

## 軌跡と領域における単元を見通した指導について

### 1 はじめに

本校の生徒は落ち着きがあり、授業に意欲的に参加し、どんなことにも真面目に取り組める生徒がほとんどである。しかし、自分に自信がなく、標準的な学力が身に付いているにもかかわらず、勉強が苦手、数学が苦手だと感じている生徒も多くいる。そのため、学力こそ低くはないものの上を目指す気持ちに乏しく、自分の身の丈に合った大学を選んで進学していく生徒が多くいる。

現在第3学年を担当しており、第一の目標は、大学進学後も活用できる学力を身に付けさせることであるが、その過程で「数学的な見方や考え方」のよさを認識させ、事象の考察に活用できるような力を身に付けさせたい、と考え実践を行った。

### 2 指導計画

#### (1) 指導学年, 科目, 単元名

指導学年：第3学年文型

科 目：数学Ⅱ

単 元 名：軌跡と領域

#### (2) 単元目標

- ・座標や式を用いて、直線や円などの基本的な性質や関係を数学的に表現することができる。
- ・軌跡について理解し求めることができる。
- ・直線や曲線によって分けられる領域と不等式との関係について理解し活用できる。
- ・今まで習ったことを生かし、発展問題を解くことができる。

#### (3) 単元計画

単元の評価規準								
①関心・意欲・態度		②数学的な見方や考え方		③数学的な技能		④知識・理解		
数学的活動を通して、軌跡と領域における考え方に興味をもち、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを事象の考察に積極的に活用しようとする。		数学的活動を通して、軌跡と領域における数学的な見方や考え方を身に付け、具体的な事象を数学的に捉え、論理的な思考を行うことができる。		軌跡と領域において、事象を数学的に考察し、表現・処理する仕方や持論の方法を身に付け、よりよく問題を解決することができる。		軌跡と領域における基本的な概念、原理・法則、用語・記号などを理解し、基礎的な知識を身に付けている。		
時限	学習内容 <small>数学的活動の位置付け</small>	学習活動	評価の観点				評価規準	評価方法
			①	②	③	④		
1	基本的な軌跡 C	軌跡に関する基礎問題を解く。 (グループ学習)				○	与えられた問題を、途中式も含めてしっかり記述し、最後まで解けている。	観察 小テスト 振り返りシート
2	領域 A1, A2, B	領域に関する問題を解く。 (ペア学習)	○				不等式の表す領域を図示し、それを利用して解いている。また、それらを発表できる。	観察 ノート 振り返りシート

3	応用問題挑戦 C 本時	基礎問題を1問, 応用問題を2問解く。		○	前時の内容を振り返り, 更に解説を聞くことにより, 各自が自力で応用問題を解ける。	観察 ノート 振り返りシート
4	発展問題挑戦 D	難易度の高い発展問題に挑戦する。		○	今まで習ったことを生かして, 自力で問題を解けるか。	観察 プリント回収

(4) 本時の目標 (思考力・判断力・表現力を育成する授業を取り上げる)

不等式の表す領域を図示し, 題意を掴み, 直線及び曲線と領域の共有点の関係を説明できる。

(5) 本時の主となる課題 (発問) とその設定理由

発展問題に挑戦させても, 数学が苦手だと感じている生徒は途中で手を止めてしまい, 答え合わせの時間を待つのみである。そこで, 前時の2回分で基礎的な問題を復習し, 更にはペアワークで最後まで解き切ることを経験させる。本時で扱う問題は容易に解ける問題ではないが, ペアワークを通して基礎の定着を図り, ポイントを絞って発展問題を解説し合い, 全員が発展問題を最後まで解けるようにしたい。

(6) 本時の展開

	学習内容 数学的活動の位置付け	学習活動	指導上の留意点・評価
導入	宿題プリントを見ながら, 前回の内容を振り返る。 (5分)	各自で前時の振り返りをする。	机間指導を行い, 質問等にはできるだけ答えるようにする。
展開	宿題プリントの答え合わせをペアで行う。 (10分)  代表生徒が問題の解説を行う。 (15分)  類題を解く。C (15分)	分からない箇所を隣同士で教え合い, お互い理解し, 他人に説明できるようにする。  領域を図示することと, 共有点を求めることを説明する。  類題を配付し, 「抜き打ちテスト」という名目で, 各自で問題を解く。	<ul style="list-style-type: none"> <li>領域を図示できているかを確認し, 図示できていないペアにはヒントを与えるようにする。</li> <li>解けないと諦めているペアにもヒントを与えるようにする。</li> </ul> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>領域Dをしっかり図示でき, 直線と円との共有点を考えることができる。</li> </ul> </div>
まとめ	本時の振り返り。(5分)	テストを提出した後に, 解答を受け取る。 振り返りシートを記入, 提出する。	振り返りシートから生徒の理解度をほかり, 次時に解かせる問題を考える。

