付　平成20年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

１　検査の趣旨

当センターでは昭和51年から毎年，高等学校数学標準学力検査を実施してきた。今回も次の２つのねらいの下に学力検査を実施し，検査結果を分析・考察して，指導上の留意点を明らかにした。なお，過去の検査結果については，当該年度の当センター研究紀要別冊に掲載している。

(1) 入学者数学学力調査により把握した新入生の学力実態が，その後の高等学校での学習指導を通してどのように変容しているかを調べる。

(2) 基本事項についての理解と定着の程度を調査し，高等学校での指導に役立てる。

２　検査の実施及び処理

(1) 検査問題の種類と問題の構成

検査問題は，数学Ⅰ基本，数学Ⅰ＋Ａ，数学Ⅱの３種類である。どの検査問題も学習指導要領に示された内容を出題の基準とした。検査時間はいずれも50分である。

数学Ⅰ基本：　基本的な計算力，基礎事項の定着度を調べる問題を中心に構成した。

数学Ⅰ＋Ａ：　数学Ⅰ基本より高度の思考力・洞察力を要する数学Ⅰの問題に加え，数学Ａの内容も併せて構成した。

数学Ⅱ　　：　問題［１］は基本問題，問題［２］，［３］，［４］は標準問題である。

(2) 調査の対象と方法

各科目の授業が終了した学年を対象に，学校ごとに２月１日から３月31日の間に適宜実施した。集計のための標本は各学校とも課程別，類型別に各々２学級分とし，集計用紙（２学級分の得点度数分布と，その10%の抽出者の解答をそのまま転記したもの）を４月22日までに回収した。

３　検査結果の概要

(1) 標本数・平均点・標準偏差　　表14

テスト／項目	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
標本数	1,020	6,548	7,629
平均点	41.7	42.0	49.1
標準偏差	24.3	26.7	28.1

(2) 得点分布（%）　　表15

テスト／得点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
90 ～100	2.9	4.3	9.6
80 ～ 89	6.1	6.5	9.1
70 ～ 79	6.7	8.3	10.0
60 ～ 69	9.4	9.7	9.9
50 ～ 59	10.9	10.5	10.3
40 ～ 49	12.9	11.4	10.6
30 ～ 39	13.5	11.4	10.9
20 ～ 29	16.0	11.8	10.6
10 ～ 19	14.7	13.1	9.9
0 ～ 9	6.9	13.2	9.1

(3) 学校別(課程別)平均点分布（校）表16

テスト／平均点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
80以上	0	1	7
75～80未満	0	4	5
70 ～ 75	1	2	11
65 ～ 70	2	4	7
60 ～ 65	0	5	7
55 ～ 60	0	9	8
50 ～ 55	1	6	11
45 ～ 50	3	5	8
40 ～ 45	4	4	12
35 ～ 40	3	10	12
30 ～ 35	2	9	6
25 ～ 30	3	6	7
20 ～ 25	2	9	12
15 ～ 20	0	11	5
15未満	0	6	4
計	21	91	122

4　数学Ⅰ(基本)の結果とその考察

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］次の各問いに答えよ。

(1)　$(a^2 \times a)^4 =$ $\boxed{}$ である。

(2)　$(2x+1)(4x^2-2x+1)$ を展開すると $\boxed{}$ である。

(3)　$2x^2-5x-3$ を因数分解すると $\boxed{}$ である。

(4)　$3\sqrt{3}-\sqrt{75} =$ $\boxed{}$ である。

(5)　$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) =$ $\boxed{ア}$ である。また $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ の分母を有理化すると $\boxed{イ}$ である。

(6)　１次不等式　$3x-1 \leqq 5x-7$　を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(7)　２次方程式　$x^2+3x+1=0$　を解くと $x =$ $\boxed{}$ である。

(8)　２次不等式　$x^2-3x+2>0$　を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。

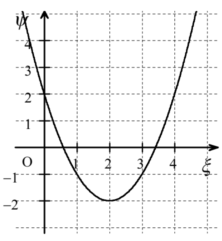
［２］次の各問いに答えよ。

(1)　２次関数　$y=x^2-4x+7$　を　$y=(x-p)^2+q$ の形に変形すると

$y=(x-\boxed{ア})^2+\boxed{イ}$ となる。

(2)　２次関数　$y=x^2$　のグラフを，頂点が（3，4）となるように平行移動したグラフを表す２次関数は $y =$ $\boxed{}$ である。

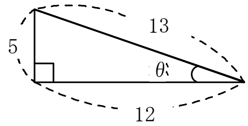
(3)　右図は２次関数　$y=x^2-4x+2$　のグラフである。この関数の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $\boxed{}$ ，最小値は $\boxed{}$ である。



［３］次の各問いに答えよ。

(1)　右図の直角三角形において，

$\tan\theta =$ $\boxed{}$ である。



(2)　$\cos 120° =$ $\boxed{}$ である。

(3)　$0° \leqq A \leqq 90°$　で，$\sin A = \dfrac{1}{2}$　のとき，

$A =$ $\boxed{}$ 度である。

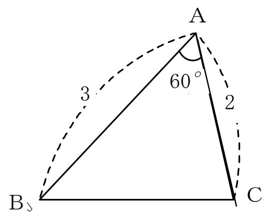
(4)　$90° \leqq A \leqq 180°$　で，$\sin A = \dfrac{3}{5}$　のとき，

