

## 正弦・余弦定理を利用し，長さを測定してみよう

### 1 はじめに

図形と計量については，中学において三平方の定理を学び，また相似な図形の性質を利用することで，工夫して木の高さを求める方法なども学んでいる。また，小学校以来，図形の基本的な性質も学んできた。これらを踏まえた上で三角比としての正弦，余弦，正接を定義し，線分の長さや角の大きさ，面積などの計算に応用することを学ぶ。

中学校の第3学年で学び，受験勉強でよく学習していることもあり， $1:2:\sqrt{3}$  や  $1:1:\sqrt{2}$  の三角形は多くの生徒が覚えていて，鋭角の三角比までは比較的取り組みやすく，定着もいい。また，身近な測量（長さを測る）という題材があり，有用性などを実感しやすいと考える。

### 2 単元計画書作成に当たって

今回初めて単元計画書を作成してみて，事前に単元の指導計画を今まで以上に考えることができた（資料5）。そして単元全体を通して計画書を書いてみることで，途中での小テストのタイミングやその内容，授業中に重要視する内容を考えることができ，最終目標であるパフォーマンス課題に向けての取組がより明確になった。また，今回は自分自身だけで行ったが，学年の他の先生方と一緒にする場合にもこの単元計画書が有効であると思う。ふだんも学習内容の打ち合わせは行っているが，今までよりも目標が明確になり，意思疎通ができ，統一した内容で授業ができるのではないかと感じた。

### 3 実践報告と考察

#### (1) 授業での実践について

三角比の拡張において，一般角や単位円の概念は学習していないが，三角方程式において余弦と正接の理解を深めるため， $360^\circ$  まで拡張して指導した。また， $\sin 120^\circ$  や  $\cos 150^\circ$  などを早く求められるようにするため，小テストを実施して基本事項について繰り返し練習をした。その際，ただやり方を覚えたり，丸暗記をしたりするのではなく，意味を理解して解くことが大切だということを繰り返し指導した。

正弦・余弦定理では， $a$ ， $b$ ， $c$  で公式を覚えさせることはせず，とにかく図で視覚的に式を立てさせた。練習でも黒板に問題を書くときは三角形の頂点に  $A$ ， $B$ ， $C$  を振らず，実際に三角形に角や辺の大きさを直接書き入れたものを用いて，公式に頼ることができないようにした。また，本校には正弦・余弦定理の式が立てられても計算できない生徒が多いので，計算過程をなるべく黒板に書かず，演習時間を多く取り，自力で（周りの友達と相談して）最後まで解くよう指導した。どうしても分からない場合は，本人たちの計算の方法の途中から教えるというスタンスをとった。パフォーマンス課題と関連付けるため，正弦・余弦定理の使い分けができることが重要だということを繰り返し指導し，たまに混ぜた問題を出したり（余弦定理の授業中に正弦定理の問題を出したり），プリントでの課題はランダムになるようつくったりして定着を図った。

最後に実際に測定することで，ただ計算しているだけでなく，長さの測定に生かすことができることを実感し，今まで学習してきたことにつなげるために，パフォーマンス課題を行った。

## (2) パフォーマンス課題の実践

### 【パフォーマンス課題】（資料3 課題プリント）

この教室の、黒板、扉、机が古くなったので、買い換えたいと思います。そこで、業者にサイズを伝えるため「黒板の幅」「扉の高さ」「机の幅」を測りたいが、あいにくメジャーがありません。その代わり「分度器」「3mの紐（1mずつ印あり）」「三角比の表（90°まで）」があります。さらに、必要なら「長さのわからない紐」もあります。これらを上手に使い、班で協力して角度を測定し、それぞれの長さを計算してください。その際、どの角を求め、何の定理を用いたか書いておいてください。

生徒は、4人～5人の班をつくり、各班に「大きい分度器」、「3mの紐（1mずつ印あり）」、「三角比の表」を渡した。（電卓は持参）なるべく正確に、今までに習ってきた正弦・余弦定理を利用して求めること、その際測定する角度等はより少ない方がよいことを伝えた。今回は、事前に測定した結果を踏まえて、誤差が1%を超えたら減点とすることにした（後に採点前のループリック変更時に1%以内なら加点に変更）。こちらが想定した方法及び実際の長さは以下のようなものである。

