数列における単元を見通した指導について

１　はじめに

本校は普通科と総合ビジネス科の併設校で，第２学年は普通科５クラス，総合ビジネス科２クラスで構成される。２年生に限らず，多くの生徒が素直で，こちらが提示した課題には真面目に取り組むことができる。しかし，学習に対しての興味・関心があまり高いとは言えず，自主的に学習に取り組むことに課題がある。

本報告は，理系２年生の生徒を対象に，漸化式の導入において「数列の一意性」に目を向けてもらうために行った試みに関するものである。高等学校数学科の授業は，指導する事柄（定義・定理など）を始めに与え，その事柄を用いて問題を解く，という形式で行われることがほとんどではないかと思われる。特に，数列，とりわけ漸化式に関しては，漸化式で定義された数列の一般項を求めるための解法に重点を置かれることが多いのではないだろうか。そのためか，数列の漸化式での定義は一意性という点において優れた定義であることを生徒が認識することはまれであると思われる。そこで，漸化式での定義の優位性を認識するために，数列の具体的な項の値から一般項を類推するという方法では一意性が必ずしも得られないことを生徒自身の体験から学んでもらうということを試みたい。この試みを通して，生徒たちに与えられた漸化式から一般項を求めることの意義を少しでも感じてもらえればと思う。

２　指導計画

(1)　指導学年，科目，単元名

指導学年：第２学年（理系）

科　　目：数学Ｂ

単 元 名：第３章　数列

(2)　単元目標

- 数列の概念を理解し，数列の規則性を見つけ，一般項を求めようとする。
- 等差数列・等比数列の定義や性質を理解し，一般項や和を求めることができる。
- 漸化式から一般項を求めることができる。
- 数学的帰納法を理解し，等式や不等式の証明に利用することができる。

(3)　単元計画

単元の評価規準			
①　関心・意欲・態度	②　数学的な見方や考え方	③　数学的な技能	④　知識・理解
数列の論理や体系に関心をもつとともに，数学のよさを認識し，それらを事象の考察に積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとする。	事象を数学的に考察し表現したり，思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して，数学的な見方や考え方を身に付けている。	数列において，事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付けている。	数列における基本的な概念，原理・法則などを体系的に理解し，知識を身に付けている。

時限	学習内容 数学的活動の位置付け	学習活動	評価の観点				評価規準	評価方法
			①	②	③	④		
1	数列と一般項 Ａ２	数列の概念を理解し，数列の規則性を見つけ，一般項を求めようとする。	○				与えられた一般項から具体的な項を求めようとする。	発問に対する反応
2	等差数列 Ｂ	等差数列の定義や性質を理解し，一般項を求めることができる。		○			等差数列の一般項を求めることができる。	ノートの観察
3	等差数列の和 Ｃ	和の公式を利用して，いろいろな問題を解くことができる。			○		等差数列の和を求めることができる。	ノートの観察
4	等比数列 Ｂ	等比数列の定義や性質を理解し，一般項を求めることができる。		○			等比数列の一般項を求めることができる。	ノートの観察
5	等比数列の和 Ｃ	和の公式を利用して，いろいろな問題を解くことができる。			○		等比数列の和を求めることができる。	ノートの観察
6	和の記号 Σ Ｃ	公式を利用して，和を求めることができる。				○	Σ記号を自由に活用できる。	ノートの観察
7	階差数列 Ｃ	階差数列の定義や性質を理解し，もとの数列の一般項を求めることができる。			○		与えられた階差数列をもつ数列の一般項を求めることができる。	ノートの観察
8	いろいろな数列の和 Ｄ２	部分分数分解などの工夫を見つけようとしている。				○	和の求め方を活用することができる。	ノートの観察
9	漸化式 Ａ２ 本時	漸化式から一般項を求めることができる。		○			与えられた数列を等差数列や等比数列に帰着できる。	ノート及びワークシートの観察
１０	数学的帰納法 Ｂ	数学的帰納法を理解し，等式や不等式の証明に利用できる。			○		数学的帰納法を用いて等式を証明できる。	ノートの観察