$\cos A =$ $\boxed{}$ である。

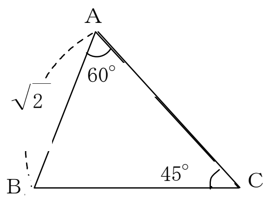
［４］次の各問いに答えよ。

(1)　２つの相似な立体において，相似比が 1 : 3 のとき，２つの立体の体積比は $\boxed{ : }$ である。

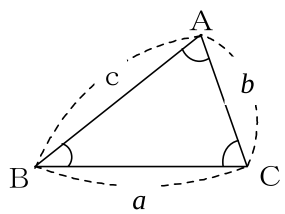
(2)　右図の△ＡＢＣにおいて辺ＢＣの長さは $\boxed{}$ である。また，△ＡＢＣの面積は $\boxed{}$ である。



(3)　右図の△ＡＢＣにおいて辺ＢＣの長さは $\boxed{}$ である。



参考



余弦定理　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

番号	配点	正答	正答率	無答率	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1](1)	5	a^{12}	54	6	40	a^{81} (7.9)，a^{32} (3.6)，a^{6} (3.6)
(2)	5	$8x^3+1$	69	10	21	$12x^2-4x+1$ (3.0)，$4x^2+2$ (1.8)，$8x^2+1$ (1.8)
(3)	5	$(2x+1)(x-3)$	53	20	27	$(x-1)(2x-3)$ (5.5)，$3,-\frac{1}{2}$ (1.8)，$(x+1)(2x-5)$ (1.8)
(4)	5	$-2\sqrt{3}$	79	6	15	$2\sqrt{3}$ (3.0)，$-3\sqrt{2}$ (1.2)
(5)	5	ア 3 イ $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$	46	8	46	ア　0 (1.8)，5 (1.2) イ　$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7}$ (10.9)，$\frac{\sqrt{10}}{7}$ (4.8)
(6)	5	$x \geqq 3$	47	24	29	3 (7.9)，$x \leqq 3$ (6.0)，4 (2.4)
(7)	5	$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	35	36	29	－1，－2 (3.6)，$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (2.4)，－4 (1.8)
(8)	5	$x<1, 2<x$	14	37	49	$1<x<2$ (9.1)，2，1 (5.4)，$x>1$ (1.8)
[2](1)	5	ア 2，イ 3	36	16	48	ア　4 (9.7)，$4x$ (2.4)，7 (1.8) イ　7 (38.2)，4 (3.0)，11 (2.4)
(2)	5	$y=x^2-6x+13$	17	37	46	$3x^2+4$ (4.2)，$3x+4$ (3.0)，9 (3.0)
(3)	5	2	52	14	34	4 (12.1)，なし (11.5)，－1 (1.8)
	5	－2	60	13	27	－1 (11.0)，1 (7.3)，2 (3.0)
[3](1)	5	$\frac{5}{12}$	64	7	29	$\frac{12}{5}$ (11.0)，30° (4.8)，$\frac{13}{12}$ (4.8)
(2)	5	$-\frac{1}{2}$	32	17	51	$\frac{1}{2}$ (11.5)，$\frac{13}{12}$ (4.8)，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4.8)，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4.2)
(3)	5	30	42	12	46	45° (26.1)，60° (13.3)，120 (1.2)
(4)	5	$-\frac{4}{5}$	12	40	48	$\frac{4}{5}$ (15.2)，$\frac{2}{5}$ (4.8)，108° (3.0)
[4](1)	5	1：27	31	10	59	1：9 (24.2)，1：3 (15.8)，3：9 (5.5)
(2)	5	$BC=\sqrt{7}$	36	23	41	7 (9.7)，3 (3.6)，$\sqrt{5}$ (2.4)，4 (2.4)
		$\triangle ABC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$	24	50	26	$\frac{3}{2}$ (3.0)，3 (1.8)
(3)	5	$\sqrt{3}$	34	38	28	2 (4.2)，1 (3.6)，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3.0)，3 (2.4)

(1) 分母の有理化の徹底を図りたい。

表 17

年度	設問番号	設問の概要	正答率% (上位群%/下位群%)	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7}$ の誤答率%
H19	[1](5)	$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ の分母の有理化	33(62/0)	16
H20	[1](5)ア イ	$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ の計算 $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ の分母の有理化	46(88/12)	11

６年連続で出題している分母の有理化に関する問題である。H20 では，設問の前半にルート計算を加えたところ，アのみの正答率は 90%を超えた。そして，イの正答率はH19 に比べて 13%上昇した。特に下位群は 0%から 12%へと上昇した。ただ，最頻誤答の出現率は 11%であった。

【指導上の留意点】

アを解くことにより，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して，分母の有理化を行える生徒が下位群にも一定数存在することが分かった。H19，H20 に指摘をしたように，イのような分母の有理化では $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ が利用できることを実際に計算させながら生徒に印象づけたい。そして，このような指導を機会あるごとに丁寧に行い，生徒への徹底を図りたい。

一方で，アを正しく計算しながら，$(a+b)^2=a^2+b^2$ として分母の有理化を行った生徒が約 10%存在した。$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の理解の徹底を図ることも，必要な指導である。

(2) 三角比の値を求めるときは常に動径の位置を確認させたい。

表 18

設問の概要	正答率%/誤答率%				H20 の主な誤答(出現率%)
	H17	H18	H19	H20	
鋭角 θ の三角比の値	43/14	80/ 4	70/10	64/ 7	12/5(11.0),30°(4.8),13/12(4.8)
cos120° の値	42/15	50/10	35/19	32/17	1/2(11.5),12/13(7.2),$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4.8)
三角方程式（鋭角）	52/16	59/10	52/16	42/12	45°(26.1),60°(13.3)
三角比の相互関係	30/39	22/28	13/34	12/40	4/5(15.2),2/5(4.8)
余弦定理	36/19	45/17	35/21	30/23	7 (9.7), 3 (3.6)
正弦定理	35/25	37/29	30/32	34/38	2 (4.2), 1 (3.6)

