

微分法の応用（速度と加速度）における単元を見通した指導について

1 はじめに

本校は1学年6クラスで2クラスが生活文化科，2クラスが進学普通科，2クラスが就職普通科で編成されている。学習に対する意欲はあまり高くなく，数学を苦手とする生徒が多い。進学普通科のうち33人は理系の生徒で，そのうち18名は工学部志望である。彼らは授業内容を理解することはできるが，知識の定着に至らないものが多い。そこで彼らを対象として，数学の概念を物理の公式に適用して新たな公式を導き出させることにより，思考力を養い，数学と物理への意欲を高め，記憶に残る知識の獲得を目指したい，と考え実践を行った。

2 指導計画

(1) 指導学年，科目，単元名

指導学年：第3学年

科 目：数学Ⅲ

単 元 名：微分法の応用（速度と加速度）

(2) 単元目標

導関数を用いて，いろいろな曲線の接線の方程式を求めたり，いろいろな関数の値の増減，極大・極小，グラフの凹凸などを調べグラフの概形をかいたりすることができる。また，それらを事象の考察に活用できるようにする。

(3) 単元計画

単元の評価規準								
①関心・意欲・態度		②数学的な見方や考え方		③数学的な技能		④知識・理解		
微分法に関心をもつとともに，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとする。		事象を数学的に考察し表現したり，思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して，微分法における数学的な見方や考え方を身に付けている。		微分法において，事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技術を身に付けている。		微分法における基本的な概念，原理・法則などを体系的に理解し，知識を身に付けている。		
時限	学習内容 <small>学習過程の位置付け</small>	学習活動	評価の観点				評価規準	評価方法
			①	②	③	④		
1	方程式への応用 C	微分法で方程式の解の個数を求める。			○	○	グラフを活用し，一定の手順に従って数学的に処理できる。	○ワークシート ○観察
2	不等式への応用 C	微分法で不等式を証明する。			○	○	グラフを活用し，一定の手順に従って数学的に処理できる。	○ワークシート ○観察
3	速度と加速度 C	微分法で動点の速度と加速度を求める。	○	○			導関数の意味から座標と速度，加速度を理解し，数学的に問題を処理できる。	○ワークシート ○観察
4 本時	速度と加速度 (課題学習) D1	物理公式に微分法を適用する。	○	○			座標と速度，加速度の関係を物理のさまざまな公式に活用できる。	○ワークシート ○観察 ○アンケート ○小テスト

5	近似式 D1	微分法を利用して近似式を求める	○	○	数学的な見方や考え方を基に、的確かつ能率的に処理できる。	○ワークシート ○観察
---	-----------	-----------------	---	---	------------------------------	----------------

(4) 本時の目標（思考力・判断力・表現力を育成する授業を取り上げる）

点の位置を表す関数の第1次導関数が速度，第2次導関数が加速度を表すことを用いて，物理のさまざまな公式に適用できることを確認する。また，そのことを活用して等速円運動の座標と速度ベクトル，加速度ベクトルを求める。

(5) 本時の主となる課題（発問）とその設定理由

ア 本時の主となる課題（発問）

「単振動と等速円運動の座標，速度，加速度をグループで話し合ってみよう。」

イ 課題の設定理由

知識の定着がなかなか出来ない理系生徒の学習意欲と思考力の向上，更に知識の定着を目指したいからである。数学で学んだ知識が物理の公式にも役立つことを確認させることにより，理系科目への興味・関心を高めることができると考えた。また，等速円運動の座標，速度ベクトル，加速度ベクトルを考えること，さらに，グループで話し合いながら進めることによって数学や物理の得意不得意に関係なく，それぞれの生徒がそれぞれの立場で思考力を養えるのではないかと考えた。