(7) 評価規準と評価方法 (思考力・判断力・表現力を見取るために工夫した点)

学習の目標 (観点)	評価方法	評価規準	十分満足できると判断する状況 (a)	努力を要すると判断された生徒への対応 (c)
		おおむね満足できると判断できる状況 (b)		
不等式の表す領域を図示し, 題意を掴み, 直線及び曲線と領域の共有点の関係を説明できる。 (数学的な見方や考え方)	観察 確認テスト 振り返りシート	確認テストにおいて, 不等式の表す領域を図示し, (1)まで解けている。	確認テストにおいて, 不等式の表す領域を図示し, (2)(3)まで解けている。	基礎プリントを配付し, 業後の時間などを使って補充授業を行う。

(8) 学習活動の工夫（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

	主体的な学び	対話的な学び	深い学び
実践内容	前時までの活動内容を振り返ることで、問題解決に向けての見通しをもつことができる。最後まで粘り強く取り組ませるために、ペア学習やグループ学習を取り入れる。	答え合わせは生徒に板書させるだけでなく、授業形式で説明をさせるようにしている。またグループ学習を通して、領域と不等式の関係について話し合ったり教え合ったりさせる。	今まで習ったことをもとに、発展問題に挑戦し、粘り強く最後まで解かせるようにする。自分の解き方を他者と共有できるよう、グループ学習を取り入れる。

3 実践報告と考察

(1) 学習活動について

前時では、ワークシート①（資料1）の答え合わせと、各自が用意していた問題を発表し、解説が必要な問題については簡単に解説を加えた。残り時間が少なくなってきたところで、ワークシート②（資料2）を配付し、少し考えさせた後に授業が終了した。残りは宿題とした。本時は、その答え合わせから始まった。最初に宿題をやってきたかの確認をしながら、生徒の理解度を机間指導しながら確認した。その後はペアワークに移り、ペアごとに答え合わせをしながら理解を深めていった。ワークシートの中に「解法の手順」を書かせる欄を設け、生徒に書かせた。全員が「領域を図示する」という点を押さえており、また書き方に差はあるが「共有点の座標を求める」といった点も押さえられていた。ペアワークの後に、生徒を指名して、黒板を使って解説させた。説明を聞いている生徒たちの表情や、メモを取る生徒の姿から、生徒たちが一所懸命理解しようとしていることが分かった。

【資料1 ワークシート①】

10/1 課題 ペアワーク		( )組( )番 名前( )
① $x^2 + y^2 - 2y \leq 5, y \geq 0$ の範囲において、(1) $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。 ① 個人で問題を解く。 ② ペアワークで完璧な解答を作る。 ③ 上記の問題を発展させて、(2)を作成し、解答も作成せよ。	② $x, y$ が不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 8, 3x + 2y \leq 12$ を満たすとき、 (1) $3x + 4y$ は $x = \text{ア}$ , $y = \text{イ}$ のとき最大値 $\text{ウエ}$ をとり、 $x = \text{オ}$ , $y = \text{カ}$ のとき最小値 $\text{キ}$ をとる。 ① 個人で問題を解く。 ② ペアワークで完璧な解答を作る。 ③ 上記の問題を発展させて、(2)を作成し、解答も作成せよ。	

【資料2 ワークシート②】

10/4 課題 ペアワーク		( )組( )番 名前( )
① $xy$ 平面において、不等式 $3x^2 + 7xy + 2y^2 - 9x - 8y + 6 \leq 0$ の表す領域を $D$ とする。 (1) 領域 $D$ を $xy$ 平面上に図示せよ。 (2) 点 $(x, y)$ が領域 $D$ を動くとき、 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。	② 領域の問題を解くにあたって、解法の手順を書け。 ① ②	



【グループワークの様子】



【ペアワークの様子】



【発表の様子】



【解説の様子】

生徒の説明が終わった後、少し解説を加え、その後に小テスト（資料3）を行った。テストを回収した後に、振り返りシート（資料4）を配付し回収した。

【資料3 小テスト】

10/5 課題 個人学習(確認テスト) ( )組( )番 名前( )

- 1 実数  $x, y$  が2つの不等式  $x^2 + y^2 \leq 1, x - y \leq 0$  を同時に満たすとする。
- (1)  $x$  の最大値を求めよ。
  - (2)  $x + y$  の最大値と最小値を求めよ。
  - (3)  $y - \sqrt{5}x$  の最大値と最小値を求めよ。