#### 【扉の高さ（1.875m）】

3mの紐の端と端を扉の上と下で押さえ、2mと1mで折り曲げその間の角の大きさを測り余弦定理で解く。

#### 【机の幅（60cm）】

3mの紐の2m分を使い、1mと1mで折り曲げその間の角の大きさを測り余弦定理で解く。

#### 【黒板の幅（3.72m）】

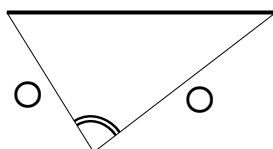
3mの紐では足りないため、長さのわからない紐と3mの紐の端をそれぞれ黒板の左右で押さえ、それぞれを一辺とする。その間の角と3mの紐の対角の大きさを測り、正弦定理で解く。その際紐同士の間角が鈍角になるため、三角比の表になく、 $180^\circ - \theta$ の三角比を利用する。

「扉の高さ」や「机の幅」で慣れた後に「黒板の幅」の計測にチャレンジし、これを評価の対象にすることにした。どの班も何とか長さを求めようと試行錯誤しており、他の班が測定している様子を見たり、他の班に聞きに行ったりすることはない、何とか自力でやりたいという気持ちを感じた。しかし、ある程度予想はしていたが、なかなかこちらが思ったような方法で求めることができなかった。対角線の長さを測ろうとしたり、紐を折って小さくし、それが何個分あるかを求めようとする姿が見られた。しかし、何とか長さを求めてやろうという意欲は全員から感じ取られ、こちらの想像以上だった。その後全ての班に「ヒントカード①」を見せ、測定方法を考えさせた。

#### ヒントカード ①

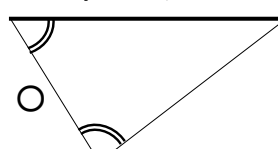
余弦定理は

求めたい辺



正弦定理は

求めたい辺



ですね。上の図形のような辺や角の大きさを求めるには紐をどう使えばいいでしょう。

しばらくすると多くの班が測定方法に気が付き進めることができた。しかし、なかなか協力できない

班が一つあった。数学が得意な一人の生徒がヒントを見せてもそれを考えず、自分の方法にこだわり、勝手にやっている状態だった。班で活動することに慣れていないこともあると思うが、こちらも「みんなで協力しなよ」と声掛けはしたが、うまく導くことができず、結局この班は一つしか求めることができなかった。これには大いに反省した。

### (3) 評価について

まず、採点をする前にループリックの書き換えを行った。理由は、観点1においては上記にあるように取り組んではいたが班の人たちと協力できない生徒がいたことである。また、観点2においては「ヒントカードを使った場合は1点減点とする」を削除することとした。最初の「ヒントカード①」から始まり、なかなか進まない状況を解消するため途中から積極的にヒントカードを貰いにくるようにしたことと、取組状況と彼らの状況に対する課題の難易度を考えて配点を変えた方がいいと判断したためである。

	観点1（関心・意欲・態度）		観点2（数学的技能）
5	①班の人たちと協力して、積極的に測定をしている。 ②既習事項を用いて長さを求めようと計算に取り組んでいる。 ①、②の両方でできている。	10	余分な角の大きさを測ることなく、最小限の情報で適切に計算できている。
3	①、②の片方しかできていない。	8	最小の情報ではないが、きちんと長さを求めることができています。
1	取り組んではいるが、班の人たちと協力できない。	6	測定の方法がよくなく、明らかにおかしい長さが求まっている。
0	興味・関心を示さず、何もしようとしない。	4	計算をしようとはしているが、できていない。
		2	計算ではなく、紐の長さを頼りにするなど正確な求め方でない。
		0	計算を全くしようとしない。または、できていない。
		※ 誤差が1%以内の場合は1点加点する。	

観点1の関心・意欲・態度については活動中にこちらで採点したので主観が大きいですが、ワークシートの記入状況も参考にした。採点結果について、点数の分布は以下のようである。