中間報告では三角方程式の正答率が３年連続で下がったと指摘した。同様のことが三角比の他の問題でも起こっていた。

cos120° の値の問題についてみると，誤答のうち，正の数を答えた生徒が，53%存在した。これは，三角比の概念を鋭角から鈍角へと拡張させられていないことに起因する。12%出現した誤答「1/2」は，「鈍角の余弦の値は負になる」という鈍角の三角比の概念が形成されていない証拠である。「－」のつけ忘れという「うっかりミス」が含まれると推測できるが，概念形成がしっかりなされれば，「うっかりミス」は減るはずである。また，12/13 とした誤答は直角三角形の三辺の比が記憶できていないことに起因している。

【指導上の留意点】

鈍角へ角を拡張した後は，三角比の値を求める時，必ず座標軸をかいて動径を図示し，その図を基に求めるよう指導したい。２種類の直角三角形(30°：60°：90°，45°：45°：90°)の角の大きさと辺の比について確実にしておくことも重要である。

５　数学Ⅰ＋Ａの結果とその考察

次の $\boxed{\quad}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］次の各問いに答えよ。

(1) $a=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ のとき，$a+\dfrac{3}{a}$ を計算すると $\boxed{\quad}$ である。

(2) $(x+y)^2-x-y$ を因数分解すると $\boxed{\quad}$ である。

(3) ２次方程式 $x(x+3)=5$ の解は $x=\boxed{\quad}$ である。

(4) ２次不等式 $x^2-3x<0$ を解くと $\boxed{\quad}$ である。

(5) ２次方程式 $x^2-5x+a=0$ が実数解をもつとき，実数 a の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(6) 放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に-2，y 軸方向に１だけ平行移動したグラフを表す２次関数は，$y=\boxed{\quad}$ である。

(7) ２つの不等式 $4x+3>x+2$，$3x-1\geqq x+7$ を同時に満たす x の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

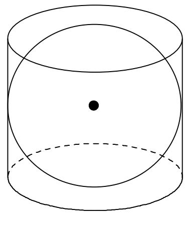
(8) $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ において，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta=\boxed{\quad}$ である。

(9) 命題「$x^2-2x=0$ ならば $x=2$」の真偽は $\boxed{\text{ア}}$ である。また偽のとき，反例は $x=\boxed{\text{イ}}$ である。ただし解答欄のアには真か偽を記入せよ。

(10) Ａ，Ａ，Ｂ，Ｂ，Ｂを１列に並べるとき，異なる並べ方は $\boxed{\quad}$ 通りである。

(11) １から 200 の自然数うち，３でも７でも割り切れない数は $\boxed{\quad}$ 個である。

(12) 底面の直径と高さが等しい円柱にちょうど入る球がある。円柱と球の体積比をもっとも簡単な整数比で表すと $\boxed{\quad:\quad}$ である。



［２］ＯＡ＝6，ＯＣ＝14 である長方形ＯＡＢＣの辺　ＯＣ上にＯＤ＝2 となるように点Ｄをとる。いま，点ＰがＡを出発して辺ＯＡ上を毎秒１の速さでＯに向かうと同時に，点ＱはＤを出発して辺ＯＣ上を毎秒２の速さでＣに向かう。x 秒後の△ＯＰＱの面積を y とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq6$ のとき，ＯＰとＯＱを x の式で表すと，ＯＰ＝$\boxed{\text{ア}}$，ＯＱ＝$\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) (1)のとき，△ＯＰＱの面積 y の最大値は $\boxed{\quad}$ である。

［３］△ＡＢＣにおいて，ＡＢ＝8，ＡＣ＝5，∠Ａ＝60°，∠Ａの二等分線と辺ＢＣの交点をＤとするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 辺ＢＣの長さは $\boxed{\quad}$ である。

(2) △ＡＢＣの外接円の半径は $\boxed{\quad}$ である。

(3) △ＡＢＤの面積は $\boxed{\quad}$ である。

［４］袋の中に赤球２個と白球３個が入っているとき，次の各問いに答えよ。

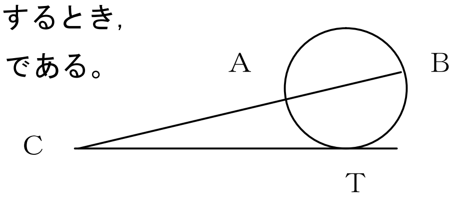
(1) この袋から３個の球を同時に取り出すとき，赤球２個，白球１個を取り出す確率は $\boxed{\quad}$ である。

(2) この袋から１個の球を取り出して色を調べ，また袋に戻す試行を３回繰り返す。このとき赤球２回，白球１回取り出す確率は $\boxed{\quad}$ である。