3回の授業を通して、軌跡と領域に関するさまざまな問題を解かせた。ただ単に解き方を暗記させるのではなく、作問させたり、解法の手順を書かせたりした。また、ペアワークを積極的に取り入れ、更に生徒に授業形式で解説を行わせるなどした。このような取組によって、数学を苦手としている生徒も積極的に授業に参加し、また得意な生徒も生き生きと授業を受けていたように思う。

生徒のコメントの一部を箇条書きにて紹介する。

- ・作問することで、作成者の意図が分かるようになることが分かった。
- ・領域の問題は図示を間違えたら終了。
- ・一つの分野でもこんなに多くのパターンや考え方があることが分かった。
- ・単に公式を覚えているだけでは太刀打ちできないと再確認した。
- ・作問することで、問題の本質が分かる。

- ・ペア学習では自分が分からなくても理解しようと頑張ることができる。
- ・図示することが大事であることが分かった。
- ・ペアで話し合うことで理解が深まると思った。
- ・作問することで問題の真意が分かり、実際に出る問題の予測ができる。
- ・作問するときは、求めたいものを決めて、逆算して解法を決定するので大変。
- ・作問することで、自分自身がその問題を理解しているかが分かる。
- ・解けても人に説明できないとダメだと思った。

ペアワークは生徒にとっては心強く感じられるようであり、積極的に取り入れてほしいという意見が多かった。今回取り入れた作問についても好評であった。

【資料4 振り返りシート】

**振り返りシート** ～ 3回の授業を振り返ってみよう。

3年1組 ( ) 番 氏名 ( )

【第1時間目】領域を含む最大・最小①  
 (2)を各自(各ペア)で考え、解答を作成。(問題作成)  
 評価→→ A 完璧な解答を作成している。  
 B 領域を図示し、直線の傾きを考えている。  
 C 領域を図示できない。

【第2時間目】領域を含む最大・最小②  
 解法の手順を書く(説明できるように)  
 評価→→ A 問1を解くことができた。解法の手順も書けた。  
 B 問1は解けなかったが、図示はできた。解法の手順は書けた。  
 C 問1の領域を図示できなかった。解法の手順が書けなかった。

【第3時間目】領域を含む最大・最小③  
 確認テスト  
 評価→→ A 確認テストで正解できた。  
 B 領域を図示することができた。  
 C 領域を図示できなかった。

自己評価	先生の評価
【第1時間目】	【            】
【第2時間目】	【            】
【第3時間目】	【            】

1) ペアワークについて

1) しっかりとペアワークを行うことができましたか? 1・2・3・4・5

2) 発展問題を作問することができましたか? 1・2・3・4・5

3) 今後の授業に積極的に取り入れて欲しいですか? 1・2・3・4・5

4) 成績向上に繋がると感じますか? 1・2・3・4・5

2) 作問について  
 作問することの意義は何だと思いますか?

3) 理解度  
 領域を含む最大・最小の授業を通して理解は深まりましたか? 1・2・3・4・5

4) 3回の授業で気付いたこと。まとめ。

## (2) 評価（と評価結果の生徒への還元）について

生徒の振り返りシート(自己評価)の集計結果を以下に示す。

	自己評価			教員評価		
	a	b	c	a	b	c
1 時間目	8	18	2	11	17	0
2 時間目	10	15	3	10	18	0
3 時間目	4	16	8	13	9	6

1 時間目は領域の問題を扱った。作問し、自分たちで解答を作成するという内容で、ペアワークを取り入れた。予想どおり求積の問題が幾つかあったものの、一次関数の傾きを変えて最大・最小を求めさせるなどの問題が多く、こちらの意図する授業展開となった。しかし、完璧な解答を書いたペアが少なく、「 $\sim=k$  とおく」などの書き方も細かく指導する必要があった。

2 時間目は円の半径の最大・最小を求める問題を扱った。今までに解いたことがないパターンの問題であったが、生徒はよく考えて正解までたどり着いていた。解法の手順も「この問題の解法の手順」なのか、それとも「領域の問題を解くときの一般的な解法の手順」なのかで迷った生徒が多数いたが、いずれも、しっかり書けていた生徒が多くいた。