(4) 本時の目標

数列の初項から第３項までの値から一般項を類推する難しさと多様な解があることを通して，漸化式の有用性（主に一意性）を伝える。

(5) 本時の主となる課題（発問）とその設定理由

- 数列の一般項を考える。
- 初項から第３項までの数列から一般項の類推をする。
- 出題者の一般項と解答者の一般項が一致しているかどうかを確認する。

上記の手順を踏ませた上で，出題者の一般項と解答者の一般項が一致していない例が出ることを期待する。その例をもとに，数列の具体的な項の値から特定の一般項を導くことの難しさ（一意性のなさ）を伝え，漸化式（数列の帰納的定義）の導入としたい。

(6) 本時の展開

	学　習　内　容 数学的活動の位置付け	学　習　活　動	指導上の留意点・評価
導入	・前回の宿題の答え合わせと本時の授業の説明	・前回の内容を宿題の答え合わせを通して振り返る。 ・本時の取組の説明を聴く。	・ワークシートを配布し，本時の内容を説明する。
展開	・数列の一般項を自分で考え，第１項から第３項までを書き並べる。 ・ペアをつくり，自分の数列（初項から３項）をペアに見せ，互いに一般項を類推する。 Ａ２ ・一定の時間が経過したところで答え合わせをする。	・数列の一般項を自分で考える。（等差･等比数列でなくてもよい。） ・ペアの人に自分の数列の一般項を類推してもらうとともに，相手の数列の一般項を類推する。 ・解答者の一般項が，出題者の提示した３項を満たしているかどうかを確認する。 ・時間に余裕があれば，出題者と解答者の一般項が一致していない例を発表する。	・相手の数列の一般項を類推する際，複数の可能性はないかを確認する。 ・出題者と解答者の一般項が一致しているかどうかを確認する。 ３項からの類推では，一般項の一意性が保たれないことを確認する。
まとめ	・本時のまとめと次回の予告（漸化式）をする。	・まとめを聴く。 ・ワークシートを提出する。	・板書等を利用して本時のまとめを行う。

(7) 評価規準と評価方法（思考力・判断力・表現力を見取るために工夫した点）

学習の目標（観点）	評価方法	評価規準 おおむね満足できると判断できる状況（ｂ）	十分満足できると判断する状況（ａ）	努力を要すると判断された生徒への対応（ｃ）
与えられた数列の項から一般項を類推するとともに一意性の重要性を知る。(数学的な見方･考え方)	ワークシートの記述及び観察	与えられた３項から一般項をその手順も含めて類推することができる。	３項の値をみたす数列の一般項を複数提示することができる。	机間指導の際に一般項の求め方の一つを提示する。

(8) 学習活動の工夫（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

	主体的な学び	対話的な学び	深い学び
実践内容	与えられた数列の一般項を求めるのではなく，出題者の立場となって一般項を用意し，その数列の具体的な項（初項から第３項まで）から一般項が求められるかを確認する（ペアの人に確認してもらう）。	ペアワーク（出題と採点）で出題者の用意した一般項と解答者の一般項が一致するかどうかを検討する。	まとめの際に，漸化式の定義における数列の一意性について認識をする。

３　実践報告と考察

(1) 学習活動について

ア　実践報告

個人で考える部分（作問）に関しては，こちらが想定するより時間がかかった生徒が多かった。作問に時間をかけたにも関わらず，“奇抜”な数列を挙げる生徒は皆無であった。特に，等差数列（自然

数の列，奇数の列，偶数の列）を例に挙げた（出題した）生徒が 16 人中 11 人もいた。この時点で，今回の意図（３項目までが一致する複数の数列の提示）から大きく外れてしまう（複数の一般項の提示に時間がかかる）ことに，恥ずかしながら実施後に気が付いた。

