

## 数学Ⅲ「不定積分」における単元を見通した指導について

### 1 はじめに

本校は岡崎市の東部に位置しており、1学年が総合学科6クラスで編成されている。開校44年目を迎え、総合学科に改編して11年目となる。進学型総合学科として、普通科進学校と変わらない進学体制と科目選択の柔軟性の両面をもっている。

本校の生徒は落ち着いていて素直な生徒が多い。だが、自分で考えて行動するという面では物足りなさがある。そしてメンタル面で弱さのある生徒が増えており、個々に応じた対応が必要である。

数学の授業においても、問いに対しての発想力をもっているが、表現することができない生徒が多くいる。そこで、生徒が自身で考えた数学的な見方等を表現し、相手に伝える力を少しでも身に付けさせたいと考えた。それによって、数学に対してだけでなく、学校生活のあらゆる面でも自信につなげることができるのではないかと期待し、主題を設定した。

### 2 指導計画

#### (1) 指導学年, 科目, 単元名

指導学年：第3学年 自然科学系列（理系国公立大学進学希望）及び環境系列（理系私立大学進学希望）

科 目：数学Ⅲ

単 元 名：積分法とその応用 不定積分

#### (2) 単元目標

いろいろな関数についての積分法を理解し、問題解決に意欲的に取り組む姿勢を身に付ける。特に、置換積分と部分積分について、その有用性を理解し表現する力を身に付ける。

#### (3) 単元計画

| 単元の評価規準                       |                                  |  |       |   |   |  |                                      |      |
|-------------------------------|----------------------------------|--|-------|---|---|--|--------------------------------------|------|
| ①関心・意欲・態度                     |                                  | ②数学的な見方や考え方                                  |       | ③数学的な技能   |   | ④知識・理解                                     |                                      |      |
| 不定積分について関心をもち、事象の考察に活用しようとする。 |                                  | 置換積分法や、部分積分法を理解することにより、具体的な事象の考察に活用することができる。 |       | 具体的な事象において、必要に応じて置換積分法や部分積分法を用いながら、的確に処理することができる。 |   | 置換積分法や部分積分法を含めた不定積分について理解し、基礎的な知識を身に付けている。 |                                      |      |
| 時限                            | 学習内容<br><small>学習活動の位置付け</small> | 学習活動   | 評価の観点 |   |   |  | 評価規準                                 | 評価方法 |
|                               |                                  |  | ①     | ②   | ③ | ④  |                                      |      |
| 1                             | 不定積分とその基本性質<br>A2                | 不定積分の定義や性質を理解して、不定積分を計算する。                   |       |   | ○ | ○  | 不定積分の定義や性質を理解し、種々の関数の不定積分を求めることができる。 | 観察   |
| 2                             | $f(ax+b)$ の不定積分<br>A2            | 合成関数が1次式であるとき、微分の逆演算を利用して、係数に留意しながら積分する。     |       |   | ○ | ○  | 微分法の逆演算として、不定積分を計算することができる。          | 観察   |
| 3                             | 置換積分法<br>(1) A2                  | 置換積分の方法を理解し、実際の問題に活用する。                      | ○     |   |   |  | 被積分関数の形の特徴から、置換積分を利用しようとする。          | 観察   |

|   |   |                                     |  |  |   |   |              |
|---|---|-------------------------------------|--|--|---|---|--------------|
| 4 | 置換積分法<br>(2) <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A2</span> , <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">B</span>               | 置換積分の方法を理解し、実際の問題に活用する。             |  |  | ○ | 被積分関数の形の特徴から、置換積分を利用して、不定積分を求めることができる。      | 観察           |
| 5 | 置換積分法<br>(3)・課題研究<br><span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">C</span> , <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">D2</span><br>本時 | 被積分関数の特徴から、置換する式をどのように見つけるか考え、まとめる。 |  |  | ○ | 被積分関数の特徴から、置換する式を見つけて、的確に処理しようとする。          | ワークシート       |
| 6 | 部分積分法<br><span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A2</span> , <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">B</span>                   | 部分積分の方法を理解し、実際の問題に活用する。             |  |  | ○ | 積の微分の逆演算として、部分積分を理解することができる。                | ノート提出        |
| 7 | いろいろな関数の不定積分<br><span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">A2</span> , <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">B</span>            | 被積分関数を工夫して変形し、不定積分を求める。             |  |  | ○ | さまざまな工夫によって被積分関数を求めることで、不定積分を求めることができる。     | 観察<br>ノート提出  |
| 8 | 単元のまとめ<br><span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">B</span> , <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">C</span>                   | 置換積分、部分積分、式変形をして積分など、状況に合わせて積分する。   |  |  | ○ | 被積分関数の形の特徴から、さまざまな関数の不定積分の問題を的確に処理することができる。 | 観察<br>ワークシート |

