整数の性質における単元を見通した指導について

１　はじめに

本校の生徒は，大多数が大学進学を目標とし，学習に対して真摯に取り組む生徒が多い。しかしながら，指示された問題，定型的な形式の問題は解けるが，思考力を伴う問題や，これまでに習った内容と関連付けて解くことに関しては苦手な生徒が多い。よって，問題に対して粘り強く取り組む態度を養い，自ら考え，試行錯誤しながら問題を解決する力を身に付けさせたいと考え実践を行った。

２　指導計画

(1) 指導学年，科目，単元名

指導学年：第１学年
科　　目：数学Ａ
単 元 名：整数の性質

(2) 単元目標

素因数分解を利用して，最大公約数と最小公倍数を求められるようにする。
互いに素という概念を理解する。
最大公約数と最小公倍数が与えられたときに２数を決定できるようにする。
２数の和または積，最大公約数または最小公倍数が与えられたときに２数を決定できるようにする。

(3) 単元計画

単元の評価規準			
①関心・意欲・態度	②数学的な見方や考え方	③数学的な技能	④知識・理解
整数の性質に関心をもつとともに，それらを事象の考察に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとしている。	事象を数学的に考察し表現したり，思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して，整数の性質における数学的な見方や考え方を身に付けている。	整数の性質において，事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付けている。	整数の性質における基本的な概念・法則などを体系的に理解し，知識を身に付けている。

時限	学習内容 数学的活動の位置付け	学習活動	評価の観点 ①	②	③	④	評価規準	評価方法
1	最大公約数と最小公倍数 C	素因数分解を利用して最大公約数・最小公倍数を求める。			○		最大公約数・最小公倍数を求めることができる。	ワークシート
2	互いに素 Ａ２ 本時	例題を通して，互いに素の概念を理解する。		○			互いに素の概念を理解し，問題を解く際，論理立てがきちんとした解答が記述できる。	ワークシート 振り返りシート
3	最大公約数，最小公倍数の性質 Ｄ２	２数の和または積と，最大公約数または最小公倍数が与えられた２数を求める。				○	与えられた問題を，途中式も含めて正しく記述できる。	ワークシート 確認テスト

(4) 本時の目標（思考力・判断力・表現力を育成する授業を取り上げる）

互いに素の概念を理解し，さまざまな問題を解決しようとする。

必要十分性を意識して解答を記述できるようにする。

(5) 本時の主となる課題（発問）とその設定理由

発問：「ａの倍数であり，かつｂの倍数でもある数は，ab の倍数である」の真偽を調べ，さらに，
　　　どのような条件を追加，または書き換えれば真の命題になるかを考える。

理由：条件を付ける，書き換えることで真の命題になることを生徒自ら気付かせたいため。

理由：次問の証明問題において，論理立てがきちんとした記述を書かせたいため。

(6) 本時の展開

ア　１時間目

	学習内容 数学的活動の位置付け	学習活動	指導上の留意点・評価
導入	前時の復習 二つの整数が互いに素であるか答えよ。 (1)　9 と 26 (2)　24 と 39	生徒を指名し，理由とともに答えさせる。	ａとｂが互いに素であるとは，ａとｂの最大公約数が１（ａとｂを共通に割れる数が１しかない）であるということは前時に既習済み。 素因数分解をすると公約数を見つけやすくなることを確認する。
展開	ｅｘ）「ａの倍数であり，かつｂの倍数である数はａｂの倍数である」の真偽を調べる。 どのような条件を付ける，または書き換えれば真の命題になるかを考える。 倍数証明の問題（例題４）に取り組む。 類題（練習 13）に取り組む。 Ａ２	個人で考える（２分）。 真偽を調べ，もし偽であると考えるならば反例を求める。 グループワークを行う（５分）。 個人でワークシートに取り組む。 早く解答ができた生徒は，周囲の他の生徒の答案と比較する。	「互いに素」という言葉を使って条件が表現されているかを確認する。 「ａとｂの最小公倍数の倍数」と書き直してもよい。 論理立てがきちんとした解答が記述できているかを確認する。
まとめ	本時のまとめ	自分の解答を見直す。	ふだんから論理立てがきちんとした解答を心がけることが，記述力を身に付けることにつながることを伝える。