一方で，ペアワーク・グループワークに関しては，こちらが想定する以上に積極的に取り組む姿勢が見られた。しかし，話の内容は充実しているとは言い難いものであった。

【個人で考えている様子】

【グループで協議している様子①】

【グループで協議している様子②】

【発表している様子】

イ　考察

まず，今回の授業に関して改善すべき点について述べる。等差数列の例もできれば活用したいのだが，ここまで等差数列に偏ってしまうとここでの意図から外れてしまう。そこで，次の機会では「等差数列・等比数列以外の数列」のようにやや限定された状態で行ってみたい。次にワークシートだが，今回使用したのは（**資料１**）と（**資料２**）である。

ワークシートＢ（**資料２**）に「推測の過程」なども書く（そしてこちらが評価できる）欄を設けるべきであったが，仮に設けたとしても今回のように多くの例が等差数列の場合は「推測の過程」を文章で表現するのは難しいと思われる。(「思いついた」と言われればそれ以上のものは出ない。)やはり，こちらが例（出題）にある程度の制約を設ける必要がある。一方で，第３項までが一致する“別の”一般項に関しては，例えば「$a_n = 2\mathrm{n}$ と$a_n = 4 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{n}$ 」のように，本質的に同じ一般項のものを“別”と『判断』してしまう生徒が少なからずいた（**資料３**）。また，多くの生徒はやや積極性に欠ける部分があり，時間もそれ程与えることができなかったことも相まって「授業の感想」を記入する者が少なかった。

(2) 評価（と評価結果の生徒への還元）について

今回，上述のように，生徒たちのワークシートは等差数列のものばかりで「ほぼ横一線」となって

しまった。（等差数列 11 人，等比数列５人で，等比数列の５例のうち２人は一般項と「初項からの３項」が一致していない。）また，上述のように，初項から第３項までが共通するような２つの数列を考えてほしかったのだが，単なる表記上の違いを“別の”数列と『判断』してしまうことが想定できなかった。やはり今回の主題である「同一の３項をもつ複数の数列」が提示できてこその「評価」であると考える。以上の理由から，今回は「評価」自体が難しい結果となってしまった。今回の反省を基に修正・改善し，「評価」ができるような形に整えて再挑戦したい。

今回の試みで達した一つの仮説の検証をする上でも，生徒たちに『思考力』『判断力』『表現力』を養成することを目標に見据えた知識・技能の習得をさせて，この試みに協力してくれた生徒たちに還元していきたいと考えている。

さらに，今回はグループワーク後に各グループに発表をさせたが，企画者である私よりも生徒たちの方がグループワークや発表そのものには慣れており，発表の仕方についても評価の規準を設けるべきと考えた。次の機会では，発表も『表現力』の観点で評価したい。

(3) 数学的活動（学習過程の位置付け）について

「学習活動について」の「イ　考察」でも述べたが，生徒たちに一定量以上の知識が定着していない現状はあるが，活発なグループワークを行うための工夫や働きかけが必要であることを痛感した。活発な議論が行われるとは，生徒たちが「主体的」に発言し，「対話」において相手の意見を冷静に「判断」し，ときには受け入れる姿勢を持ち，より正確に自分の意見を「表現」することであると考える。生徒たちの知識量を的確に把握し，「教え込み」にならないように気を付けながら必要な働きかけを行い，生徒たちの「考える」「判断する」場面をつくっていけるように心がけていきたい。

(4) 学習活動の工夫（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

今回，自分自身は数学の授業としては初めてグループワークを試みたが，数列に対する苦手意識は活動しだいである程度払拭できるのではないかと思われる。グループワークには「主体性」と「対話」があり，それによって「深い」学習効果が期待できるからである。ただ，題材や形式が吟味し切れていないこともあり，今回の２(8)で述べた「主体的学び」や「深い学び」へ向けての工夫に沿うような学びであったとは言い難い。しかし，「対話的な学び」に関しては概ね計画通りであったと思われる。今回の授業から得られた結果を基に，２(8)で述べた「主体的学び」や「深い学び」に向けての活動に昇華できるように検討したい。