［５］右の図のように，直径がＡＢの円がある。線分ＡＢを２：３に外分する点をＣとする。

ＡＢ＝2 のとき，Ｃから円に引いた接線と円の接点をＴとするとき，

ＣＴ＝$\boxed{\quad}$ である。



番号	配点	正　答	正答率	正答率 上位群	正答率 下位群	無答率	無答率 上位群	無答率 下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	$2\sqrt{5}$	58	86	29	4	0	12	38	$\dfrac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (3.0), 3 (2.9), $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ (2.2)
(2)	5	$(x+y)(x+y-1)$	41	80	7	30	9	49	29	$x^2+2xy+y^2-x-y$ (8.0), $(x+y)^2-(x+y)$ (1.6)
(3)	5	$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$	69	94	40	8	0	13	23	$x=0,-3$ (2.2), $x=5,2$ (1.4), $x=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}$ (1.3), $x=5,-3$ (1.2)
(4)	5	$0<x<3$	61	94	25	10	0	22	29	$x<3$ (9.6), $x=0,3$ (2.4), $x<0, 3<x$ (2.3)
(5)	5	$a\leqq\dfrac{25}{4}$	41	81	4	23	1	55	36	$a<\dfrac{25}{4}$ (9.0), $a\geqq\dfrac{25}{4}$ (3.8), $a>\dfrac{25}{4}$ (2.3)
(6)	5	$y=2x^2+8x+9$	43	77	4	15	1	42	42	$y=2(x+2)+1$ (2.3), $y=2(x-2)^2+1$ (1.4), $y=2x^2+1$ (1.4), $y=x^2+1$ (1.2)
(7)	5	$x\geqq4$	55	88	17	13	0	34	32	$x>\dfrac{1}{3}$ (8.6), $-\dfrac{1}{3}<x\leqq4$, (7.7)
(8)	5	$2\sqrt{2}$	56	75	27	12	1	29	32	3 (2.4), $\sqrt{2}$ (2.3), $\sqrt{3}$ (1.7), $\pm2\sqrt{2}$ (1.7)
(9)	5	偽， $x=0$	65	93	35	3	0	6	32	真Ｂ (5.2)，真－2 (5.2)，真レ (4.6)
(10)	5	10	44	74	14	7	2	14	49	120 (27.2), 12 (5.5), 25 (2.3), 20 (2.0)
(11)	5	115	40	61	20	8	2	15	52	85 (14.6), 9 (4.7), 191 (3.4), 106 (1.9)
(12)	5	3：2	29	49	14	14	4	21	57	2：1 (11.0)，4：3 (9.8)，3：1 (9.2)
［2］(1)	5	$(6-x, 2x+2)$	40	69	11	17	0	40	43	$(x, 2x)$ (8.9), $(6-x, 12-2x)$ (3.6), $(6-x, 2x)$ (3.4), $(x, 2x+2)$ (3.2)
(2)	5	$\dfrac{49}{4}$	11	15	1	22	5	54	67	12 (29.0), 42 (9.6), 9 (5.0), 6 (2.8)
［3］(1)	5	7	60	95	28	15	0	31	25	$\sqrt{39}$ (2.9), 6 (2.2), $\sqrt{69}$ (1.8)
(2)	5	$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$	37	77	5	31	4	59	32	3 (2.5), 4 (2.5), $\sqrt{3}$ (2.5), 5 (1.8)
(3)	5	$\dfrac{80\sqrt{3}}{13}$	18	41	0	41	13	62	41	$10\sqrt{3}$ (11.4), $5\sqrt{3}$ (2.3), 10 (1.8)
［4］(1)	5	$\dfrac{3}{10}$	47	75	17	8	2	18	45	$\dfrac{3}{5}$ (5.8), $\dfrac{1}{3}$ (5.4), $\dfrac{2}{5}$ (4.4), $\dfrac{1}{10}$ (4.1)
(2)	5	$\dfrac{36}{125}$	14	31	0	24	5	45	62	$\dfrac{12}{125}$ (20.0), $\dfrac{3}{5}$ (1.9), $\dfrac{12}{25}$ (1.8)
［5］	5	$2\sqrt{6}$	24	44	4	19	5	37	57	$\sqrt{15}$ (18.2), 5 (5.4), 4 (5.0), $\sqrt{6}$ (4.2)

(1) ２次不等式の問題についてさらに定着を図りたい。

年度	問題	正答率（上位群／下位群）	主な誤答（標本全体に対する％）
H18	$x^2-25>0$	54%（88%　／17%）	$x>5$（15.4%）$x>\pm5$（5.6%）
H19	$x^2-3x>0$	54%（89%　／８%）	$x>3$（10.9%）$x=3$（3.6%）
H20	$x^2-3x<0$	61%（94%　／25%）	$x<3$（9.6%）$x<0,3<x$（2.3%）

［１］(4) で２次不等式を出題した。表のようにH18，H19 に比べて正答率が上がったのは不等号の向きによるものと思われるが，H19 に引き続き，両辺を x で割ってしまうという解答が 10%程度あった。

【指導上の留意点】

数字で割るときと同じように，安易に文字で割ってしまう生徒が多い。文字の場合，その値が０になる可能性があるので，安易に割ってはいけないということを強調しておきたい。このことは今後の方程式，不等式においても重要な事項であるため，継続して指導していく必要がある。

そして，２次不等式の指導においては因数分解や解の公式を用いて，x 軸との共有点を求めた後，グラフを利用して解くということを徹底させたい。特に下位層においては，視覚的に捉えやすいように１次不等式の段階からグラフを利用して解くことを強調していきたい。