イ　２時間目（途中まで。最初の 10 分）

	学習内容 数学的活動の位置付け	学習活動	指導上の留意点・評価
導入	確認テストと振り返りシートに取り組む。	個人で解答をした後，ペアの生徒と答案を交換し，採点する。	５点満点。完璧な解答だと思うのなら５点で，減点すべき箇所があると思うのなら，その箇所につき１点減点させる。

(7) **評価規準と評価方法**（思考力・判断力・表現力を見取るために工夫した点）

評価項目 【観点】	A （十分満足できる）	B （おおむね満足できる）	C （努力を要する）
評価項目① ｅｘ）の命題の真偽を調べ，どのような条件を付ければ真の命題になるかに気付くことができたか。 【数学的な見方や考え方】	反例を見つけ，偽であることに気付き，「互いに素である」という条件を付け加えるか，または「ａとｂの最小公倍数の倍数である」という条件に変えれば真になることに気付けた。	反例を見つけ，偽であることに気付けたが，どのような条件を付ければ真の命題になるのかは気付けなかった。	反例を見つけることができなかった。
評価項目② 例題４において，論理立てがきちんとした解答が記述できたか。 【数学的な技能】	例題４において２問とも，論理立てがきちんとした解答が記述できた。	例題４において１問だけ，論理立てがきちんとした解答が記述できた。	例題４において２問とも，論理立てがきちんとした解答が記述できなかった。

(8) **学習活動の工夫**（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

	主体的な学び	対話的な学び	深い学び
実践内容	小テストの記述，他者の答案の採点を通して，論理立てがきちんとした解答を作成しようと意識させる。	グループワークを通して，他者へ説明する力，または他者の説明を聞いて理解する力を育てる。	偽の命題に，どんな条件を付ければ真の命題に変えることができるかを考えさせる。

３　実践報告と考察

(1) 学習活動について

前時の授業で，「互いに素」という用語の意味について説明をして，与えられた２数が互いに素であるか否かを答える問題を課題にして終了した。本時はその答え合わせから開始した。「互いに素」という用語については，数学Ⅰの単元「集合と命題」において「背理法を利用した無理数の証明」で登場していることを覚えていた生徒も多く，理解できている生徒が多かった。

次に，「ａの倍数であり，かつｂの倍数である数は，ａｂの倍数である」の真偽については，多くの者が直感的に偽であると感じているようであったが，すぐに反例が正しく書けた生徒と，書き方に迷っている生徒とが半々であった。そして，次の「どのような条件を付ける，または，どのような条件に書き換えれば真の命題になるか」という発問の後，４人ずつ 10 組に分け，グループワークを開始した。開始後２分が経過したところで，あるグループから「互いに素という条件を付け加えればよい」という声が上がり，また他のグループからは，「最小公倍数を考えればよいのでは」という声がほぼ同時に出た。徐々に周囲に伝わり，全てのグループが，そのどちらかの答えに到達した。グループワークを終了し，最初に気付いたグループの生徒を指名し発表させた。

例題４は，「ａ＋３は４の倍数」，「ａ＋４は７の倍数」という条件を利用して，「ａ＋11 は 28 の倍数」であることを示す問題なのだが，まず条件をすぐに数式に書き直せない者が多数いた（４分の１程度）。本時は「整数の性質」の４時間目であるが，倍数条件の数式化は１時間目に既習の内容であり，更に数学Ⅰの単元「集合と命題」でも既習の内容である。それにも関わらず，文章で書かれた条件を，数式に変換するという習慣がまだ身に付いているとは言えない。また，「28 の倍数であることを示す」ので，ａ＋11 を直接 28×(整数)の形にしようとして苦しんでいる者も多くいた。そのため，グループワークで議論した命題をヒントにすることと，ａ＋11 を二とおりで表現するとよいという助言をクラ