5点	3点	1点	0点
12人	3人	2人	0人

上記に書いたようにほとんどの生徒が、班の人たちと協力して積極的に測定をしていた(観点1①)が、既習事項を用いて長さを求めようと計算に取り組んでいる(観点1②)になると、できない生徒が何人かいた。これが3点の生徒である。小テスト等で全員合格するまで追試をしたりしたが、なかなか定着していないようである。

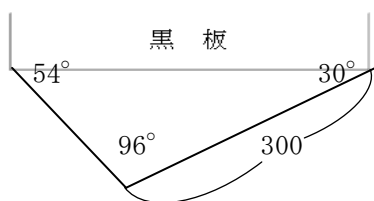
観点2はワークシートを見て採点したが、測定から計算まで班ごとの活動であったため、点数は班内で同じになった。

9点	6点	4点	0点
4人	4人	5人	4人

資料1が9点（8点＋1点）をとした解答例である。

【資料 1 解答例①（生徒のワークシートを基に作成）】

黒板



$$180 - 96 = 84$$

$$\frac{300}{\sin 54^\circ} = \frac{x}{\sin 96^\circ}$$

$$x = \frac{300}{\sin 54^\circ} \times \sin 84^\circ$$

$$x = \frac{300}{0.8090} \times 0.9945$$

$$x = 368.789$$

$$3.68789m$$

計算に必要ない  $30^\circ$  を測定してはいるが、正弦定理で正確に計算されている。ただ、 $\sin 96^\circ$  が  $\sin 84^\circ$  と等しいことについては気付くことができず、ヒントカードを貰いにきた。そのとき渡したのが「ヒントカード⑤」である。

ヒントカード ⑤

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{なので} \quad \sin 30^\circ = \sin 150^\circ \quad \text{ということですね。}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{なので} \quad \sin 45^\circ = \sin 135^\circ \quad \text{ということですね。}$$

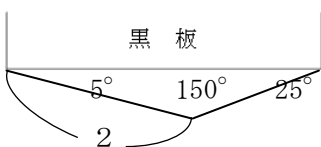
ということは・・・

結果は 3.68789m と、実際の 3.72m と誤差約 0.86%（1% 以下）と非常に正確であった。

6 点の解答は、資料 2 のとおりである。

【資料 2 解答例②（生徒のワークシートを基に作成）】

黒板



$$\frac{a}{\sin 150^\circ} = \frac{2}{\sin 25^\circ}$$

$$a \times 0.4226 = 2 \times \frac{1}{2}$$

$$0.4226 a = 1$$

$$a = \frac{1}{0.4226} = 2.3663$$

$$2.4m$$

計算自体は正確に行われているが、結果が1 m以上もずれており、明らかに測定がおかしいことが分かる。図を見ると紐を3 m使わず、2 m分で行っている。長さの分からない紐は約1.8 mだったので、合計3.8 mと黒板の幅と約10 cmしか違わない。ほとんど三角形にならなかったと思われる中で、無理やり求めたことによりこのような結果になったのだろう。また、0点は黒板の測定の問題まで行かなかった班で、白紙だった。

以下にその他用意していたヒントカードを示す。上記にも書いたように積極的に取りに来るようにしたため、多くの班がヒントカードを基に考えていた。

#### ヒントカード ②

3mの紐は1mごとに印があります。折り曲げれば2辺作れますね。

「ヒントカード②」は扉の高さを測るときのヒントとして用意した。

#### ヒントカード ③

3mの紐は3m分使わなければならないことはないですよ。2m分だけでも・・・

「ヒントカード③」は3 m分を使うと、机の幅を測るときに「 $1\text{ m} + 0.6\text{ m} < 2\text{ m}$ 」となり、三角形が作れなくなってしまう。そのためのヒントとして用意した。