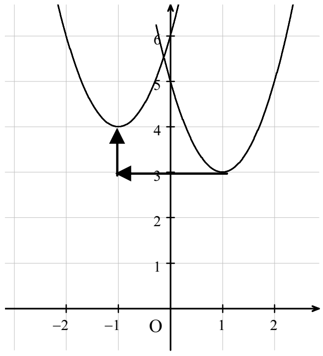
(2) ２次関数の平行移動の問題についての下位層の定着を図りたい。

	問題	正答率（上位群／下位群）	主な誤答（全体に対する％）
H19	放物線 $y=2(x-1)^2+3$ を x 軸方向に－2，y 軸方向に１だけ平行移動したグラフを表す２次関数を求めよ。	49%（78%／９%）	$y=2(x+1)+2$（6.2%） $y=2(x-3)^2+4$（4.2%） $y=2(x+1)^2+2$（1.2%）
H20	放物線 $y=2x^2$ を x 軸方向に－2，y 軸方向に１だけ平行移動したグラフを表す２次関数を求めよ。	43%（77%／４%）	$y=2(x+2)^2+1$（2.3%） $y=2(x-2)^2+1$（1.4%） $y=2x^2+1$（1.4%）

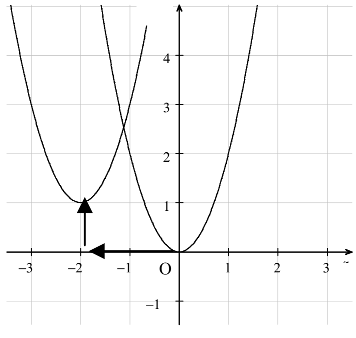
H19 では放物線の頂点が $(1,3)$ であり，H20 は頂点が原点であるため，難易度としては下がっているにもかかわらず正答率は上がらなかった。この問題における誤答として多いのが，２乗の付け忘れや，$y=a(x+p)^2+q$ との覚え間違いであり，２次関数の標準形が曖昧になっていることが分かる。

【指導上の留意点】

２次関数の平行移動の問題については，標準形から頂点や軸を求めるといった基本的な作業を徹底させたい。そして，グラフの頂点を具体的に移動させ，平行移動後のグラフの頂点を標準形の式，$y=a(x-p)^2+q$ の p と q に代入するという流れを定着させたい。特に対称移動と平行移動が関係した問題では，頂点の移動の様子を図示するなど視覚的に捉えさせ代入するように指導したい。



H19



H20

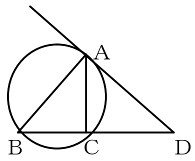
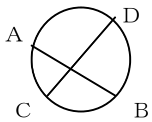
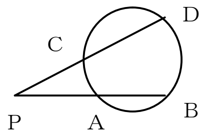
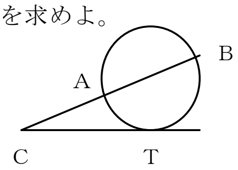
また上位の生徒には，

$$y=f(x) \longrightarrow y-q=f(x-p)$$

x 軸方向に p 平行移動
y 軸方向に q 平行移動

となることを説明するのも効果的である。

(3) 分点の考え方をしっかり理解させ，図示ができるよう指導したい。

年　度	H17	H18	H19	H20
問　題	ＢＣ＝5，ＣＤ＝3 のときＤＡの長さを求めよ。  	ＰＡ＝3，ＰＣ＝2，ＰＤ＝8 のとき，ＰＢを求めよ。  	ＰＡ＝3，ＡＢ＝2，ＰＣ＝2 のとき，ＣＤを求めよ。  	直径ＡＢを 2：3 に外分する点をＣとし，ＡＢ＝2 のときＣＴの長さを求めよ。 
主な誤答	4（８%）	12（９%）	$\frac{4}{3}$（10%）	$\sqrt{15}$（18.2%）
正答率	31%	66%	40%	23.6%
無答率	36%	６%	15%	18.7%

方べきの定理に関する問題は近年連続して出題されている。H18，H19 は考えやすい図形であること，円周角の定理を用いて相似な三角形を容易に見つけられることから正答率が高い。H17 は高校の学習内容（接弦定理）を用いないと相似な三角形を容易に見つけられないため，方べきの定理を知らないと難しく，正答率は低かった。無答率も高かった。

今回は「$\mathrm{PT}^2=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$」の形であるがＡＢが直径であるため，三平方の定理を用いても解くことができる問題であった。しかし正答率はH17 よりも８％も低かった。これは外分の処理ができなかったためと思われる。誤答のＣＴ＝$\sqrt{15}$ は「ＡＢ：ＡＣ＝2：3」として考えた生徒で，全体の 18.2％もいた。

【指導上の留意点】

分点の考え方を理解させるために，次のような指導をしてみてはどうだろうか。

①「ＡＢを 2：1 に外分する」ために，ベクトルの始点・終点の考えを取り入れ「Ａから出発してＢにたどり着く」と考えさせる。そこからさらに「ＡＢを 2：1 に外分（内分)」と「ＢＡを 2：1 に外分（内分)」の比較をし，始点・終点の違いを理解させていく。

②始点・終点の違いを理解した上で「ＡＢを 2：1 に外分する」には，Ａから右に進むのか，左に進むのかという感覚を身につけさせたい。「ＡＢを 2：1 に外分する」にはＡから左に２進むと，１ではＢに戻れないと指導すると生徒は理解しやすいのではないだろうか。

以上のことをふまえて分点を図示する演習を行い，比に十分慣れさせることが必要であると考える。

（4）　「異なるものの順列」と「同じものを含む順列」の違いが理解できていない。

年度	問　題	主な誤答	正答率（上位群／下位群）	無答率（上位群／下位群）
H18	ＡＩＣＨＩを一列に並べる	５！＝120（22%）	40%（74%／７%）	７%（２%／11%）
H19	ＡＡＢＣＤを一列に並べる	５！＝120（23%）	38%（69%／４%）	８%（１%／11%）
H20	ＡＡＢＢＢを一列に並べる	５！＝120（27.2%）	44.2%（74%／14%）	6.9%（2.4%／14.1%）

