付　平成 21 年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

１　検査の趣旨

当センターでは昭和 51 年から毎年，高等学校数学標準学力検査を実施してきた。今回も次の２つのねらいの下に学力検査を実施し，検査結果を分析・考察して，指導上の留意点を明らかにした。なお，過去の検査結果については，当該年度の当センター研究紀要別冊に掲載している。

(1) 入学者数学学力調査により把握した新入生の学力実態が，その後の高等学校での学習指導を通してどのように変容しているかを調べる。

(2) 基本事項についての理解と定着の程度を調査し，高等学校での指導に役立てる。

２　検査の実施及び処理

(1) 検査問題の種類と問題の構成

検査問題は，数学Ⅰ基本，数学Ⅰ＋Ａ，数学Ⅱの３種類である。どの検査問題も学習指導要領に示された内容を出題の基準とした。検査時間はいずれも 50 分である。

数学Ⅰ基本：　基本的な計算力，基礎事項の定着度を調べる問題を中心に構成した。

数学Ⅰ＋Ａ：　数学Ⅰ基本より高度の思考力・洞察力を要する数学Ⅰの問題に加え，数学Ａの内容も併せて構成した。

数学Ⅱ　　：　問題［１］は基本問題，問題［２］，［３］，［４］は標準問題である。

(2) 調査の対象と方法

各科目の授業が終了した学年を対象に，学校ごとに２月１日から３月 31 日の間に適宜実施した。集計のための標本は各学校とも課程別，類型別に各々２学級分とし，集計用紙（２学級分の得点度数分布と，その 10%の抽出者の解答をそのまま転記したもの）を４月 20 日までに回収した。

３　検査結果の概要

(1) 標本数・平均点・標準偏差　表 14

テスト／項目	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
標本数	1,384	7,108	7,927
平均点	39.0	44.7	48.7
標準偏差	23.6	26.3	29.2

(2) 得点分布（%）　表 15

テスト／得点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
90 ～100	2.6	4.7	9.6
80 ～ 89	4.1	6.9	10.8
70 ～ 79	5.8	9.4	10.0
60 ～ 69	8.0	10.8	9.2
50 ～ 59	12.2	11.3	9.3
40 ～ 49	11.0	12.7	9.1
30 ～ 39	15.9	10.9	9.6
20 ～ 29	15.3	11.5	10.5
10 ～ 19	16.8	11.7	11.4
0 ～ 9	8.2	10.1	10.6

(3) 学校別(課程別)平均点分布（校）表 16

テスト／平均点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
80以上		1	9
75～80未満		4	13
70 ～ 75		3	6
65 ～ 70		5	6
60 ～ 65	3	11	6
55 ～ 60	1	6	8
50 ～ 55	3	7	11
45 ～ 50	2	6	8
40 ～ 45	3	9	9
35 ～ 40	4	7	13
30 ～ 35	2	9	12
25 ～ 30	3	10	3
20 ～ 25	4	3	8
15 ～ 20	1	9	7
15未満	1	6	10
計	27	96	129

４　数学Ⅰ(基本)の問題，結果及びその考察

次の $\boxed{\quad\quad}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］次の各問に答えよ。

(1)　$(a^2 \times a)^4 = \boxed{\quad\quad}$ である。

(2)　$(x-y)^3$　を展開すると $\boxed{\quad\quad}$ である。

(3)　x^2-5x-3 因数分解すると $\boxed{\quad\quad}$ である。

(4)　$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = \boxed{\quad\quad}$ である。

(5)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ の分母を有理化すると $\boxed{\quad\quad}$ である。

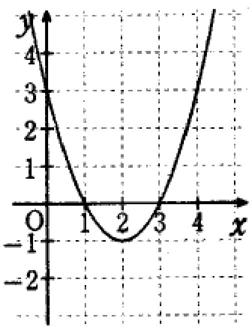
(6)　１次不等式 $5x+1 \leqq 3x+7$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\quad\quad}$ である。

(7)　２次方程式 $2x^2+3x-1=0$ を解くと $x=\boxed{\quad\quad}$ である。

(8)　２次不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\quad\quad}$ である。

［２］次の問に答えよ。

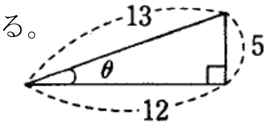
(1)　右図は２次関数 $y=x^2-4x-3$ のグラフである。この関数の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値は $\boxed{\quad\quad}$，最小値は $\boxed{\quad\quad}$ である。



