割の生徒が今回の授業がベクトルの有用性を理解することに有効と答えている。これは座標、方程式を用いた(ア)の解答に時間がかかった結果、ベクトルによる解法である(イ)の方が解きやすいと感じ、有用性があると答えたものと思われる。ただ、解きやすいことだけが有用性ではない。ベクトルの解法は一般性があるという点でも有用性があることを伝えなかったが、十分伝えられなかった点は課題として残った。

次に特徴的な点としては、今回の授業方式についてほとんどの生徒が、論理的思考力及びコミュニケーション力を身に付けることに有効であると答えている。これは生徒アンケートで授業の感想を述べてもらう設問4で、多くの生徒が、協力して問題を解くことで、分からないことをすぐに周囲に聞けることがよかったと答えていることと無関係ではないであろう。通常の授業では分からないことがあってもそのままにしていたことも、周囲に聞くことで理解することができたこと、また、他の生徒に教えることを通して、論理的思考力及びコミュニケーション力が身に付くと感じたと思われる。

#### 4 まとめ

今回2通りの解法を比較・検討することでベクトルの有用性に気付かせることを目的に取り組んだ。グループワークの取組も含め、初めての試みだったため不安も大きかったが、生徒の取り組む姿勢もよく、何とかやりきることができた。

各解法の長所、短所を議論することについては、提出するレポートの評価基準を事前に示したことが、周囲との議論を活発化させることにつながったように思う。そういう意味で事前の評価基準提示には意味があると感じた。また、評価方法を加点にしたことについては、生徒の記述内容を積極的に評価できると感じた。ただ評価基準の設定は難しく、現段階においても、評価に妥当性があるか分からない部分もある。さらにこれを学年全体で行うためには、教員間の評価のすり合わせが必ず必要になるため、なかなか大変である。

今回の授業でベクトルの有用性を十分生徒に伝えることはできなかった。このような方法で本質を伝えることの難しさを感じた。まだまだ工夫が必要である。一方生徒たちは、このようなグループに分かれて問題を解くこと、話し合うこと、教え合うことが自身の理解度の向上につながると気付くことができたようである。その点は良かったと思うし、自分自身も単元計画、パフォーマンス課題、評価基準を考えることによって、どこに重点をおいて授業すべきかが明確になりふだんの授業がやりやすくなったように思う。以前であれば文型の生徒に対しあまり理屈っぽい授業にならないようにしていたが、文型であれ理型であれ、伝えないといけないことは変わらないことを改めて実感した。また、私自身も生徒同士が学び合うことで生徒の理解度、定着度の向上に効果があるとも実感できた。そういう点で収穫も多く、授業の仕方に幅ができたと思う。課題は多いが、今後も研究を続けていきたい。

ペタブル復習プリント

( )組( )番 名前( )

三角形 $\triangle OAB$ において、辺 $OA$ を $1:2$ に内分する点を $P$ 、辺 $OB$ を $3:2$ に内分する点を $Q$ 、 $AQ$ と $BP$ の交点を $R$ 、さらに線分 $OR$ の延長と辺 $AB$ との交点を $D$ とする。  
 このとき、比 $AD:DB$ の値を次の(ア)、(イ)の空欄のそれぞれで求めよ。

(ア) 3点 $O(0, 0)$ 、 $A(6, 0)$ 、 $B(5, 4)$ と置いて以下の問いに答えよ。  
 (1) 直線 $AQ$ 、 $BP$ 、 $AB$ の方程式を求めよ。  
 (2) 2点 $R$ 、 $D$ の座標を求めよ。  
 (3) 比 $AD:DB$ の値を求めよ。

(イ)  $OA = \vec{a}$ 、 $OB = \vec{b}$ と置いて、次の問いに答えよ。  
 (1)  $OR$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。  
 (2) 比 $AD:DB$ の値を求めよ。



【資料5 課題プリント討議用紙（個人用）】

課題プリント討議用紙（個人用）

組 番 氏名 \_\_\_\_\_ 班 \_\_\_\_\_

1 (ア) の解法について、良い点（長所）、悪い点（短所）を挙げよう。  
良い点（長所）

悪い点（短所）

2 (イ) の解法について、良い点（長所）、悪い点（短所）を挙げよう。  
良い点（長所）

悪い点（短所）

【資料6 課題プリント討議用紙】

課題プリント討議用紙

班 メンバー

---

① (ア) の解法について、良い点 (長所)、悪い点 (短所) を挙げよう。

良い点 (長所)

悪い点 (短所)

② (イ) の解法について、良い点 (長所)、悪い点 (短所) を挙げよう。

良い点 (長所)

悪い点 (短所)