#### (4) 本時の目標（思考力・判断力・表現力を育成する授業を取り上げる）

不定積分を求めるとき、どの部分を置換して積分すればよいかを考え、具体的な事象に活用する。

#### (5) 本時の主となる課題（発問）とその設定理由

「被積分関数を適切に置換することによって、不定積分を求めることができるようにする。では、「適切に置換」とは？」

置換積分を利用して不定積分を求めることは、これまでに練習を重ねてきているが、具体的な事象を見て、何を置換するとよいか判断する力が求められる。そこで、自分で置換のルールをつくり、そのルールに基づいて置換し、不定積分を求めることができるか考えることが思考力の育成になると考えた。また、ルールを他の生徒に説明できるようにすることも実施して、言語活動の充実にもつながり、表現力の育成にもなると考え、設定した。

#### (6) 本時の展開

|    | 学習内容<br><span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">学習過程の位置付け</span> | 学習活動                    | 指導上の留意点・評価                       |
|----|---|-------------------------|----------------------------------|
| 導入 | 前回の復習   | 置換積分を用いて、不定積分を求める復習をする。 | 置換する式を与えておき、置換積分の方法を身に付けたか確認させる。 |

|     |                         |  |   |
|-----|-------------------------|--|---|
| 展開  | 置換のルール作成<br>C           | 今まで解いた具体的な事象から、どこを置換するかを考え、ルールとして作成する。         | ルールが全く考えられない生徒に対しては、具体的な事象を解くことで、何か見つけられないか指導する。  |
|     | ルールの適用<br>C             | 作成したルールを具体的な事象に適用できるか自分で試し、必要があればルールの修正をする。    | 机間指導をして、ことばで表現することを積極的に行わせる。<br>評価【 <u>数学的な見方や考え方</u> 】<br>具体的な事象を通して、置換する式を見つけて、的確に処理できたか。 |
|     | グループでの話し合い<br>D2        | グループで自分が作成したルールを発表し合い、理解を深める。                  | ルールの発表だけでなく、困っていることなども発表させることで考え方や理解を深めさせる。   |
|     | ルールの適用<br>C             | グループで深めたルールを再度具体的な事象に適用する。                     | 積極的に修正し、具体的な事象に活用できるように指導する。  |
| まとめ | 本時のまとめ<br>フィードバック<br>D2 | ルールを理解し、適用させることができたか確認する。<br>ルーブリックを基に自己評価を行う。 | 自己評価を厳しく行いすぎないように指導する。<br>(本校生徒集団の特徴に対する支援)   |

(7) 評価規準と評価方法（思考力・判断力・表現力を見取るために工夫した点）

ワークシートを用いて実施する（資料1）。あらかじめルーブリックで到達目標を示して、生徒自身による自己評価を行う。評価規準は、自らルールを考えることができたか、ルールを適用して置換積分をすることができたかをワークシートから判断して評価を行う。

| 学習の目標（観点）  | 評価方法         | 評価規準                          |   | 努力を要すると判断された生徒への対応（c）                      |
|--|--------------|-------------------------------|---|--|
|  |              | おおむね満足できると判断できる状況（b）          | 十分満足できると判断する状況（a）                         |  |
| 不定積分を求めるとき、どの部分を置換して積分すればよいかを考え、具体的な事象に活用する。<br>(数学的な見方や考え方) | ワークシート<br>観察 | ルールを適用して具体的な事象で置換積分をすることができる。 | 自分の作成したルールを相手に伝えることができ、具体的な事象で活用することができる。 | 具体的な事象を繰り返し扱い、置換積分を用いた不定積分を求めることができるようにする。 |