(2)　２次関数の $y=(x+1)^2+2$ のグラフの頂点は $\boxed{\text{ア}}$ であり，このグラフを x 軸方向に１，y 軸方向に－２だけ平行移動したグラフを表す２次関数は $y=\boxed{\text{イ}}$ である。

［３］次の各問いに答えよ。

(1)　右図の直角三角形において $\tan\theta = \boxed{\quad\quad}$ である。



(2)　次の表を完成させよ。
ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

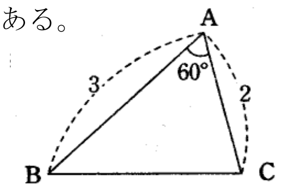
θ	ア	$120°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	イ

(3)　$\sin^2 A + \cos^2 A = \boxed{\text{ア}}$ である。また $90° \leqq A \leqq 180°$ で，$\sin A = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos A = \boxed{\text{イ}}$ である。

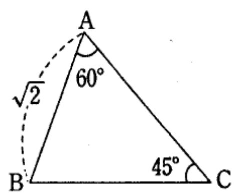
［４］次の各問いに答えよ。

(1)　２つの相似な立体において，相似比が１：３のとき，２つの立体の体積比は，$\boxed{\quad : \quad}$ である。

(2)　右図の△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの長さは $\boxed{\quad\quad}$ である。

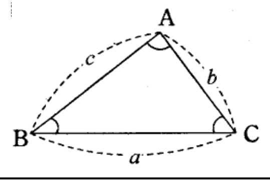


(3)　右図の△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの長さは $\boxed{\quad\quad}$ である。



余弦定理　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$

正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$



番号	配点	正答	正答率	無答率	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1](1)	5	a^{12}	53	5	42	a^{81} (8.2)，a^{8} (4.5)，a^{32} (3.6)，a^{6} (3.2)，a^{7} (3.2)
(2)	5	$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$	25	11	64	x^3-y^3 (5.0)，$x^3-3xy+y^3$ (1.4)，$x^3-3xy-y^3$ (1.4)，$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (1.4)
(3)	5	$(2x+1)(x-3)$	50	26	24	$(x-1)(2x-3)$ (4.1)，$(x+3)(2x-1)$ (3.2)，3，$-\frac{1}{2}$ (2.7) $(x-3)(2x-1)$ (1.4)
(4)	5	$7+2\sqrt{10}$	51	5	44	7 (23.2)，$7+2\sqrt{5}$ (4.1)，$7+\sqrt{10}$ (2.3)，$5+2\sqrt{10}+2$ (2.3)，$7+2\sqrt{7}$ (2.3)
(5)	5	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$	36	12	52	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7}$ (17.7)，$\frac{\sqrt{7}}{7}$ (6.4)，$\frac{\sqrt{10}}{7}$ (3.2)，$\frac{1}{7}$ (2.7)
(6)	5	$x\leqq 3$	50	21	29	3 (10.5)，$0\leqq x\leqq 3$ (4.5)，4 (1.8)，$x\geqq 3$ (1.8)
(7)	5	$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$	30	40	30	$-\frac{1}{2}$，-1 (3.6)，$\frac{1}{2}$，1 (2.3)，-1，1 (1.8)，-1 (1.8)
(8)	5	$x<1$，$2<x$	13	33	54	$1<x<2$ (16.4)，$x=1, 2$ (7.7)，2 (3.2)，$1\leqq x\leqq 2$ (3.2)
[2](1)ア	5	3	66	6	28	なし (14.1)，4 (4.1)，0 (3.2)
イ	5	-1	65	7	28	0 (12.7)，1 (3.2)，2 (1.8)，-2 (1.4)
(2)ア	5	$(-1, 2)$	25	28	47	2 (20.0)，-3 (5.9)，-1 (3.2)，3 (3.2)
イ	5	$-3x^2$	12	41	47	$-3(x+1)^2$ (3.2)，$-3(x+2)^2$ (3.2)，2 (2.7)，3，$-3x$ (2.3)
[3](1)	5	$\frac{5}{12}$	74	6	20	$\frac{12}{13}$ (4.1)，$\frac{5}{13}$ (2.3)，30° (1.8)，$\frac{13}{12}$ (1.4)
(2)ア	5	30°	71	1	18	60° (12.3)，90° (3.2)，45° (1.8)，60 (1.8)
イ	5	$-\frac{1}{2}$	55	4	41	$\frac{1}{2}$ (31.4)，$\frac{2}{\sqrt{3}}$ (1.4)，$\sqrt{3}$ (1.4)，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1.4)
(3)ア	5	1	46	16	38	$\tan^2 A$ (20.5)，$\tan A$ (5.0)，$\frac{1}{\tan A}$ (1.4)，90° (1.4)，180° (1.4)
イ	5	$-\frac{4}{5}$	13	32	55	$\frac{4}{5}$ (31.4)，$\frac{2}{5}$ (4.1)，$\frac{3}{5}$ (2.7)，$\frac{5}{3}$ (1.8)
[4](1)	5	1 : 27	37	9	54	1 : 3 (16.8)，1 : 9 (11.4)，3 : 9 (5.5)，2 : 6 (5.0)
(2)	5	$\sqrt{7}$	39	18	43	7 (8.2)，4 (4.5)，3 (3.2)，5 (1.8)
(3)	5	$\sqrt{3}$	37	29	34	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (6.4)，1 (4.5)，3 (3.6)，2 (2.7)