同じものを含む順列の計算は近年連続して出題されており，正答率は例年 40%前後である。H18では，「ＡＩＣＨＩ」と「Ｉ」が離れて表記されたことにより，認識されにくく正答率が低かったという分析があった。そのため，H19は「ＡＡＢＣＤ」と同じものがわかるような問題を出題したが，正答率および無答率には大きな差はなかった。さらに今回は「ＡＡＢＢＢ」と，昨年よりも一目で「同じものを含む順列」とわかる問題を出題した。下位群の正答率が 10%も増加したことから，隣同士に同じものを並べて表記されると認識はされやすいことがわかった。しかし，５！＝120 とする誤答は例年と変わらず 20%を超える結果であった。このことから，「異なるものの順列」と「同じものを含む順列」の違い自体を理解できない生徒が常に 20%程度いることが伺える。

【指導上の留意点】

以下に数学的活動を取り入れた授業展開を考えてみた。

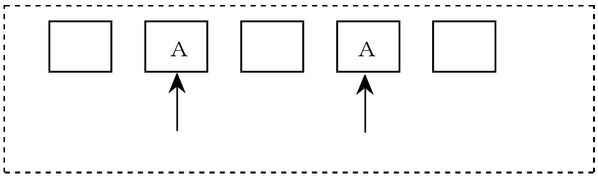
①「ＡＡＢＢＢを一列に並べると，ほんとに５！＝120 通りなのだろうか？」

ＡＡＢＢＢ　ＢＡＡＢＢ　ＢＢＡＡＢ　ＢＢＢＡＡ
ＡＢＡＢＢ　ＢＡＢＡＢ　ＢＢＡＢＡ
ＡＢＢＡＢ　ＢＡＢＢＡ
ＡＢＢＢＡ　　　　以上より　10 通り

実際に「ＡＡＢＢＢ」を書き並べると 10 通りになる。なぜこのような違いができるのだろう。もしも，２つのＡがA_1A_2であれば並べ方は２！＝２通り。同様に３つのＢが$B_1B_2B_3$であれば並べ方は３！＝６通りである。ＡＡＢＢＢの並べ方 10 通りを用いて，$A_1A_2B_1B_2B_3$の並べ方５！＝120 通りは次のように計算できる。

10 通り×２！×３！＝120 通り　　　よって　10 通り＝$\dfrac{120}{2!\times 3!}$　と計算できる。

②「ＡＡＢＢＢ」を一列に並べるには，それぞれの文字を入れる場所を考える。５カ所からＡを入れる場所２カ所選ぶ選び方は${}_5C_2$通り。残りの３カ所からＢを入れる場所３カ所選ぶ選び方は${}_3C_3$通り。よって，



$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10 \text{ 通り}$$

と計算できるのである。

「異なるものの順列」と「同じものを含む順列」の違いを明確に理解させるためには，解説で終わるのではなく，実際に数を数えさせるなど生徒に体験させ，印象を与えることが必要である。この違いの理解は，今後の「グループ分け」の考え方や確率の「反復試行」の考え方に役立つので，ぜひ定着させたい。

６　数学Ⅱの結果とその考察

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$ を計算すると $\boxed{}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(2) ３次方程式 $2x^3+5x^2+x-2=0$ の解は $x=$ $\boxed{}$ である。

(3) ２次方程式 $3x^2-2x+1=0$ の２つの解を α，β とするとき，

$\alpha+\beta=$ $\boxed{ア}$ ，$\alpha\beta=$ $\boxed{イ}$

である。

(4) 点 $(-1,2)$ と直線 $4x+3y-5=0$ との距離は $\boxed{}$ である。

(5) $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ ，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$ の値は $\boxed{}$ である。

(6) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\tan\theta+\sqrt{3}=0$ を満たす θ の値は $\boxed{}$ である。

(7) $r>0$，$-\pi\leqq\alpha<\pi$ として，
$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形すると，$r=$ $\boxed{ア}$ ，$\alpha=$ $\boxed{イ}$ である。

(8) $\log_4 8$ の値は $\boxed{}$ である。

(9) 不等式 $3^{x+1}\leqq 9^x$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(10) 曲線 $y=x^3-2$ 上の点 $(-1,\ -3)$ における接線の傾きは $\boxed{}$ である。

(11) 関数 $F(x)$ は $F'(x)=-6x^2+5$，$F(0)=6$ を満たしている。このとき，$F(x)=$ $\boxed{}$ である。

(12) 放物線 $y=-x^2+5$ と直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。

［２］円 $x^2+y^2-8x+12=0$ ･･･① 上を動く点Ｑ（s, t）と原点Ｏを結ぶ線分ＯＱの中点をＰとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 円①の中心の座標は $\boxed{}$ である。

(2) 点Ｐの座標 (x, y) を s, t で表すと，
$x=$ $\boxed{ア}$ ，$y=$ $\boxed{イ}$ である。

(3) 点Ｐの軌跡の方程式は $\boxed{}$ である。

［３］関数 $y=\log_2 x+\log_2(8-x)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) この関数の定義域は $\boxed{}$ である。

(2) y の最大値は $\boxed{}$ である。

［４］関数 $y=2x^3+3x^2-12x$ $(-3\leqq x\leqq 3)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) この関数の極大値は $\boxed{}$ である。

(2) $-3\leqq x\leqq 3$ のとき，y の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(3) x についての方程式 $2x^3+3x^2-12x=a$ が，$-3\leqq x\leqq 3$ の範囲に異なる３つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。