#### ヒントカード ④

長さの分からない紐を一辺に使うと、長さの分かる辺が一つしかない。そういうときに使う定理は何定理だったかな？それが分かれば、どの角度を測れば良いか分かるはず！

「ヒントカード④」は黒板の幅を測るときのヒントとして用意した。

#### (4) アンケート結果について

授業後に簡単なアンケート（資料4）を実施し、本時の振り返りを行った。

##### 1 課題（授業）の難易度はあなたにとってどうでしたか。

難しかった	やや難しかった	普通だった	やや易しかった	易しかった
70.6 %	17.6 %	5.9 %	0.0 %	5.9 %

##### 2 課題には意欲的に取り組むことができましたか。

取り組めた	まあまあ取り組めた	あまり取り組めなかった	取り組めなかった
64.7 %	23.5 %	5.9 %	5.9 %

##### 3 グループでの活動への参加度を答えてください。

積極的に参加した	まあまあ参加した	あまり参加できなかった	全く参加できなかった
64.7 %	35.3 %	0.0 %	0.0 %

##### 4 考える力（考えようとする力）が身に付いたと思いますか。

そう思う	まあそう思う	あまり思わない	全く思わない
58.8 %	41.2 %	0.0 %	0.0 %

5 今日の授業の感想を教えてください。

とてもよかった	よかった	あまりよくなかった	全然よくなかった
70.6 %	23.5 %	5.9 %	0.0 %
今後も続けて実施してほしい	たまには実施してほしい	あまり実施してほしくない	実施してほしくない
70.6 %	29.4 %	0.0 %	0.0 %

【授業の感想】

- ・ ヒントなしでは解けないくらい難しかったです。でも、グループのみんなと協力しながら解いたことで答えまでたどりついたときの達成感はすごかったです。
- ・ 難しくてヒントを出してもらわないと全然解けなかった。(多数)
- ・ またこうやってグループでやるのをやってほしいと思った。
- ・ 難しかったけど、頭を使ってすごくよかったと思います。
- ・ ヒントをもらってやることで考えることができたし、答えが出たときはうれしかったです。
- ・ ゲーム感覚でできたので楽しんでやることができました。
- ・ とても楽しかったです。分かったときのうれしさはすごかった。(多数)
- ・ 一つ分かると次のものも分かってくるので楽しい。
- ・ 分からなかったけど楽しかった。

## 4 まとめ

パフォーマンス課題は、グループで行う、実際に動いて測定するなどのアクティブ・ラーニング的な要素を入れたが、生徒の活動はとても積極的でよかったと感じた。生徒の感想にもあるように、達成感や、できたときのうれしさや、取組の楽しさについて書かれたものが多く、生徒は難しくても取り組みようだ。また、ヒントカードをなかなかもらいに来なかったように自力で何とかしようという意欲も見られた。ふだんの問題だとなかなか難しい問題はすぐにあきらめたり、答えを見てしまったりする生徒が多いので、主体的・協働的に学ぶアクティブ・ラーニングは生徒の学習意欲向上に効果があることが改めて分かった。また、今年は単元計画書を作成したことで、単元全体を見通した上でパフォーマンス課題を作成できたこと、パフォーマンス課題に向けて授業構成ができたことがよかった。これは、他の先生方で行う場合は大変重要であると感じた。しかし、グループ学習は声かけが難しく、活発な議論ができない班ができてしまった。学び合いの大切さを日頃から伝え、グループ学習を多く取り入れるなどの工夫が必要であると痛感した。

昨年も苦労したがやはり評価についてはまだまだ改善が必要であると感じた。ループリックの作成については、どこまでできたら何点にするのか、どの項目の配点をどれくらいにするのが妥当なのかなど昨年も悩んだがやはり今年もこれという自信がなかった。これらについては一人でやるより、多くの教員でやった方が妥当な点数に決めやすいかもしれない。そして、事前に決めたループリックから、観点ごとの段階の線引き、重み(点数)など変更が必要になった。事前に生徒に知らせる場合は注意が必要だろう。また、大きな反省点は、観点2の評価は測定から計算まで班ごとの活動であったため、点数は班内で同じになってしまった。班ごとの活動をした後で、振り返りとして個人個人で測定方法を説明させたり、改めて別の用紙に計算させたりしてそれを評価するなどすればよかった。