(1)2 次不等式を解くときは常に 2 次関数のグラフとの対応を意識させたい。

年度	設問番号	設問の概要	正答率%（上位群%/下位群%）	主な誤答例
H21	[1](8)	2 次不等式 $(x-1)(x-2)>0$	13%（30%/4%）	$1<x<2$ （16%）， $x=1,2$ （8%）

左辺の因数分解の形が与えられているにも関わらず，正答率が 13％であった。２次不等式 $(x-1)(x-2)<0$ の解 $1<x<2$ を答えている者が 16%，２次方程式 $(x-1)(x-2)=0$ の解 $x=1,2$ を答えているものが８％もあった。これらの誤答は，２次不等式の解の形を公式として，意味も分からないままに暗記していることに起因している。2 次不等式であるから，(左辺）＝０とした２次方程式の解と不等号を使って挟み込む形にすればよいと誤解しているようである。上位群の無答率は０％であったが，正答率は 30%にとどまった。下位群での無答率は 91%であり，正答率は４％であった。

【指導上の留意点】

２次不等式の解を単純に公式として暗記するのではなく，２次関数のグラフと対応させて理解しておくことが大切である。 $y=$ （２次不等式の左辺）とした２次関数のグラフを余白に描きながら，視覚的に考察する姿勢を養うことが，誤答を少なくすることにつながっていく。その前の段階として，１次不等式を学習するときから,グラフと対応させて不等式の解を求める指導をしておく必要がある。

以上の点を踏まえて，本問２次方程式 $(x-1)(x-2)>0$ を解かせるときには，以下のような段階に分けて指導していきたい。

グラフを用いた不等式の解法

例１　１次不等式 $x-2>0$ を解く場合

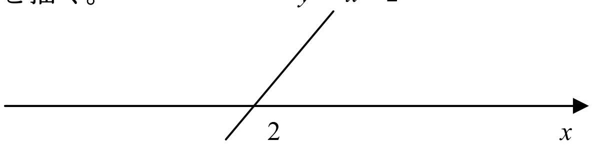
（第１段階）２次関数 $y=x-2$ のグラフと x 軸との交点の x 座標を求めさせる。

$x-2=0$ を解いて，　$x=2$

（これが，不等式の解でないことを意識させる）

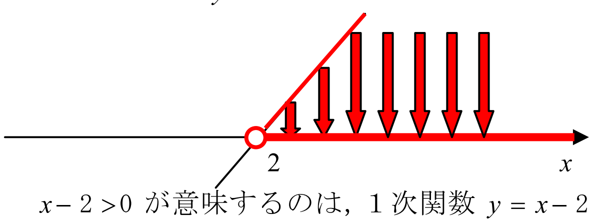
（第２段階）１次関数 $y=x-2$ の簡単なグラフを描く。

$y=x-2$



（第３段階）1 次不等式 $x-2>0$ が意味する x の範囲，つまり１次関数 $y=x-2$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲を答えさせる。

$y=x-2$



$x-2>0$ が意味するのは，1 次関数 $y=x-2$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲である。これをグラフから読み取ると，

$x>2$ ・・・・・(答)