番号	配点	正　　答	正答率	上位群 / 下位群	無答率	上位群 / 下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	1	79	93 / 62	2	0 / 2	19	$\frac{1}{2}$（5.0），$\frac{2}{1-i^2}$（2.8），2（2.4）
(2)	5	−2，−1，$\frac{1}{2}$	58	87 / 19	16	0 / 40	26	−1（5.5），−2（2.4），$-2,\frac{1}{2},1$（2.4）
(3)	5	$\alpha+\beta=\frac{2}{3},\alpha\beta=\frac{1}{3}$	64	91 / 31	6	1 / 5	30	$\alpha+\beta$ ：$-\frac{2}{3}$（5.4），$\frac{3}{2}$（2.2），$-\frac{1}{3}$（1.8） $\alpha\beta$ ：$-\frac{1}{3}$（6.6），3（3.6），1（3.0）
(4)	5	$\frac{3}{5}$	38	71 / 8	26	2 / 46	36	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$（6.9），3（4.3），−3（2.4），1（2.2）
(5)	5	$\frac{1}{9}$	45	82 / 8	24	3 / 43	31	$\frac{4\sqrt{5}}{9}$（4.6），$-\frac{1}{9}$（4.0），$\frac{2\sqrt{5}}{3}$（3.8），$\frac{5}{9}$（2.4）
(6)	5	$\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$	42	74 / 7	19	0 / 39	39	$\frac{2}{3}\pi$（3.3），$120°, 330°$（3.3），$120°$（3.1）
(7)	5	$r=2,\alpha=-\frac{\pi}{6}$	28	56 / 4	28	2 / 49	44	r ：$\sqrt{3}$（8.4），2（5.3），4（1.0） α ：$\frac{\pi}{6}$（7.4），$\frac{2}{3}\pi$（3.7），$\frac{11}{6}\pi$（3.5）
(8)	5	$\frac{3}{2}$	64	94 / 28	9	0 / 14	27	2（8.5），$\frac{1}{2}$（3.2），3（2.8），$3\log_4 2$（1.4）
(9)	5	$1\leqq x$	67	89 / 48	8	0 / 12	25	$\frac{1}{2}\leqq x$（5.3），$x\leqq 1$（4.8）
(10)	5	3	47	67 / 13	24	2 / 49	29	1（3.5），$y=3x$（3.2），2（2.1），$3x^2$（2.0）
(11)	5	$-2x^3+5x+6$	77	97 / 55	11	0 / 17	12	$-2x^2+5x$（2.4）
(12)	5	$\frac{32}{3}$	39	67 / 9	22	4 / 48	39	$\frac{44}{3}$（7.1），8（3.2），16（3.1），2（2.9）
［2］(1)	5	(4, 0)	69	96 / 31	11	0 / 27	20	(4,−6)（5.8），(4, 1)（2.1），(0, 0)（1.8）
(2)	5	$x=\frac{s}{2},y=\frac{t}{2}$	53	84 / 15	29	2 / 60	18	$\left(\frac{s+4}{2},\frac{t}{2}\right)$（4.1），
(3)		$(x-2)^2+y^2=1$	25	46 / 1	54	19 / 82	21	$(x-4)^2+y^2=1$（2.2），$(x-4)^2+y^2=2$（1.4）
［3］(1)	5	$0<x<8$	43	79 / 10	27	4 / 51	30	$0\leqq x\leqq 8$（7.8），$x<8$（3.2），3（2.4）
(2)	5	4	33	46 / 6	34	12 / 64	33	3（11.6），16（8.9），8（2.7），2（1.4）
［4］(1)	5	20	53	80 / 21	7	0 / 14	40	45（25.0），60（1.1），28（0.9）
(2)	5	$-7\leqq y\leqq 45$	52	76 / 23	9	0 / 20	39	$9\leqq y\leqq 45$（11.1），$-7\leqq y\leqq 20$（3.4）
(3)		$9\leqq a<20$	15	23 / 4	34	5 / 62	51	$-7<a<20$（17.3），$9\leqq a\leqq 20$（5.3），$9<a<20$（4.7），$-7\leqq a\leqq 20$（2.8）

（1）加法定理から公式を導き出せるよう指導したい。

年度	問　　題	正答率（%）（上位群/下位群）	無答率（%）（上位群/下位群）
H17	$\sin\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$ の値	34（72／4）	24（2／44）
H18	$\cos\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$ の値	38（69／6）	23（2／40）
H19		35（66／1）	20（4／31）
H20	$\sin\theta=\frac{2}{3}, \cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$\cos 2\theta$ の値	45（82／8）	24（3／43）
	主な誤答　$\frac{4\sqrt{5}}{9}$（4.6%）　$\frac{1}{9}$（4.0%）　$\frac{2\sqrt{5}}{3}$（3.8%）		

例年は $\cos\theta$ または $\sin\theta$ どちらか一方のみ与えて $\cos 2\theta$ を求めさせていたが，今回は両方の値を与えて出題した。そのためか，例年より高い正答率であり，特に上位群の上昇率が目立つ。このことから，$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ は知っているが $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を活用することができないといえる。また，依然として無答率は全体の１/４もおり，上位群と下位群の正答率の差が一番大きい問題であった。主な誤答としては，$\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，$\cos 2\theta=\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{1}{9}$，$\cos 2\theta=2\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ として計算したと思われる解答であった。