まだお互いに慣れていなくてうまくいかない部分もあるが、パフォーマンス課題，アクティブ・ラーニングは学びに効果があることは実感できた。これからも積極的に取り入れてよりよい方法を見つけていきたい。今後実施することがあれば，今回の反省を生かし，よりよい課題で効果のある評価ができるよう取り組んでいきたい。

数学 I 課題学習 ～正弦・余弦定理を利用し、長さを測定してみよう～  
まずは約束事です。

この1時間は個人で考えたり、グループで協力したりしながら、課題に取り組んでください。

- あなたがどのように考えたのか、その考え方を評価します。
- 式、言葉、図、絵などを使って、わかりやすく書いてください。
- 正しい答えが出せなくても、考え方がきちんと書いていけば、点数がもらえます。しかし、答えが正しくても考え方を書いていないければ、点数はもらえません。
- 途中でわからなくなるときでも、自分が考えたところまで書いてください。
- どうにもならないときはヒントカードがあります。ただし、点数は下がります。

では課題です。

【課題】

この教室の、黒板、扉、机が古くなったので、買い換えたいと思います。そこで、業者にサイズを伝えるため「黒板の幅」「扉の高さ」「机の幅」を測りたいが、生憎メジャーがありません。その代わり「分度器」「3mの紐（1mずつ印あり）」「三角比の表（90°まで）」があります。さらに、必要なら「長さのわからない紐」もあります。これらを上手に使い、班で協力して角度を測定し、それぞれの長さを計算してください。その際、どこかの角を求め、何の定理を用いたか書いておいてください。

黒板

黒板

ZZ

扉の高さ

扉

机の幅

机

ZZ

CZZ

1 年 組 番 氏 名



【資料4 事後アンケート】

【本時の振り返り】

- 1 課題（授業）の難易度はあなたにとってどうでしたか。  
① 難しかった    ② やや難しかった    ③ 普通だった  
④ やや易しかった    ⑤ 易しかった
  
- 2 課題には意欲的に取り組むことができましたか。  
① 取り組めた    ② まあまあ取り組めた  
③ あまり取り組めなかった    ④ 取り組めなかった
  
- 3 グループでの活動への参加度を答えてください。  
① 積極的に参加した    ② まあまあ参加した  
③ あまり参加できなかった    ④ 全く参加できなかった
  
- 4 考える力（考えようとする力）が身についたと思いますか。  
① そう思う    ② まあそう思う    ③ あまり思わない    ④ 全く思わない
  
- 5 今日の授業の感想を教えてください。  
(1) ① とてもよかった    ② よかった  
      ③ あまりよくなかった    ④ 全然よくなかった  
  