（注意）本問は機械的に解いた方が優しいが，２次不等式の解法に通じるので，グラフを使った解法を紹介しておく。

例２　２次不等式 $(x-1)(x-2)>0$ を解く場合

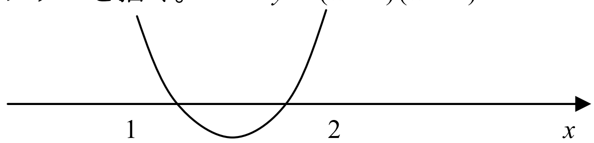
（第１段階）2 次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標を求めさせる。

$(x-1)(x-2)=0$ を解いて，　$x=1,2$

（これが，不等式の解でないことを意識させる）

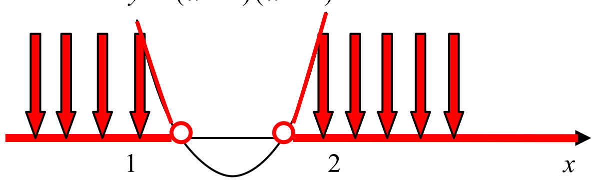
（第２段階）2 次関数 $y=(x-1)(x-2)$ の簡単なグラフを描く。

$y=(x-1)(x-2)$



（第３段階）2 次不等式 $(x-1)(x-2)>0$ が意味する x の範囲，つまり２次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲を答えさせる。

$y=(x-1)(x-2)$



$(x-1)(x-2)>0$ が意味するのは，２次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲である。これをグラフから読み取ると，　$x<1,\ 2<x$ ・・・・・(答)

５　数学Ｉ＋Ａの問題，結果及びその考察

次の $\boxed{\quad}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

[1]　次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ を計算すると $\boxed{\quad}$ である。

(2) $(x+y)^2+2x+2y$ を因数分解すると $\boxed{\quad}$ である。

(3) ２次方程式 $x(x+3)-5=0$ の解は $x=\boxed{\quad}$ である。

(4) ２次不等式 $x^2-6x+9\leqq 0$ を解くと $\boxed{\quad}$ である。

(5) ２次方程式 $x^2-5x+a=0$ が実数解をもたないとき，定数 a の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(6) 放物線 $y=2x^2-4x+5$ を x 軸方向に $\boxed{\quad}$ ，y 軸方向に $\boxed{\quad}$ だけ平行移動したグラフを表す２次関数は $y=2(x+1)^2+4$ である。

(7) ２つの不等式 $x+2<3x+3$ ，$3x-1\geqq x+7$ を同時に満たす x の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

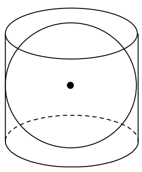
(8) $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ において，$2\sin\theta-1=0$ を満たす θ の値は $\boxed{\quad}$ ある。

(9) ５人が手をつないで輪を作る方法は $\boxed{\quad}$ 通りである。

(10) ６個の数字０，１，２，３，４，５から異なる３個の数字を並べてできる３桁の奇数は $\boxed{\quad}$ 個ある。

(11) １から 100 の自然数のうち，２でも３でも割り切れない数は $\boxed{\quad}$ 個である。

(12) 底面の直径と高さが等しい円柱にちょうど入る球がある。円柱の底面の半径が３であるとき，円柱と球の体積比をもっとも簡単な整数比で表すと $\boxed{\quad : \quad}$ である。



[2] ＯＡ＝６，ＯＣ＝14 である長方形 ＯＡＢＣ の辺 ＯＣ 上に ＯＤ＝２ となるように点 Ｄ をとる。いま，点 Ｐ が Ａ を出発して辺 ＯＡ 上を毎秒１の速さで Ｏ に向かうと同時に，点 Ｑ は Ｄ を出発して辺 ＯＣ 上を毎秒２の速さで Ｃ に向かう。x 秒後の △ＯＰＱ の面積を y とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 6$ のとき，ＯＰとＯＱを x の式で表すと，ＯＰ＝$\boxed{\quad}$ ，ＯＱ＝$\boxed{\quad}$ である。

(2) (1)のとき，y を x の式で表すと $y=\boxed{\quad}$ であり，□ＯＰＱの面積 y の最大値は $\boxed{\quad}$ である。

[3]　△ＡＢＣにおいて，ＡＢ＝８，ＡＣ＝５，∠Ａ＝60°，∠Ａの二等分線と辺ＢＣの交点をＤとするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 辺ＢＣの長さは $\boxed{\quad}$ である。