【資料7 単元計画書】

単元計画書

教科名(科目名)	数学(数学B)		単位数	3単位					
対象クラス	2年生 文型クラス		教科担当者						
単元名	第2章ベクトル		単元の実施時期	9月上旬～10月下旬					
単元目標 (学習指導要領)	ベクトルの基本的な概念について理解し、その有用性を認識するとともに、事象の考察に活用できるようにする。								
1	単元の目指すべき生徒像(生徒の実態・教科の本質・社会に出てからの必要性等)								
	<p>本校はほとんどの生徒が進学を志望している。また、このクラスは文型クラスで、多くの生徒が国立大学への進学を志望している。そのため、数学に対しても積極的に取り組むことができる反面、苦手を感じている生徒も少なくない。またこの単元に限ればベクトル特有の表現、式的意味が理解できず、そのことによりベクトルの有用性を理解できない生徒も多いと思われる。</p> <p>以上のことを踏まえ以下の事柄を重視したい。</p> <p>①ベクトルの基本的な概念をしっかりと理解させる。</p> <p>②他の単元を用いた解法と比較することにより、ベクトルの有用性を理解させる。</p>								
2	このクラスの単元到達目標								
	①関心・意欲・態度	②数学的な見方や考え方	③数学的な技能		④知識・理解				
	数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを事象の考察に活用する。	平面上の直線や円などの図形が、ベクトルを用いて表現されることを知る。	1次独立である二つのベクトルの1次結合として、平面上の任意のベクトルが表現できることを理解する。		平面上のベクトルの概念を理解し、ベクトルに関する基本的な用語・記号に習熟する。				
3	単元計画								
	時数	小単元	主な学習内容・活動		①	②	③	④	評価の方法等
	1	有向線分とベクトル	ベクトルの概念を理解し、ベクトルの表現、相等、及び逆ベクトルなどの用語について習熟させる。		○			○	課題プリント
	3	ベクトルの加法・減法・実数倍	ベクトルの演算に関していろいろな法則が成り立つことを、図を利用して確認させる。				○	○	課題プリント
	3	ベクトルの成分	成分からベクトルの大きさを求める練習、和、差、実数倍の成分による演算規則の練習をさせる。				○	○	課題プリント 小テスト
	4	ベクトルの内積	ベクトルの内積を紹介し、内積と成分との関係を考察させる。			○		○	小テスト
	3	位置ベクトル	図形の問題を解くのに位置ベクトルの考え方が有効な手段であることを理解させる。			○		○	課題プリント 小テスト
	1	パフォーマンス課題	ここまでの知識や技能を活用して、課題に取り組みさせる。		○	○			パフォーマンス課題
	4	ベクトル方程式	平面上の直線をベクトルを用いて表現できることを理解させる。			○	○		課題プリント 小テスト
	2	ベクトルの図形への応用	ベクトルの性質を用いてさまざまな図形の性質を調べさせる。			○	○		課題プリント
	1	2学期中間考査	この分野の基本事項の確認をする。			○	○	○	定期考査

	1	空間における直線と平面	直線や平面の位置関係について確認させる。		○		○	課題プリント
	1	空間座標	空間における原点からの距離の公式を理解させる。		○	○		課題プリント 小テスト
	4	空間のベクトル	平面の場合と同様に考えることができることを理解させる。	○	○			課題プリント
	3	位置ベクトルと空間の図形	空間上の直線や球をベクトルを用いて記述させる。	○			○	課題プリント 小テスト
	1	2 学期 期末 考 査	この分野の基本事項の確認をする。		○	○	○	定期考査
4	パフォーマンス課題について							
	重点目標			身に付けてほしい知識・技能				
	一つの問題を2通りの求め方で求めることで、ベクトルの有用性を理解させる。			<ul style="list-style-type: none"> <li>・ <math>\vec{0}</math> でない2つのベクトル <math>\vec{a}</math>, <math>\vec{b}</math> が平行でないならば、任意のベクトル <math>\vec{p}</math> はただ1通りに <math>m\vec{a} + n\vec{b}</math> の形に表される。</li> <li>・ 3点A, B, Cが一直線上にあるとき、 <math>\vec{AC} = k\vec{AB}</math> となる実数 <math>k</math> がある。</li> </ul>				
	パフォーマンス課題の内容				指導方法・形態			
<p>三角形OABにおいて、辺OAを1:2に内分する点をP、辺OBを3:2に内分する点をQ、AQとBPの交点をR、さらに線分ORの延長と辺ABとの交点をDとする。このとき、AD:DBを次の2通りの求め方で答えよ。</p> <p>(ア) 3点O(0, 0), A(6, 0), B(5, 4)とにおいて</p> <p>(i) 直線AQ, BP, ABの方程式を求めよ。</p> <p>(ii) 点R, Dの座標を求めよ。</p> <p>(iii) AD:DBを求めよ。</p> <p>(イ) <math>\vec{OA} = \vec{a}</math>, <math>\vec{OB} = \vec{b}</math>とにおいて、</p> <p>(i) <math>\vec{OR}</math> を <math>\vec{a}</math>, <math>\vec{b}</math> を用いて表せ。</p> <p>(ii) AD:DBを求めよ。</p>				<p>①プリントを準備して、4人の5グループに分けて課題に取り組みさせる。</p> <p>②課題に取り組んだ後、グループ内で(ア), (イ)それぞれの解法の長所、短所について議論させる。</p>				
5	パフォーマンス課題(討議用プリント)についてのルーブリック							
		観点1(関心・意欲・態度)				観点2(数学的な見方・考え方)		
		(ア), (イ)それぞれの解法の長所、短所が的確に論じられている。				(ア), (イ)の長所、短所それぞれで評価		
	4				加	的確に論じられている。その数に応じて1点加		
	3				加	ベクトルの解法の一般性について述べている場合は、さらに1点加		
2				加	何かしら記述されていれば1点与える。			
1								
6	育成したい能力(キャリア教育の観点から)							
	問題解決力		与えられた課題に対して、何らかの方法を活用して問題を解決していこうとする。					
	コミュニケーション力		与えられた課題に対して集団討議を行い、何らかの結論を導き出す。					
	文章表現力		集団討議によって導き出した結論が他者に伝わるように書こうとすることで、文章により表現する。					