本時が 3 時間目である。評価は確認テストで行った。生徒の自己評価の観点では

a 「正解できた」、b 「領域を図示できた」、c 「領域を図示できなかった」

としたが、こちらの評価としては

a 「最大・最小の位置を図示できた」、b 「領域を図示できた」、c 「図示できなかった」

とした。計算ミスによる不正解でも a 評価となるように配慮した。

テストを採点したところ、時間内に完璧な解答を作成できた生徒は 4 名しかいなかった。しかし、領域を図示し、最大値と最小値を取るときの直線まで図示できた生徒は 13 名いた。この生徒たちを a 評価とした。また、6 名の生徒を c 評価とした。6 名とも円と直線は図示できているものの、不等式が表す領域を示すことができなかった。この生徒たちにはプリントを再度配付し、業後に補充を行った。

### (3) 数学的活動の中での位置付け

前時の振り返りをさせる場面では、教員主導ではなくペアワークを用いた。それによって、全ての生徒が活動することができた。また、頻繁に授業で取り入れている「生徒が先生役となる」活動では、生徒が問題の本質を理解できているかどうかを確認することができる。説明している生徒はもちろんのこと、聞いている生徒の表情やメモを取る様子をよく観察し、「分からなければ質問しなさい」と声かけをした結果、ペアの生徒も積極的に質問や補足をしている。3 回の授業を通して、「領域を図示し、最大・最小は図で考えることが大事」だと生徒は理解し、最後の確認テストに臨んだ。その結果、評価もしやすく、生徒も「どこまでできればいいのか」という自己評価がしやすかったように思う。

### (4) 学習活動の工夫（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

ペアワークによって、全ての生徒が授業に参加することができた。数学が苦手な生徒も生き生きと活動をしていた。数学が苦手な生徒同士のペアもあったが、苦手なりにお互い声をかけ合って解答の作成にがんばって取り組んでいた。

また、「生徒が先生役となる」活動は、生徒も発言や質問がしやすく、理解を深めるのに一役買っている。1 年次より実施しているが、生徒アンケートではおおむね好評である。自分が説明するのは嫌だ、教員の説明の方が分かりやすいという意見もあるが、「自分が説明するためには問題の本質を理解

しなきゃいけないからためになる」「質問が気楽にできるし、補足もできるからおもしろい」という意見も多くあった。

発展問題に関しては自力で解けるようになるのが目標ではある。しかし、数学が苦手な生徒はすぐに諦めてしまうし、得意な生徒も解けたら終わりになってしまうので、グループワークやペアワークを取り入れることによって両方にメリットがある。苦手な生徒は最後まで粘り強く問題に向かうことができ、得意な生徒は苦手な生徒に教える中で、より理解が深まっていくからである。

## 4 まとめ

### (1) 成果

以前は、2年次の数学Ⅱにおいて領域を図示する問題を扱う際には、基本問題に取り組む程度であった。しかし、今回、軌跡と領域の発展問題をペアワークや作問、解法の手順を明らかにさせることなどを取り入れたことで、生徒の理解は深まったと思われる。最後の確認テストも、領域を図示することができなかつた生徒がいたものの、どういうときに最大値や最小値をとるのかについてはほとんどの生徒が理解できるようになった。あらかじめ生徒には、きちんと図示した上で解けるかどうかを評価すると伝えていたため、ほとんどの生徒が丁寧に図形を書き、それをもとに問題を解いていた。評価規準を明らかにすることで授業の方針も明確になり、生徒も理解しやすいことが再確認できた。

### (2) 課題

生徒のコメントの中に、「双方が理解していない場合、話し合いが全く進まなくて意味がない」というものがあつた。ペアワークを取り入れる場合は、ペアの組み方も工夫しなければいけない。また、相変わらず生徒の計算ミスが多く、せっかく問題を理解しても正解までたどり着かない生徒もたくさんいる。「思考力・判断力・表現力」を見取るという目的で取り組んだ場合に、考え方は合っているにもかかわらず計算ミスにより不正解だった場合の評価方法について再考する必要がある。

振り返りシートで生徒が自分で判断した理解度は、平均すると3.5点(30名、満点5.0点)となっている。基本的に自己評価の点数を低めに付ける生徒たちではあるが、少し低めの点数ではある。もう少し問題配列を工夫するなどしていく必要がある。

## 5 おわりに

今回のように、評価規準を明確にしていくことや、ペアワークを用いることによって、数学が苦手な生徒でも授業に積極的に参加し、成果を上げることができることが分かった。3年生ということで、目前にセンター試験を控え、年度後半は更に多くの問題を解かせていくことが必要になってくる。しかし、今回のように問題を解く上でのポイントを明確にし、時折ペアワークを取り入れるなどして、今後も生徒が積極的に参加しやすい授業展開を心がけていこうと思う。