(2) △ＡＢＣの外接円の半径は $\boxed{\quad}$ である。

(3) △ＡＢＤの面積は $\boxed{\quad}$ である。

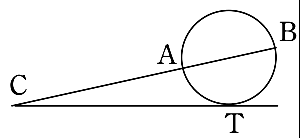
[4]　Ａ，Ｂの２チームで野球の試合をする。ＡはＢに $\frac{1}{3}$ の確率で勝ち，引き分けはないものとする。

３試合を行ったとき，次の確率を求めよ。

(1) Ａが３試合とも負ける確率は $\boxed{\quad}$ である。

(2) Ａが１試合だけ勝つ確率は $\boxed{\quad}$ である。

[5]　直径がＡＢの円に対し，右の図のように点Ａが線分 ＢＣを１：２ に内分する点となるように点Ｃをとる。



Ｃから円に接線を引き，接点をＴとする。

ＡＢ＝２ のとき，ＣＴ＝ $\boxed{\quad}$ である。

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	-6	71	93	56	4	0	8	25	$-6+\sqrt{35}$（2.6），－1（1.7），1（1.3）
(2)	5	$(x+y)(x+y+2)$	47	88	10	23	5	38	30	$x^2+2xy+y^2+2x+2y$（7.2） $(x+y)^2+2(x+y)$（4.9），$2(x+y)^3$（2.0）
(3)	5	$x=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$	72	93	49	8	0	14	20	0, −3（1.8），5，−3（1.5），$\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$（1.2）
(4)	5	$x=3$	42	66	14	4	0	9	54	$x\leqq 3$（25.3），$-3\leqq x\leqq 3$（4.3），$0\leqq x\leqq 3$（3.3），$x\geqq 3$（2.7）
(5)	5	$a>\frac{25}{4}$	49	90	7	23	0	47	28	$a<\frac{25}{4}$（5.5），$a\geqq\frac{25}{4}$（2.0），$a>-\frac{25}{4}$（1.3）
(6)	5	ア −2 イ 1	40	73	7	8	0	14	52	ア 2，イ 1（10.4），ア 2，イ－1（2.9）， ア－1，イ 4（2.6），ア－2，イ－1（2.2）
(7)	5	$x\geqq 4$	55	88	19	12	0	21	33	$-\frac{1}{2}<x\leqq 4$（8.2），$x>-\frac{1}{2}$（6.2）， $x\leqq 4$（1.7），$x<-\frac{1}{2}$，$4\leqq x$（1.5）
(8)	5	30°，150°	50	76	19	16	1	28	34	30°（9.9），$\frac{1}{2}$（3.5），$\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi$（2.9） 90°（2.2）
(9)	5	24	65	88	46	3	0	3	32	120（14.6），25（3.3），60（2.0），16（1.5）
(10)	5	48	26	47	12	8	1	14	66	100（7.6），75（7.5），45（3.0）， 20（2.9），120（2.8）
(11)	5	33	43	56	24	6	5	8	51	67（7.6），16（5.8），17（5.5），84（5.4）
(12)	5	3：2	31	44	15	13	7	15	56	3：1（8.8），2：1（6.7），4：3（5.1）， 2：3（3.3）
［2］(1)	5	ア $6-x$ イ $2+2x$	43	74	18	15	0	28	42	$(x, 2x)$（9.2），$(6-x, 12-2x)$（4.0）， $(x, 2+2x)$（3.8），$(6-x, 2x)$（2.1）
(2)	5	ウ $-x^2+5x+6$ エ $\frac{49}{4}$	13	23	0	20	6	33	67	（$-x^2+5x+6$，12）(8.7)，（無答，12）(2.5)，（$\frac{1}{2}(6-x)(2x+2)$，12）(1.8)，（x^2+x，42）(1.6)
［3］(1)	5	7	62	88	38	14	1	24	24	$\sqrt{69}$（2.4），6（1.7），13（1.6），$\sqrt{39}$（1.2）
(2)	5	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	35	57	3	31	9	61	34	4（4.0），7（3.0），$\sqrt{3}$（2.5），3（1.6）
(3)	5	$\frac{80\sqrt{3}}{13}$	16	32	1	41	18	66	43	$10\sqrt{3}$（12.0），$5\sqrt{3}$（3.6），10（3.0），20（1.7）
［4］(1)	5	$\frac{8}{27}$	65	92	39	9	0	17	26	$\frac{3}{2}$（4.3），$\frac{1}{27}$（3.8），$\frac{1}{8}$（3.6），$\frac{1}{9}$（1.6）
(2)	5	$\frac{4}{9}$	34	63	6	10	0	18	56	$\frac{4}{27}$（28.1），$\frac{1}{3}$（9.6），$\frac{3}{8}$（2.9），$\frac{1}{9}$（2.5）
［5］	5	$2\sqrt{6}$	42	69	17	13	0	26	45	5（9.0），$2\sqrt{2}$（7.0），6（4.2），4（3.7）