(8) 学習活動の工夫（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

|      | 主体的な学び   | 対話的な学び  | 深い学び   |
|------|--|---|--|
| 実践内容 | 置換積分のルールづくりについて、ことばを用いて自ら行い、対話的な学びの後で振り返りをさせる。 | グループに分かれて、作成したルールを発表し合う。また、困ったこと等も話し合うことでルールの改善を行う。 | 具体的な事象においてルールを適応させて、修正を行う。また、個人、グループの取組の2段階で修正を行う。 |

【資料1 ワークシート】

置換積分について

氏名 ( )

目標：関数を適切に置き換えることによって、不定積分を求めることができるようにする。

1 次の不定積分を求めなさい。( ) 内の置換を利用してよい。

(1)  $\int \frac{x+2}{(x-1)^2} dx$  (2)  $\int 2x(x^2+1)^2 dx$  (3)  $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$  (4)  $\int (t-1) \sqrt{t} dt$  (5)  $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$  (6)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \tan x}$  (7)  $\int \frac{1}{z \log z} dz$  (8)  $\int \cos^2 x \sin x dx$

2 次の不定積分を求めなさい。(置換は必ずしも必要ないが、なるべく置換をしよう)

(1)  $\int \frac{1}{x\sqrt{2+x}} dx$  (2)  $\int 3(x^2+2)^2 x dx$  (3)  $\int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$

3 置換のルールについて自分のことばでまとめてみましょう。(時間があたら説明してもらいます)

- 5 フィードバック
- (1) 自分で置換のルールを作成することができたか?   ア   イ   ウ   エ   オ   (ア→オ の順)
  - (2) 相手のルールを聞いて理解を深めることができたか?   ア   イ   ウ   エ   オ   (ア→オ の順)
  - (3) ルールに基づいて積分できたか?   ア   イ   ウ   エ   オ   (ア→オ の順)
  - (4) その他 (感想等)

評価段階

| 評価基準 | A                                      | B                                | C                                    | D                                | E                   |
|------|--|----------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|---------------------|
|      | 置換のルールを説明し、相手に説明できる。それに基づいて積分することができる。 | 置換のルールを理解している。それに基づいて積分することができる。 | 置換のルールを理解している。それに基づいてある程度積分することができる。 | 置換のルールを理解していないが、積分することができるとができる。 | 置換のルールや積分することができない。 |

### 3 実践報告と考察

#### (1) 学習活動について

ルールを考えるという取組に最初は戸惑う様子が見られたが、少しずつことばで表現していた。話し合いの場面では、ある程度ルールができて、ルールに当てはまらない例をどうするか困っていることなどを話し合うグループもあり、考え方や表現力を深めていると感じた。

一方で、問題を繰り返し解くことに固執する生徒も見られ、そのグループの話し合いはあまり深まりがないように感じたが個人で考えを深めていると捉えることもできる。

ワークシートには以下のような記述があった。(抜粋)

次数が大きい方を置換する  $\sqrt{\quad}$  や  $(\quad)$  の中は優先して置き換える  
 置換する式を微分した式と置換しない式が一致するように置換する式を決める  
 $\sqrt{\quad}$  は  $\sqrt{\quad}$  を含めて置換する  $(\quad)$  は  $(\quad)$  の中身だけ置換する

また、記述後に「？」がついている記述も見られ、まだルールに納得できていないことも見られた。

単元全体では、発問を多くして、ことばで説明させる機会を積極的に取り入れたが、徐々に隣同士で話し合う場面が見られるようになった。ノート記述においても、数式だけでなく、ことばを用いてまとめる生徒が増えてきた。

#### (2) 評価（と評価結果の生徒への還元）について

評価については、ワークシートの問題の取組状況を見て b と c の判断をした。話し合いの時間が多かったため、積分して解答を求める時間が少なく、最後まで取り組めていない生徒もいた。

資料 2 は、置換するところまでできている段階のものである。積分したという段階までは到達していないが、この生徒の評価を b とした。この規準で評価付けした結果、c は一人もつかなかった。