(6) 本時の展開

	学習内容 学習過程の位置付け	学習活動	指導上の留意点・評価
導入	発問 座標と速度と加速度はどういう関係にあったか？ ワークシート1を配付	前回習った座標と速度，加速度の関係について確認する。 物理の公式でこのことを確認することが本時の目標であることを理解する。	座標と速度，加速度の関係について復習させる。 本時の目標を理解させる。
展開	<直線上の運動> 発問 $x=?$ $v=?$ $\alpha=?$ 発問 $x=?$ $v=?$ $\alpha=?$ 自由落下・鉛直投げ下ろし・鉛直投げ上げ <平面上の運動> 発問 水平投射についてそれぞれ同様の発問をする 発問 動点Pの座標は？ 速度ベクトルは？ 加速度ベクトルは？	等速直線運動とその公式 $x = vt$ （座標と時間，速度の関係式）を復習する。 座標を微分すると速度(定数)，速度(定数)を微分すると加速度0になることを確認する。 等加速度直線運動とその公式二つ(座標と時間，速度と時間の関係式)を復習する。 座標を微分すると速度，速度を微分すると加速度(定数)になることを確認する。 同様に復習と確認をする。 水平投射とその公式四つ(座標と時間，速度と時間の関係式のx成分，y成分)を復習する。 座標を微分すると速度ベクトル，速度ベクトルを微分すると加速度ベクトルになることを確認する。	等速直線運動について確認させる。 $x = vt$ $v = v$ $\alpha = 0$ 等加速度直線運動について確認させる。 $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ $v = v_0 + at$ $\alpha = a$ 自由落下・鉛直投げ下ろし・鉛直投げ上げについて確認させる。 水平投射について確認させる。

	<p>発問 斜方投射についてそれぞれ同様の発問をする</p> <p>ワークシート2を配付 グループをつくるよう指示</p> <p>発問 単振動と等速円運動の座標, 速度, 加速度をグループで話し合 って求めてみよう。</p> <p>等速円運動について</p>	<p>同様に復習と確認をする。</p> <p>単振動とその公式三つ(座標と時間, 速度と時間, 加速度と時間の関係式)を復習確認する。</p> <p>座標を微分すると速度, 速度を微分すると加速度(定数)になることを確認する。</p> <p>座標を時間 t で表わす。 座標を微分することで速度ベクトル, 速度ベクトルを微分すると加速度ベクトルを求める。</p> <p>正解の解説を聞き, 等速円運動と単振動の関係, 座標と速度, 加速度の関係を再確認する。</p>	<p>斜方投射について確認させる。</p> <p>単振動についての確認させる。</p> <p>机間指導 積極的な議論や意見を取り上げ, グループ活動の活性化を図る。また努力を要すると判断される生徒へ支援する。</p> <p>評価 座標と速度, 加速度の関係を単振動の公式や等速円運動のベクトルに活用しようとしているか。(数学的な見方や考え方) ワークシート</p>
まとめ	<p>発問 単振動の三つの公式でどれが重要なのか?</p> <p>発問 座標を微分して速度公式が得られるが, 加速度(定数)から速度公式を得るにはどうすればよいか?</p>	<p>単振動は座標の公式(等速円運動の y 座標)が大事で, 残り二つは微分によって導けることを再度確認する。</p> <p>等加速度直線運動は加速度(定数)を積分することによって速度公式, さらに座標の公式が得られることを理解する。</p>	<p>発展的内容に取り組みさせる。</p>

(7) 評価規準と評価方法(思考力・判断力・表現力を見取るために工夫した点)

学習の目標(観点)	評価方法	評価規準		努力を要すると判断された生徒への対応(c)
		十分満足できると判断できる状況(a)	おおむね満足できると判断できる状況(b)	
座標と速度, 加速度の関係が単振動の公式や等速円運動のベクトルに結び付いたか。 (数学的な見方や考え方) (関心・意欲・態度)	小テスト	3題とも二つ公式の間に微分と積分の見いだせた。	1~2題について二つ公式の間に微分と積分の関係を見いだせた。	次回の授業の中で支援していく。
	アンケート	座標と速度, 加速度の関係を物理公式で確認でき, そのことの記述がある。	座標と速度, 加速度の関係を物理公式で確認でき, 今後の学習への意欲が高まった感想が書けている。	次回の授業の中で支援していく。

(8) 学習活動の工夫(主体的・対話的で深い学びの実現に向けて)

	主体的な学び	対話的な学び	深い学び
実践内容	工学部進学希望者にとって重要な物理と数学を関連させることによって, ふだんよりも強い興味・関心を引き出す。	グループ学習をさせることにより, 生徒同士が対話しそれによって思考を広げ, 深めていく。	物理で学んだ公式を数学の知識を確認することによって, 知識を相互に関連付ける。