(1) $D=b^2-4ac$ の必要性と有効性を実感させたい。

年度	問題	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例
H19	２次方程式 $x^2-5x+a=0$ が異なる２つの実数解をもつとき，実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。	50%（89% ／ ７%）	$a>\frac{25}{4}$ （3.7），$a\leqq\frac{25}{4}$ （3.1）
H20	２次方程式 $x^2-5x+a=0$ が実数解をもつとき，実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。	41%（81% ／ ４%）	$a<\frac{25}{4}$ （9.0），$a\geqq\frac{25}{4}$ （3.8）
H21	２次方程式 $x^2-5x+a=0$ が実数解をもたないとき，実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。	49%（90% ／ ７%）	$a<\frac{25}{4}$ （5.5），$a\geqq\frac{25}{4}$ （2.0）

［1］(5)で２次方程式の実数解の個数について出題した。H19 は「異なる２つの実数解をもつ」に対してH20 は「実数解をもつ」としたため，正答率は 41%に下がった。H19，H21 の正答率から $D=b^2-4ac$ の符号の向きの違いは理解していることは分かる。また，H20 の正答率や誤答例から生徒は $D=b^2-4ac$ の不等号に等号が入るか入らないかの区別が出来ていないことが分かる。上位群と下位群を見てみると，上位群の約９割は $D=b^2-4ac$ の使い方を理解しているが，下位群は１割もの生徒が使い方を理解していないことが分かる。下位群の無答率は 47%となっており，２次方程式に a などの文字が入ってしまうと，難しい問題だという意識を持ってしまい，最初から問題に取り組まない場合が多い。また，誤答例から，実数解という意味をしっかりと理解していない生徒や，$D=b^2-4ac>0$ をグラフが y 軸よりも上になると勘違いし，共有点がないと覚えている生徒もいるようである。

【指導上の留意点】

数学Ⅰにおいて，2 次方程式の解の公式のあとに，$D=b^2-4ac$ を使った実数解の個数のことについて学ぶ。そのとき，$D=b^2-4ac$ は解の公式のルートの中と同じであることを強調する。２次関数のグラフと x 軸との位置関係の単元でも $D=b^2-4ac$ を使った方が有効な場合がある。

また，実数解をもつ２次方程式はどんな係数の場合になるのか，生徒本人に問題を作らせるのも思考力を高めるすばらしい指導法である。

例：$\boxed{ア}\,x^2+\boxed{イ}\,x+\boxed{ウ}=0$ の□の中に数を入れて，異なる実数解をもつ場合，重解を持つ場合，実数解をもたない場合の３つの式を作ってみよう。そして友達と作った式を出題しあい，実数解の個数を当ててみよう。

・どういった数の組だと実数解の個数がわかりにくいか？
　因数分解ができないとわかりにくい。係数に無理数や分数が入るとわかりにくい。

・簡単に見つけ出す法則はあるのかな？
　アとウに入った符号が違う場合（＋とー）のときは必ず実数解をもつ。重解のときもあるけれど。

・確実に見つけ出すにはどうしたらいい？
　解の公式を使うといい。

・解の公式を使うと余分な計算はないかな？解の公式で最低でも必要な部分はあるかな？
　分母の部分は必要ない。
　ルートの中身だけがわかればいい。　⇨　$D=b^2-4ac$ の導入へ

(2) 正弦定理を正確に使えるようにしたい。

［３］△ABC において，AB=８，AC=５，∠A＝60°，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，次の問いに答えよ。
（１）辺 BC の長さは $\boxed{}$ である。
（２）△ABC の外接円の半径は $\boxed{}$ である。

この問題の全体の正答率だけを見てみると，大きな変動はみられない。しかし上位群の正答率を見ると，(1)，(2)においては３年間で一番低いものになった。特に(2)の上位群の正答率は例年よりも低いものとなった。余弦定理より正弦定理の方が定着していないことが分かる。