#### 【資料 2 ワークシートの生徒の記述①】

1 次の不定積分を求めなさい。( ) 内の置換を利用してよい。

(1)  $\int \frac{x+2}{(x-1)^3} dx$  ( $t=x-1$ ) (2)  $\int 2x(x^2+1)^3 dx$  ( $t=x^2+1$ ) (3)  $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$  ( $t=1+\sin x$ )

$t=x-1$  とおくと  $x=t+1$   $t=x^2+1$  とおくと  $\frac{dt}{dx} \cdot 2x$   $t=1+\sin x$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = \cos x$

$\frac{dx}{dt} = 1$   $\therefore dx = dt$   $dt = 2x \cdot dx$   $dt = \cos x dx$

$\int \frac{t+3}{t^3} dt = \int (\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^3}) dt$   $\int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C$   $\int \frac{1}{t} dx = \log |t| + C$

$= \int (t^{-2} + 3t^{-3}) dt = \frac{1}{4} (x^2+1)^4 + C$   $= \log |1+\sin x| + C$

$= -\frac{1}{t} - \frac{3}{2t^2} + C = -\frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + C$

2 次の不定積分を求めなさい。(置換はどのようにおいてもよい。余裕があれば積分する)

(1)  $\int x\sqrt{2+x} dx$  (2)  $\int 3(x^3+2)^2 x^2 dx$  (3)  $\int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$

$t=\sqrt{2+x}$  とおくと  $t^2=2+x$   $x=t^2-2$   $t=x^3+2$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 3x^2$   $dt=3x^2 \cdot dx$   $t=e^x+x$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = e^x+1$   $dt=e^x+1 \cdot dx$

$\frac{dx}{dt} = 2t$   $dx=2t dt$   $\int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C$   $\int \frac{1}{t} dt = \log |t| + C$

$\int (t^2-2) \cdot 2t dt = \int (2t^4 - 4t^2) dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{4}{3} t^3 + C$

次に、ルールを相手に伝えることができたかは授業内の話し合いの観察（積極的にルールを伝えて  
いるかどうか）によってaとするかどうか判断した。また、ワークシートに示したフィードバックや  
ループリックで自己評価をさせたので、それも参考にした。資料3は、観察においても積極的にルー  
ルを伝えていたものである。話し合いも積極的に行っており、感想にもあるが、説明の難しさ等も感  
じることができていることが読み取れるため、この生徒を含め、aは5人（24人中）と評価した。

【資料3 ワークシートの生徒の記述②（抜粋）】

3 置換のルールについて自分のことばでまとめてみましょう。  
(時間があったら説明してもらいます)

置換する式と、ひた式を見比べて、置換する式を微分した式と、置換しない式が一致  
するものに、置換する式を決める。

5 フィードバック

(1) 自分で置換のルールを作成することができたか?     ア  イ ウ エ オ (ア→オ の順)

(2) 相手のルールを聞いて理解を深めることができたか?     ア  イ ウ エ オ (ア→オ の順)

(3) ルールに基づいて積分できたか?      ア イ ウ エ オ (ア→オ の順)

(4) その他(感想等)

明確に説明できなくてとても難しいと感じた。

評価については、「置換積分の方法を伝えることができたか」と「置換積分をして計算ができたか」  
の二つの観点が入ってしまったため、どちらかに絞って評価をすべきであった。また、「置換積分をし  
て計算ができたか」という観点についても「置換できた」という観点のみで評価を設定することもで  
きたため、評価の観点の設定の難しさを感じた。また、評価規準について、より具体的かつ明確に焦  
点を絞らないと評価ができないことを痛感した。

事後指導として、教員側から「ルールはこうです」という説明はせずに、生徒自身が考えたルー  
ルを答えとすることを話して還元した。その後、部分積分等も扱いながら置換積分に関するルールを必  
要ならばワークシートに書き込む、ノートにまとめ直す等、各自で修正をするように指導した。

生徒の感想では、ルールをことばで設定するのは難しいという意見があった。実際、生徒の自己評  
価においてもうまく表現できないと感じている生徒が多かった。しかし、具体的な事象を見ると、適  
切に置換を利用して不定積分を求めることができている生徒が多くいた。