3 実践報告と考察

(1) 学習活動について

前時の授業で、教科書の「速度と加速度」の内容を学習させた。まず数直線上の動点Pの座標は時間 t の関数であることを強調した。そして平均速度から極限計算によって(瞬間)速度を、更に速度の変化率から加速度を説明し、座標と速度、加速度の関係を理解させた。例題と練習を1題ずつ解いた後、平面上の動点についても説明した。ここでも座標が時間 t の関数であることを注意し、加えて速度、加速度はベクトルであること強調した。例題を1題解き、ベクトルの大きさの公式を用いて、速さと加速度の大きさを求めて授業を終えた。次回の物理の問題集を持参するよう指示をした。

本時の始めに前時の復習として座標と速度、加速度の関係を質問したところ答えることができた。「今からこの関係が物理の公式にも適用できるか確認作業をする」と、本時の目標を明確にしてワークシート1を配付した(資料1)。まず等速直線運動について座標の公式を聞いてみた。等加速度直線運動と勘違いしている生徒がいたが、正しく答える生徒もいたので両方の変位(座標)公式と速度公式を板書し、実際微分させて前時の学習内容を確認した。以下同様に問いかけを繰り返しながら自由落下、鉛直投げ下ろし、鉛直投げ上げについても確認していった。

次に平面上の運動について話を広げた。水平投射と斜方投射である。物理では x 成分を水平方向、 y 成分を鉛直方向という呼び方で習っている。ここでは速度と加速度がベクトルであることを意識させるためベクトルの成分表示で公式を記入させた。 x 成分は等速直線運動で y 成分は自由落下と鉛直投げ上げであることを説明した。ここでも同様に各成分を微分させて前時の学習内容を確認した。この後単振動と等速円運動について同様に確認すること、そしてグループで話し合いながら進めていくよう指示をした(資料1)。

18名を4~5人のグループに分け、話し合いが活性化するように分かった生徒は分かっていない生徒に教えるように促した。単振動の変位(座標)、速度、加速度の公式は覚えている生徒もいたが忘れていた生徒も少なくなかった。しかし、これらは物理で習っている公式であるので、自分で調べたり周りの生徒から聞いたりして記入できていた。等速円運動については、座標、速度ベクトル、加速度ベクトルをどのグループも埋めることができなかった。理由として二つ考えられた。一つめは物理では等速円運動についての座標、速度、加速度の各成分については公式として習っていないことである。二つめは等速円運動の y 座標が単振動であることを生徒は理解していない、または、忘れていたことである。しかし、そのおかげでどのグループも活発に意見を出し合いながら話し合いが行われていて、他者との対話によって思考を深めていこうとする姿を見ることができた。自力で答えにたどり着くグループはでなかったが、数Ⅲの教科書から探して答えたグループが現れた。次に解説を行った。等速円運動の y 座標が単振動であることを強調して説明するとともに、円周上の座標の置き方を復習し、各成分を微分して等速円運動の速度ベクトルと加速度ベクトルが求められることを説明した。



【グループ学習の様子】

まとめとして単振動の三つの公式の覚え方について考えさせた。座標さえ分かれば微分して求めることができること、その座標は数学で習った円周上の y 座標であることを生徒に発問しながら確認した。さらに発展的内容として等加速度直線運動の二つの公式について、積分により導いた。これらも当てられた生徒は答えることができた。

(2) 評価（と評価結果の生徒への還元）について

ア アンケート

アンケートの評価結果（生徒の記述）は全員授業内容を理解できた記述であると同時に積極的な意見・感想のみであった（資料 2）。

評価規準は

(a) 今後の学習への意欲が高まった感想が書けている。

「数学をもっと学びたくなった。」 「～を調べたくなった。」 など

(b) 座標と速度、加速度の関係を物理公式で確認できたことについての記述がある。

観点	a	b	c
関心・意欲・態度	8人(44.4%)	10人(55.6%)	0人(0.0%)

イ 小テスト

一週間後に小テストを行った。小テスト前に、本時の前提となる座標を微分すると速度、更にそれを微分すると加速度になることを復習確認した。小テストは二つの公式の関係(微分・積分)を問うもので3題用意した。微分・積分の観点から公式を思考できるか評価した。

評価規準は

(a) 3題全てについて二つ公式の間に微分と積分の関係を見いだせた。

(b) 1～2題について二つ公式の間に微分と積分の関係を見いだせた。

観点	a	b	c
数学的な見方や考え方	9人(50.0%)	4人(22.2%)	5人(27.8%)