ス全体に行った。すると多くの生徒が解答を進められるようになった。a＋11を（a＋3）と8の和に分けて解いている者と，a＝4n－3を代入して解いている者の割合は半々であった。証明の過程において必要な技能的な部分で苦戦していた生徒は予想より多かったように思えるが，最後に結論を書く際に，「4と7は互いに素であるから」と記述できていた生徒が多かった。

その後，例題4(2)「a＋2は6の倍数であり，a＋6は8の倍数であるとき，a＋14は24の倍数であることを証明せよ」に取り組んだ。この問題は，教科書には掲載されておらず，追加した問題である。この問題についても，「最小公倍数の倍数であるから」と記述できている生徒がほとんどであった。想定よりもよくできていたという印象である。ワークシートを以下に示す（**資料1**）。

【資料1　ワークシート（一部）】

ex) a , b は自然数であるとする。 「a の倍数であり、かつ b の倍数でもある数は、ab の倍数である」の真偽を調べよ。	(2)　a は自然数とする。$a+2$ は 6 の倍数であり，$a+6$ は 8 の倍数であるとき，$a+14$ は 24 の倍数であることを証明せよ。
例題4. (1) a は自然数とする。$a+3$ は 4 の倍数であり、$a+4$ は 7 の倍数であるとき、$a+11$ は 28 の倍数であることを証明せよ。	**練習13.** a は自然数とする。$a+1$ は 5 の倍数であり、$a+2$ は 9 の倍数であるとき、$a+11$ は 45 の倍数であることを証明せよ。

次の授業で確認テストを行った（**資料2**）。後でペアの人が細かく採点する旨も伝えた。従来は，このような確認テストのとき，早く解答を終えた生徒は手持ちぶさたな様子になることが多かったが，今回は解答が終わった後も，よく見直している生徒が多かった。

【資料2　確認テスト】

4プロセス数学A　問題246

a は自然数とする。$a+2$ は 3 の倍数であり，$a+1$ は 5 の倍数であるとき，$a+11$ は 15 の倍数であることを証明せよ。

（証明）$a+2=3m$

$a+$ に $5n$ とする　　mとnについて書く　－1.

$a+11$ を $3m$ を使って表すと

$a+11=3m+9$

$=3(m+3)$

また $5n$ を使って表すと

$a+11=5n+10$

$=5(n+2)$

よって $a+11$ は 3の倍数かつ5の倍数である。　互いに素が必要．－1

よって $a+11$ は 15の倍数である。


【グループワークの様子】　　　　　　　　　　　　　　　【発表の様子】

(2) 評価（と評価結果の生徒への還元）について

評価項目①の「ｅｘ）の命題の真偽を調べ，どのような条件を付ければ真の命題になるかに気付くことができたか。」については，振り返りシートから評価した。グループワーク内で誰が積極的に発言をしたかというのは，机間指導では限界があり，教員１名で評価するのは難しい。積極的に他者へ教えたり，または他者の説明を理解しようとしていたりするかについては，振り返りシートの中で自己評価をするという形にとどめた。

評価項目②の「例題４において，論理立てがきちんとした解答が記述できたか。」については，次の授業で確認テストを実施し，その答案を基に評価した。採点は，模範解答を与えず，困ったらペアで相談するという形で行った。その後回収し，生徒の採点に間違いや不備がないかを教員が点検した。さらに次の授業で，この答案を返却し，採点に誤りがあれば，採点者に伝えるよう指示した。結果としては，解答は明示しなかったにも関わらず，非常に正しく採点されていた。

評価項目①②について３段階で評価し，組合せで，ＡＡ，ＡＢの場合はＡ，ＢＢ，ＢＣの場合はＢ，ＣＣの場合はＣと評価し，確認テストに記載し返却した。その割合は，A評価が 72%，B評価が 23%，C評価が５％であった。