(3) 数学的活動(学習過程の位置付け)について

授業の中で数学的活動を取り入れることは簡単そうで難しい。しかし、単純に問題を解くことがで  
きるかどうかだけに捉われやすい中で、疑問をもちながら問題を解くことや、試行錯誤して問題を解  
くという姿勢を身に付ける授業を取り入れることは効果的であると感じた。

(4) 学習活動の工夫(主体的・対話的で深い学びの実現に向けて)

話し合う時間や振り返る時間を設定したことで、徐々に生徒同士で対話する場面が増えてきた。ま  
た、場面を設定しなくても放課や授業後等も含めて数学の問題等について対話的に学習を深める場  
面が増えてきたことは学習活動全体という視点から見ても大きな効果があったと考える。



## 4 まとめ

### (1) 成果

与えられた問題を解くだけでなく、置換積分についてのルールを考える時間を設定したことで、生徒が置換積分を抵抗なく解く姿勢が見られた。また、今回の活動後、部分積分や式変形でもことばで説明させることを随時取り入れた。具体的には以下のような場面を設定した。

部分積分  $\int f(x)g'(x)dx$  では、二つの関数のうち、 $f(x)$ 、 $g'(x)$ をどう設定するか

式変形では、 $\int \frac{1}{x(x+1)}dx$  はどのように変形すれば積分できるか

いろいろな考えが出ることを想定して、 $\int \sin x \cdot \cos x dx$  をどう積分するか

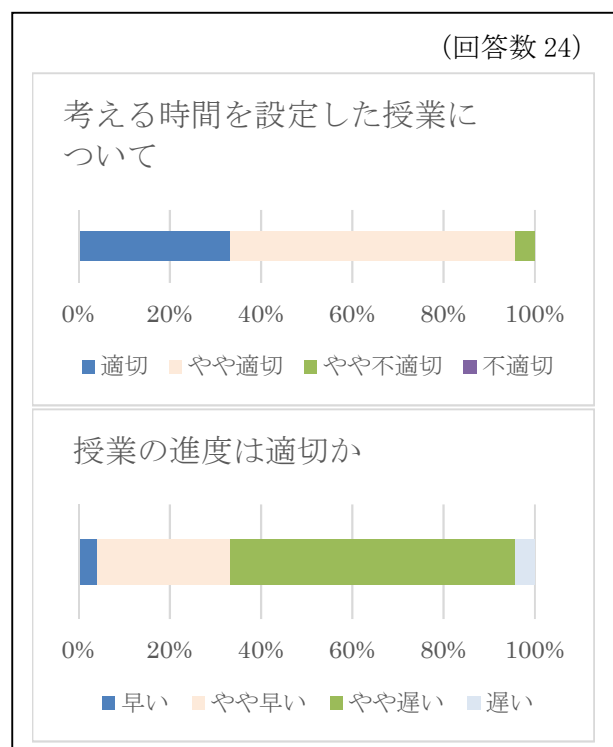
これらの場面において、グループの話し合いは設定しなかったが、隣同士で積極的に話し合い、生徒が自分の考えを深めたり修正したりする様子が見られるようになった。

### (2) 課題

グループで話し合いをしたが、クラス全体で話し合う場面を設定すれば、より深い還元ができるとも考えたが、特定の生徒の考えがそのままクラス全体の意見になってしまうことを懸念し、グループでの話し合いにとどめた。それぞれの利点を踏まえながら、クラス全体での学び合いも実践してみたいと考えた。

本校では生徒による授業アンケートを実施している(資料4)。考える時間の設定について質問したところ、適切と回答した生徒が多くいた。自ら考え、ことばで表現する姿勢が徐々に身に付いていると感じている。また、考える時間の設定により授業の進度がやや遅くなることも課題である。アンケートの結果、進度がやや遅い、または遅いと回答する生徒が全体の半数以上いたので、バランスをとる必要がある。

【資料4 授業アンケート】



## 5 おわりに

今回の実践だけでは、すぐに生徒の変容が見られることはなかったが、グループ内での発表によって少しずつ表現することができるようになってきた。クラスなどの大きな集団においても表現する力を身に付けることで、いっそう自信を付けると数学の活動だけでなく学校のあらゆる活動にもよい影響を与えるのではないかと考える。