(2) ① 今後も続けて実施してほしい    ② たまには実施してほしい  
      ③ あまり実施して欲しくない    ④ 実施して欲しくない  
  
(3) その他（感想など何でも書いてください。）

【資料5 単元計画書】

単元計画書

教科名(科目名)	数学（数学Ⅰ）		単位数		3 単位			
対象クラス	1 年生		教科担当者					
単 元 名	図形と計量		単元の実施時期		5 月下旬～9 月上旬			
単元目標	三角比の意味やその基本的な性質について理解し、計量における三角比の有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする。							
1	単元の目指すべき生徒像（生徒の実態・教科の本質・社会に出てからの必要性等）  学力差が非常に大きく、計算能力（できるかできないかだけでなく、速さや正確さも）の差も大きい。しかし、何とか理解したい、できるようになりたいという意識がある生徒が多い。そこで、あまり細かなことにこだわらず、全体像が掴めるようになる、内容が理解でき、問題に取り組むことができるようになることに重点を置いて指導するよう心がけている。 この単元は、物理とも関わりがある。他の教科でも数学が使われていることを実感することで有用性が理解できること、多方面（物理基礎でも同時期に力学で三角比が使われる）から学ぶことで定着が図れることなどを考え、本年は2次関数より先に学習している。三角比を用いることで、直接測定できない長さや角の大きさを間接的に測定することができる。この考え方が測量にも使われていることを知り、三角比の有用性を実感してほしい。また、さまざまな場面で使いこなせるようになってほしい。さらに、社会に出てから必要である、「限られた（与えられた）情報をうまく利用して、問題を解決する力」が身に付くようパフォーマンス課題を設定した。							
2	このクラスの単元到達目標							
	①関心・意欲・態度	②数学的な見方や考え方	③数学的な技能	④知識・理解				
	三角比に関心をもつとともに、その有用性を認識し、それらを事象の考察に活用しようとする。また、課題に対して積極的に取り組もうとする。	事象を数学的に考察し表現したり、多面的・発展的に考えたりすることができる。	問題・課題を数学的に表現・処理することができる。	基本的な概念、原理・法則、用語・記号などを理解し、基礎的な知識を身に付けている。				
3	単元計画							
	時数	小単元	主な学習内容・活動	①	②	③	④	評価の方法等
	2	三角比	鋭角の正弦、余弦、正接の意味を理解し、その有用性を認識する。		○			
	3	三角比の相互関係	鋭角の三角比の性質として、正弦、余弦、正接の相互関係を理解する。				○	
	2	三角比の拡張	$0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$ の範囲にある角 $\theta$ の三角比について学ぶ。与えられた三角比の $\theta$ を求められるようにする。				○	小テスト
	2	正弦定理	正弦定理を導き、三角形の辺や角の計量に活用する。			○		小テスト
	2	余弦定理	余弦定理を導き、三角形の辺や角の計量に活用する。			○		小テスト
	5	正弦定理と余弦定理の応用	問題の解決に正弦・余弦定理を適切に用いることができるようにする。			○		
	2	三角形の面積	いろいろな三角形の面積を求められるようにする。			○	○	
	2	空間図形への応用	空間図形に含まれる三角形に着目して、長さや面積を求める方法を理解する。		○	○		

	1	パフォーマンス課題	この単元の知識や技能を活用して、課題に取り組む。	○	○	○		パフォーマンス課題
4	パフォーマンス課題について							
	重点目標			身に付けてほしい知識・技能				
	実際に自分たちで考え計測することで、学習している内容や問題の意味を理解させたい。			直接長さを測れない場合に、三角形を用いて他の角や辺の大きさを計測することで目的の長さを、三角比を用いて求めることができる。この考え方が測量にも使われていることを知り、三角比の有用性を実感し、日常生活の場面で活用できる。				
	パフォーマンス課題の内容				指導方法・形態			
	「さまざまな物の長さを測定してみよう」  『黒板の幅、扉の高さ、机の幅を各班に与えられた紐（3 m）と分度器を用いて測定する。』  問1．与えられたものをどのように使い、長さを測るか各班で考える。 問2．実際に（角を）測定する。 問3．各定理を利用してそれぞれの長さを計算する。 問4．実際の長さを伝え、誤差を比較する。				4人～5人の班をつくり、各班に「大きい分度器」、「3 mの紐（1 mずつ印あり）」、「三角比の表」を渡す。（電卓は持参）  手のつかない班があることを考え、ヒントカードを用意しておく。			
5	パフォーマンス課題についてのルーブリック							
		観点1（関心・意欲・態度）				観点2（数学的技能）		
	5	①班の人たちと協力して、積極的に測定をしている。 ②既習事項を用いて長さを求めようと計算に取り組んでいる。 ①，②の両方でできている。			5	余分な角の大きさを測ることなく、最小限の情報で適切に計算できている。		
	3	①，②の片方しかできていない。			4	最小の情報ではないが、きちんと長さを求めることができていない。		
	1	取り組んではいるが、班の人たちと協力できない。			3	計算をしようとはしているが、できていない。		
	0	興味・関心を示さず、何もしようとしない。			2	計算ではなく、紐の長さを頼りにするなど正確な求め方でない。		
					0	計算を全くしようとしない。		
	※ ヒントカードを使った場合は1点減点とする。							
	※ 誤差が大き過ぎる場合は1点減点する。							
	6	育成したい能力（キャリア教育の観点から）						
問題解決力		限られた（与えられた）情報をうまく利用して、問題を解決する。						
論理的思考力		課題に対して、いかにして学習した内容を活用していくのかを考える。						
仲間と協力する力		班の人たちと役割分担したり、相手の意見を聞いたり、自分の意見を伝えるなど協力して、課題に取り組む。						