(3) 数学的活動（学習過程の位置付け）

これまでに習った数学の知識とのつながりを振り返ってから例題や演習に入る，または，授業の中で生徒同士が対話をしながら活動をする，という形式の授業は，日常的に取り入れていた。しかし，これまでの自分の授業構成を振り返ると，授業の進度などを考慮して，最後は例題を解けるようになって終わることを目標とし，あくまでもその授業で完結することを優先としていた。今回の授業実践で，数学的活動（学習過程の位置付け）との関連を考えたことによって，教員が一方的に例題を説明し，同様の練習問題を生徒が説明どおり解けるようにすることよりも，生徒の活動を主眼に置いて考えるようになった。つまり，一つの授業に対して，「この例題をどのように教えれば，生徒は深く理解できるか」を目標として授業構成を考えていたものが，「この授業ではどのような数学的事象をテーマにして考えさせれば，生徒は深く理解できるか」と考えるようになったことが，挙げられる。

評価については，グループワークにおいてどのような評価が適切だろうかと考える機会になった。グループワーク，ペアワークなどの対話的な学びは，回数を増やせば増やすほど，能動的に活動する生徒が固定化されていく傾向があるように推測される。どの生徒も「思考すること」「話し合いを通して自身の理解を高めること」という目的を理解し，一定のモチベーションをもって活動することにつなげるためにはどのような評価付けが適切であるか，今回の授業実践ではまだその手法を見つけられ

なかった。今後の授業の中で見つけていきたい。

(4) 学習活動の工夫（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

単元全体を見通して，精選した例題や命題を与え，それについて考えることが具体的にどのような数学的な力を身に付けることになるのかを，生徒に伝えたいと考えた。今回の授業では，「与えられた命題をよく考えることで，論理立てがきちんとした解答を作成する力が付く」ということになる。これによって，数学的な考え方を身に付けることにつながることを伝えた。実際に，確認テストを終えた後，入念に自分の解答に誤りや不備がないかを確認する生徒が多く現われるという効果をもたらした。また，ペアワークにおいて互いの答案を添削するという活動も，自分が習得した知識をペアの生徒に理解させようという意識付けになった。以降の授業においても，その解答に不足している条件はないかを習慣的に考えるようになった生徒が増えたという実感がある。

４　まとめ

(1) 成果

振り返りシートの集計

	できた	できなかった
①　ｅｘ）について，反例を自分で見つけることができましたか。	59%	41%
②　どんな条件を付ければ真の命題になるか，自分で気付くことができましたか。	14%	86%
③　どんな条件をつければ真の命題になるか，グループワークを通してしっかり考えることができましたか。	78%	22%
④　例題４(1)において，命題を真にするための記述を正しく書けましたか。	69%	31%
⑤　例題４(2)において，「最小公倍数の倍数であるから」という記述を正しく書けましたか。	83%	17%
⑥　小テストの問題を正しく解くことができましたか。	72%	28%

振り返りシートの集計結果から，①②の思考力を必要とする活動についてはよい結果であるとは言えない。定型的な形式の問題や，解法を指示した後ならば解くことができるが，思考力を必要とする問題や，初見の問題を考えることが苦手な生徒が多いという本校生徒の現状を踏まえると，予想された結果であると言え，今後の指導の中で思考力を必要とする活動を多く取り入れ，身に付けさせていきたい。

また，③の対話的な学びの部分については，取り組む姿勢もよく，理解を深めることにつながる活動になったと感じている。従来から全授業の２割程度はペアワークまたはグループワークを取り入れており，活動をすることに慣れている。グループワークを唐突に行えば，生徒は戸惑う。日頃から一定の回数・時間，グループワークやペアワークを行うことが必要である。