【指導上の留意点】

三角関数に対しての理解が不十分なうえ，加法定理，２倍角の公式，半角の公式，合成，和から積に直す公式など次から次へと公式が出てくるため，混同して覚えられず，消化しきれていない生徒が多いと思われる。まずは三角関数の基本的な性質や加法定理をしっかり定着させ，そして，２倍角の公式や半角の公式などは単なる暗記としてではなく，加法定理から導き出せるよう丁寧に指導する必要がる。

$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta\cdot\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$　を導き出す。さらに，
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を活用し，$\cos^2\theta-\sin^2\theta=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$　を求める。

公式が曖昧な生徒がいたら，その都度，公式を導き出す過程を確認したい。

（2）放物線と直線 *y=b* とで囲まれる部分の面積を求める問題で正答率が下がる。

年度	問　　題	正答率（%）（上位群/下位群）	無答率（%）（上位群/下位群）
H14	放物線 $y=x^2-1$ と x 軸	49（78／21）	23（0／43）
H15	放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸	56（87／28）	22（1／44）
H16	放物線 $y=x^2-4$ と x 軸	49（81／17）	21（1／42）
H18	放物線 $y=-x^2+4$ と x 軸	52（71／25）	20（3／39）
H17	放物線 $y=x^2-3$ と直線 $y=1$	38（62／13）	21（7／29）
H19		36（67／ 8）	23（2／43）
H20	放物線 $y=-x^2+5$ と直線 $y=1$	39（67／ 9）	22（4／48）

直線 $y=ax+b$ に比べ，軸に平行な直線 $x=a$，$y=b$ のグラフをかけない生徒も少なくない。そのため，放物線と直線で囲まれる部分の面積を求める問題では，直線が x 軸のときに比べ，x 軸以外の直線にすると正答率が 10%ほど下がる傾向がある。誤答で最も多かった $\frac{44}{3}$（7.1%）は，交点の x 座標 2，−2 は求めることができたが，面積を $\int_{-2}^{2}(-x^2+5)dx$ として計算してしまったためと考えられる。

【指導上の留意点】

積分計算の前に，直線 $y=b$ など $y=ax+b$（$a\neq0$）以外のグラフも正確にかくことを定着させたい。また，定積分を用いて面積を求める問題では，グラフを必ず図示し，面積を求める図形の上側と下側の境界をしっかり確認させ，被積分関数は（上側の境界）－（下側の境界）であることを強調し，立式の段階でミスをしないよう指導したい。

(3) 指定された区間における関数の極値，値域の問題は苦手な生徒が多い。

年度	問　　題	正答率（%）(上位群/下位群)	無答率（%）(上位群/下位群)
H19	関数 $y=2x^3+3x^2-12x$ の極大値	75（96／53）	10（0／17）
H20	(1) 関数 $y=2x^3+3x^2-12x$ $(-3\leqq x\leqq3)$ の極大値	53（80／21）	7（0／14）
	(2) $-3\leqq x\leqq3$ のとき，y の値の範囲	52（76／23）	9（0／20）
	主な誤答 (1)　45（25%）　　(2)　$9\leqq y\leqq45$（11%）		

上位群・下位群の生徒ともに指定された区間における極値や値域を求める問題は正答率が下がる。(1)の誤答では，グラフの端点 $x=3$ のときの y の値 45 を解答した生徒が 25%を占めた。極値を最大値と勘違いして解答したか，あるいは単純に x の値が最大のとき y の値も最大であるとして解答したと考えられる。(2)についても端点の y の値を答えた誤答が多い。

年度	問　　題		正答率（%）(上位群/下位群)	無答率（%）(上位群/下位群)
H17	方程式 $-2x^3-3x^2+12x=a$	が異なる３つの実数解を持つ	47（69／13）	29（4／56）
H19	方程式 $2x^3+3x^2-12x=a$		44（77／ 6）	33（4／66）
H15	方程式 $2x^3+3x^2-12x-5=a$	が異なる２つの正の解と１つの負の解を持つ	27（59／ 1）	39（8／73）
H16	方程式 $x^3-3x^2-9x-2=a$		25（52／ 3）	37（8／68）
H18	方程式 $2x^3+3x^2-12x=a$		27（54／ 2）	40（5／70）
H14	方程式 $2x^3+3x^2-12x+5=a$	が $-3\leqq x\leqq3$ の範囲に異なる３つの実数解を持つ	13（23／ 0）	40（3／71）
H20	(3) 方程式 $2x^3+3x^2-12x=a$		15（23／ 4）	34（5／62）
	正答　$9\leqq a<20$　　主な誤答　$-7<a<20$（17%）　$9\leqq a\leqq20$（5%）　$9<a<20$（5%）　$-7\leqq a\leqq20$（3%）			

方程式への応用の問題では，実数解の種類に条件がつく場合や，区間が指定してある場合，上位群でも正答率が大幅に下がり，下位群では無答率が目立つ。(2)の値域を求める問題では半数の生徒が正答しているが，(3)の正答率は 15%と激減している。このことからグラフを利用して問題を解くことを苦手とする生徒や，次の問題を解く手掛かりとして前問を生かすことができない生徒が多いことが分かる。また，不等号に「＝」をつけるかどうかが生徒にとっては理解しにくいようである。

【指導上の留意点】

複数の関数や方程式を同時に扱う問題や，区間が指定してある関数や方程式の問題など，複雑な条件がからむ問題を解く場合，計算や増減表だけで済ませるのではなく，区間などもグラフに記入し，視覚的に捉えることで解法の糸口に繋げることが重要である。そのためにも１年生で学習する２次関数から定義域内でグラフをかかせることを徹底したい。