年度	正答率（上位群　／　下位群）	
	(1)	(2)
H19	62%(98% / 33%)	34%(67% / 4%)
H20	60%(95% / 28%)	37%(77% / 5%)
H21	62%(88% / 38%)	35%(57% / 3%)

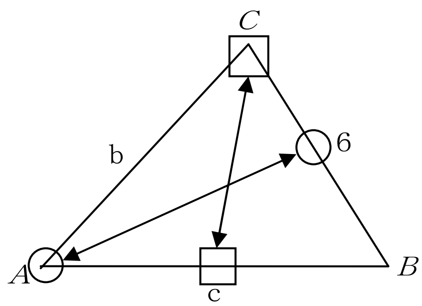
【指導上の留意点】

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ はイコールが３つも入った式になっており，今まで学んできた式の形「左辺＝右辺」とは違い，生徒にとっても馴染みのないものである。そのため数学を苦手としている生徒にとっては，なかなか受け入れることができず処理に困っていると思われる。

まず，図をかくことができない生徒が多いので，必ず図をかくよう指導したい。そして問題文から角度や辺の長さがわかっているところに着目して，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ や $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ の形のように必要なところだけを書き出し，計算するよう指導していく。計算の際に，繁分数となる場合がほとんどなので，分母分子に同じものをかけて処理するか，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ を $a \div \sin A = 2R$ あるいは $a = 2R \cdot \sin A$ のようにしてから処理するなど，各学校の実状に合わせて指導したい。そして，問題のレベルも，単純に答えがでるものから複雑なものまで扱い，正弦定理の使い方を理解させていく必要がある。

例：△ＡＢＣにおいて，∠A＝45°，∠C＝60°，BC＝6　のとき，
ＡＢの長さを求めよ。

問題文から分かるところに○や□などの記号を図形に書き込む。そして，必要な部分だけ書き出して考える。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\boxed{c}}{\sin \boxed{C}}=2R \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ}$$

(3) 順列問題における並べ方の優先順位を考えさせる。

３桁の整数をつくる問題は過去にも出題されているが，H21 の問題ではさらに奇数という条件を付け加えた。その結果，正答率が大幅に下がった。誤答の例としては，奇数という条件が抜けていたり，百の位の「0」に関する場合分けが不十分である誤答が目立つ。条件が複雑になると対処しきれず，大きく正答率が下がることが分かる。

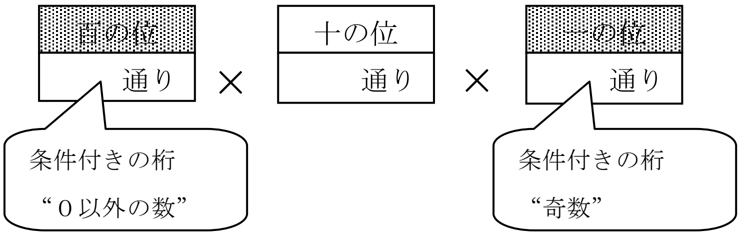
年度	問　　題	正答率
H15	0，1，2，3，4 から異なる３個を並べて３桁の整数をつくる	59%
H17	0，1，2，3，4 から異なる３個を並べて３桁の整数をつくる	58%
H21	0，1，2，3，4，5 から異なる３個を並べて３桁の奇数をつくる	25.7%

誤答例	誤答率	誤答分析
100	7.6%	（百:0 以外の５通り）×（十:残りの数５通り）×（一:残りの数４通り）
75	7.5%	（百:0 以外の５通り）×（十:残りの数５通り）×（一:奇数３通り）
45	3.0%	（一:奇数３通り）×（十:残りの数５通り）×（百:0 以外で３通り）