④，⑤，⑥は，数学的な技能を身に付けたかの確認に当たる部分である。特に確認テストは，３日ほど期間が空いた後の授業で行ったが，想定よりも出来がよかったと感じた。何よりも目に見えて変わった点は，解答を終えた生徒が，自分の解答に間違いや記述不足がないかを念入りに確認していた点である。論理立てがきちんとした解答をできるようにすることを目標として行った授業であったが，１時間目が終了した段階では，果たして本当にそのような意識が身に付いたのだろうかと不安であっ

た。しかし，確認テストの際，解答を終えた後も不備のない記述ができているかを丁寧に確認していた様子から，一定の成果はあったのだろうと感じた。

(2) 課題

グループワークは，そのときの展開に左右されるため，見通しが立てづらい。本来は，グループ内で幾つかの仮説が出て，その考えを分析，検証するという活動をして欲しかった。しかし今回の授業では，最初に気付いた生徒が興奮気味にグループ内の生徒に説明し始め，それが周囲のグループにも聞こえてしまう形になってしまったため，考えを深める前に答えを知ってしまったグループがいた。そのため，全体としては理想どおりの形になったとは言えない。ただこのことは，これまでの授業でも頻繁にあったことではある。また，積極的に発言をする生徒は数学の成績がよい生徒である傾向が強く，数学に自信のない生徒は他の生徒から教えを請うのを待っていることが多々ある。今回，対話的な学びの部分は振り返りによる自己評価という形にした。生徒が高い意欲をもって取り組んだかどうかの把握をする上で効果はあると思われるが，間違いや勘違いを含んでいても積極的に発言をする，または試行錯誤する姿勢を持った生徒を評価する効果的な方法を模索する必要があると感じた。

また，本校生徒の課題である「粘り強く思考する」「試行錯誤をして問題に取り組む」態度を養うために，授業内の短時間であっても，思考力を必要する活動は取り入れたい。そのためには，単元の全体を見通して，その中から本校生徒にとって，どの場面でどのような活動を取り入れると効果的かを検討することが必要である。答えにたどり着けなかったとしても，できれば驚きや発見，納得を伴った「深く考える活動」をしたことで，その後の問題をより理解しやすくなる，または正しく解答できるようになるといった実感を持たせたい。正解が出せればよいと考えている生徒は未だに多いので，単発的なただの「考える」活動で終わらずに，その活動が今後どのような場面で生かされていくのかを具体的に伝えることが重要であると考える。

5　おわりに

「粘り強く思考し取り組む態度」を育むための活動を，個人の学習に任せるのではなく，どうすれば授業に取り込むことができ，また，その成果を生徒自身が肌で感じることができるようになるにはどのような授業展開が望ましいだろうかと考え，今回のような授業を計画し実施した。今回の授業における活動を契機にして，生徒自身が今後，日頃から丁寧に思考しながら解答を記述できるようになって欲しい。さらに，数学に限らず日常的な場面で，論理的に思考できるようになるための一助につながって欲しい。

私自身，生徒が問題を「解けるようになる」ための教え方は，経験とともに指導力が上がり，一定の自信をもって授業を行えているという自覚がある。しかし，「どのような授業をすれば，生徒が良質な思考の時間を体験でき，その後の自発的な学習につながるか」といった視点に立つと，これまでの授業を振り返ってみて，そのような意識をもって授業をしたことは皆無であると言ってよい。

「分かりやすい教え方」を磨いてきた教員にとっては，大きな視点，考え方の転換を伴うことになると思われる。しかし今回，実際に授業を実践し感じたのだが，経験がある教員であればあるほど，生徒の変化（これまでの自分の授業では起きなかった現象）に気付きやすいのではないか。これまでの自分の指導方法に，少し工夫を加えるだけで，充分に「思考力向上につながる授業」に改善させることができるのではないだろうか。単元全体を見通した計画を立て，発問に対する生徒の解答を予想し，生徒の活動をよく観察することで，「粘り強く思考し取り組む態度」の向上につながる授業の再構築を目指したい。