(3) 数学的活動（学習過程の位置付け）について

本時の数学的活動の位置付けを **D1** とし、現実の世界との関連を意識した。動点の座標と速度、加速度の関係を理解し、物理の公式において確認することにより数学の物理への応用に興味をもち、新たな公式を導き出させることにより、思考力を養い、教科横断的な有機的な知識の獲得を目指した。数学の教科以外への数学の活用は生徒にとってとても驚きであったようだ。今後、物理はもちろんのこと、他教科や日常生活や社会の事象に数学を活用できる例を探究していきたい。

(4) 学習活動の工夫（主体的・対話的で深い学びの実現に向けて）

対話的な学びとしてのグループ活動では、予想以上にどのグループも活発な話し合いが行われていた。生徒各々も全員話し合いに参加していた。リーダーシップを発揮していると言えるほどの生徒はいなかったが、全員真剣に対話によって思考を進めようとしていることが伺えた。

さらに、工学部進学希望者にとって重要な物理と数学を関連付けることによって、ふだんよりも強い興味・関心を引き出すことができ、主体的な学びができた。

また、物理の公式と数学の知識が相互に関連付いたことにより深い学びが行われたと考えられる。

4 まとめ

(1) 成果

今回の指導と評価を通じて、生徒の三つの問題点と二つの成果を見つけることができた。三つの問

題点の一つめは、生徒は数学と物理が相互に関係していることをあまり、あるいは全く想像できていないことだ。微分法の物理への活用に積極的な感想がでたのは、このことが原因であると考えられる。二つめは、公式を暗記することが学習そのものであると勘違いし、公式を導くという発想が欠落していることである。三つめは工学部を志望しているにも関わらず物理公式を覚えていないものが少なくないことである。

二つの成果とは、グループ学習が思考を活性化し視野を広げるのに役立つことと、数学の他分野への応用が彼らの興味・関心を大きく高めることが分かったことである。

(2) 課題

今後の課題は二つ考えられる。一つめは、数学を物理への具体的応用、あるいは他分野への具体的応用を授業計画の中に盛り込んでいくことが求められるが、私自身がその事例を知らないのもっと勉強が必要であること。二つめは、公式を導くという発想が欠落していることである。導けるものはその都度授業中に導き方を説明してきたはずであるが、いまだに導くのではなく覚えるという態度が根強いようである。意味も分からず覚えようとするので定着していない。数学に限らず、他の科目も公式を導くという発想が求められるだろう。公式を覚えなくて済む方法や着想に興味・関心を惹くような授業を行わなければならないと感じた。

5 おわりに

知識が定着しないものが多い工学部進学希望者を対象として、思考力を養い、数学と物理への意欲を高め、概念が記憶に残る授業を目指した。結果こちらが予想していた以上に積極的な活動が行われ、積極的な感想が書かれた。今後同種の授業実践ができるよう、数学の物理や他分野への応用例を調べていきたい。

【資料1 ワークシート】

数学Ⅲ 第6章 微分法の実用 vol.3 等速直線運動と等加速度直線運動

3年()組()番 名前()

<直線上の運動>

□等速直線運動

図標 x -

速度 v -

加速度 a -

□等加速度直線運動

図標 x -

速度 v -

加速度 a -

(1)自由落下

図標 y -

速度 v -

加速度 a -

(2)鉛直投げ下ろし

図標 y -

速度 v -

加速度 a -

(3)鉛直投げ上げ

図標 y -

速度 v -

加速度 a -

<平面上の運動>

□水平投げ

図標 P (,)

速度 \vec{v} (,)

加速度 \vec{a} (,)

□斜方投げ

図標 P (,)

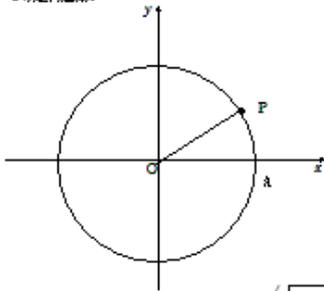
速度 \vec{v} (,)

加速度 \vec{a} (,)

数学Ⅲ 第6章 微分法の実用 vol.4 等速円運動と単振動

3年()組()番 名前()

<等速円運動>

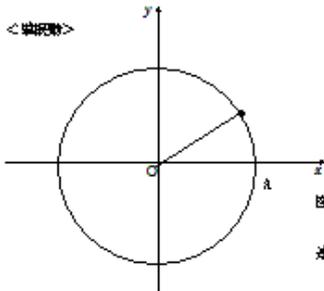


図標 P (,)

速度 \vec{v} (,)

加速度 \vec{a} (,)