４　まとめ

(1) 成果

「成果」と呼べるものは得られていないが，本校に通う生徒たちについて，新たな指導の指針が得られた。「思考力・判断力・表現力」を身に付けさせるためには，その基本となる知識・技能をしっかりを身に付けさせなければならこともちろん大切である。しかし，それ以上に生徒たち自ら「考える」「判断する」ための発問や課題設定を工夫すること，そして「表現する」場面の設定を行うことが重要であることに気が付いた。この経験を生かして今後の指導の方向性を再構築したい。

(2) 課題

まずはこの授業形式を「評価」を前提とした形に昇華させたい。そのためには，「知識・技能」「思考力・判断力・表現力」の二つの観点について，どのような学習活動を行い，どのような方法で評価するかを明確にしなければならないということが分かった。

また，“n^n”や“$3^n \cdot (n-1)^n$”のような「奇抜」な数列の例（理系のもう一方のクラスの生徒が実

際に挙げたもの）が出てくるような，ある種の「ゲーム性」を学習活動の中に組み込み，生徒の興味・関心を引き出すような仕掛けも検討したい。

５　おわりに

今回，このような試みをする機会をいただき，有意義な考察・検討をすることができた。その中で，自分一人では発見できないような見落としなどを研究会の中で御指摘いただいた。この研究会での御指摘などからさまざまなことに気付くことができ，今後それを生徒に還元していきたいと思う。

【資料１　ワークシートＡ】

ワークシートA

1.　数列の一般項

$a_n =$

2.　数列の初項から第3項まで

$a_1 = \boxed{}$,　$a_2 = \boxed{}$,　$a_3 = \boxed{}$, $\cdots$

（この3項をワークシートのB 1．に転記する．）

3.　ワークシートBの結果から，この出題では複数の正解が存在してしまうことがわかる．では，正解が1つになるようにするためには，どのように出題すればよいか．

4.　この授業の感想

2年（　　）組（　　）番　氏名（

【資料２　ワークシートＢ】

ワークシートＢ

問.　数列の初項から第３項までがそれぞれ次の数であるような数列について考える.

$a_1 = \boxed{}$ ，　$a_2 = \boxed{}$,　$a_3 = \boxed{}$ ，…

（この３項はワークシートＡの２. を転記したもの　　出題者：　　　　　　　　　　）

(1)　第４項，第５項，第６項それぞれ

$a_4 = \boxed{}$ ，　$a_5 = \boxed{}$ ，　$a_6 = \boxed{}$ ，…

（この３項をワークシートのＢ 1. に転記する.）

と推測できる.

(2)　一般項は,

$a_n =$

と推定できる.

(3)　与えられた数列の一般項は，(2)以外で

$a_n =$

とも考えられる.

２年（　　）組（　　）番　氏名（

【資料３　ワークシートＢ（生徒記入例）】

ワークシート B

問.　数列の初項から第 3 項までがそれぞれ次の数であるような数列について考える.

$a_1 = \boxed{2}$,　$a_2 = \boxed{4}$,　$a_3 = \boxed{6}$, …

（この 3 項はワークシート A の 2. を転記したもの　　出題者：　○○○　○○　　）

(1)　第 4 項，第 5 項，第 6 項それぞれ

$a_4 = \boxed{8}$,　$a_5 = \boxed{10}$,　$a_6 = \boxed{12}$, …

（この 3 項をワークシートの B 1. に転記する.）

と推測できる.

(2)　一般項は,

$a_n =$ 2n

と推定できる.

(3)　与えられた数列の一般項は，(2)以外で

$a_n = 4 \cdot \frac{1}{2}n$

とも考えられる.

2 年（　　）組（　　）番　氏名（