<単振動>



図標 y -

速度 v -

加速度 a -

単振動の公式が覚えられないA君に
どのように覚えさせればよいだろうか？

等加速度直線運動の公式が覚えられないA君に
どのように覚えさせればよいだろうか？

【資料2 アンケート用紙とその記述例】

アンケート・感想
 学年() 組()番 名前()

(1) 数学は好きですか? 好き - どちらでもない - 嫌い

(2) 数学への興味・関心 高まった - 変わらない - 高まった

(3) 物理は好きですか? 好き - どちらでもない - 嫌い

(4) 物理への興味・関心 高まった - 変わらない - 高まった

(5) 数学と物理の関係について考えた 高まった - 変わらない

「高まった」を欄内記入したように具体化したの記述して下さい。

(6) 今回の授業で印象に残ったことを書いて下さい。

(7) 数学と物理の授業の感想を述べたこと、考えたこと、疑問に思ったこと、その他感想を書いて下さい。

数学Ⅲ 小テスト 3年()組()番 名前()

① 次の①と②の物理公式は、数学的にはどのような関係にあるか推測せよ。
 (1) 自然の長さからの伸び $x[m]$ のばねの弾性力の大きさを $F[N]$ は $F=kx$ (ばね定数 k)
 (2) ばねの弾性力による位置エネルギー U は $U=\frac{1}{2}kx^2$

+

+

② 次の①と②の物理公式は、数学的にはどのような関係にあるか推測せよ。
 (1) 質量が $M, m[kg]$ で距離 $r[m]$ の2物体が及ぼし合う万有引力の大きさを $F[N]$ は

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$
 (G : 万有引力定数)
 (2) 地球の質量が M のとき、質量 m の物体がもつ万有引力による位置エネルギー U は、無限遠を基準($U=0$)とすると $U=-G\frac{Mm}{r}$

+

+

③ 次の①と②の物理公式は、数学的にはどのような関係にあるか推測せよ。
 (1) 極板間の電位差 $V[V]$ のコンデンサーに蓄えられる電気量 $Q[C]$ は

$$Q=CV$$
 (C : 電気容量)
 (2) コンデンサーに蓄えられている静電エネルギー U は $U=\frac{1}{2}CV^2$

+

アンケート記述例

○内容理解に関する記述

- ・微分が物理で使えることが分かった。(3)
- ・座標を微分して速度となり、速度を微分して加速度となることが分かった。
- ・等速円運動のy座標から単振動の式が作れたことが印象に残った。
- ・公式を微分して公式を導けることが分かった(印象に残った)。(2)
- ・単振動の公式を理解していなかったが理解が深まった。
- ・座標さえ覚えていれば速度も加速度も出せて覚えるのが楽になった。
- ・等速円運動の座標をしっかりと覚えておきたい。
- ・物理の公式を微分で出すことができることが分かった。
- ・物理の復習ができてよかった。

○興味・関心の向上に関する記述

- ・数学と物理は関係が深いと感じた。(2)
- ・物理と数学両方の興味が高まった。(2)
- ・物理公式は全て微積で説明がつくのか? 興味が出た。(2)
- ・数学と物理の違いを学べた。
- ・数学と物理はまったく別物と思っていたが微分で物理公式を出せて驚いた。
- ・他にも物理と数学で関係しているものがあるのか興味が出た。(3)

- ・微分積分が他のどのようなことに使われているのか調べたくなった。
- ・数学がなければ物理は成立しないと思った。(2)
- ・物理の公式を全て覚えていたが数学で導けることがすごいと思った。
- ・物理で学んだことが数学でも使われていることに感心した。
- ・数学に物理が出てくるとは思っていなかった。(2)
- ・物理に役立つので数学を習得したいと思った。
- ・数学の積分定数が初速度 v_0 , 基準点 x_0 であることが印象に残った。
- ・公式は導けること。
- ・物理と数学は同じように見えて、少し違うところが面白い。(3)
- ・今まで物理も数学も公式を丸暗記しなければならなかった。微積で出せたので面白いと思った。
- ・物理の公式は微積で出せることに感動する。

○グループ学習についての記述

- ・いろいろな意見があつたためになった。(2)
- ・異なる考えを聞けて新しい知識を得ることができてよかった。

○将来についての記述

- ・数学の知識が他のことに使われていることを知った。数学についてより多くの知識を身に付けて、生かせることをしたい。
- ・微分の活用の幅を知った。大学の物理に向けてもっと微積の分野を学びたくなった。