【指導上の留意点】

桁数の問題は，右のような枠を書いて，条件が付いている桁から考えていく。

今回の場合のように，条件付きの桁が複数ある場合は，どちらかを優先して考える。以下の解答例のように優先する桁の順番によって場合分けが必要な場合がある。



解答１　「一の位」→「百の位」→「十の位」の順番で考える。

「一の位」･･･奇数は１，３，５の３通り。

「百の位」･･･０と「一の位以外」の４通り。

「十の位」･･･残った数字の４通り。

従って，４×４×３＝４８通り

百の位		十の位		一の位		
４通り	×	４通り	×	３通り	＝	４８通り

解答２　「百の位」→「一の位」→「十の位」の順番で考える。

この場合，「百の位」に奇数を使った場合とそうでない場合で，
「一の位」の結果に影響を与えるので場合分けが必要である。

（ｉ）「百の位」で奇数を使う場合は１，３，５の３通り。

「一の位」･･･「百の位以外」の奇数は２通り。

「十の位」･･･残った数字の４通り。

百の位		十の位		一の位		
３通り	×	４通り	×	２通り	＝	２４通り

（ⅱ）「百の位」で奇数を使うわない場合は２，４の２通り。

「一の位」･･･奇数は３通り。

「十の位」･･･残った数字の４通り。

百の位		十の位		一の位		
２通り	×	４通り	×	３通り	＝	２４通り

（ｉ）（ⅱ)より，２４＋２４＝４８通り

今回は，奇数を求める問題だったので，場合分けのない解答１が簡単であるが，偶数を求める問題や，５の倍数を求める問題になると場合分けが必要となるので，解答１の解説後，解答２の方法も学習しておく必要がある。また，グループ学習を取り入れて，お互いに説明し合ったり，どの方法が求めやすいかを話し合うのも有効な指導法である。

６　数学Ⅱの問題，結果及びその考察

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$ を計算すると $\boxed{}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(2) ３次方程式 $2x^3+x^2-5x+2=0$ の解は $x=\boxed{}$ である。

(3) ２次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の２つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2=\boxed{}$ である。

(4) 点$(-1,\ 2)$と直線 $4x+3y-5=0$ との距離は $\boxed{}$ である。

(5) $\sin 15^\circ$ の値は $\boxed{}$ である。

(6) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\tan\theta+\sqrt{3}=0$ を満たす θ の値は $\boxed{}$ である。

(7) $r>0$，$-\pi\leqq\alpha<\pi$ として，$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形すると，$r=\boxed{ア}$，$\alpha=\boxed{イ}$ である。

(8) $\log_{\frac{1}{2}}8$ の値は $\boxed{}$ である。

(9) 曲線 $y=x^3-2$ 上の点$(-1,\ -3)$における接線の傾きは $\boxed{}$ である。

(10) 関数 $F(x)$は $F'(x)=-6x^2+5$，$F(1)=2$ を満たしている。このとき，$F(x)=\boxed{}$ である。

(11) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=4x$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。

［２］円 $x^2+y^2-8x+12=0$ ･･･ ① 上を動く点Ｑ$(s,\ t)$と原点Ｏを結ぶ線分ＯＱの中点をＰとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 点Ｑは円①上を動くので，s，t が満たす関係式は $\boxed{}$ である。

(2) 点Ｐの座標 (x, y) を s，t で表すと，$x=\boxed{ア}$，$y=\boxed{イ}$ である。

(3) 点Ｐの軌跡の方程式は $\boxed{}$ である。

［３］関数 $y=4^x-2^{x+4}+3$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) $2^x=t$ とおくとき，t がとる値の範囲はである。

(2) y を t の式で表すと，$y=\boxed{}$ である。

(3) y の最小値は $\boxed{}$ である。

［４］関数 $y=2x^3+3x^2-12x$ $(-3\leqq x\leqq 3)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) この関数の極大値は $\boxed{}$ である。

(2) $-3\leqq x\leqq 3$ のとき，y の最大値は $\boxed{ア}$，最小値は $\boxed{イ}$ である。

(3) x についての方程式 $2x^3+3x^2-12x=a$ が，$-3\leqq x\leqq 3$ の範囲に異なる３つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	1	79	94	70	3	0	3	18	$\frac{1}{2}$ (6.8)，$\frac{2}{1-i^2}$ (2.0)，2 (1.5)，$\frac{2}{(1+i)(1-i)}$ (0.8)
(2)	5	−2，$\frac{1}{2}$，1	59	94	23	18	0	37	23	1 (6.4)，−2, 1 (2.0)，1, 2, 1/2 (0.8)，−2, −1, 1/2 (0.8)
(3)	5	$-\frac{7}{4}$	55	88	18	11	0	23	34	1 (4.0)，$\frac{25}{4}$ (3.6)，$\frac{9}{8}$ (2.4)，$\frac{1}{4}$ (1.6)
(4)	5	$\frac{3}{5}$	39	74	2	26	4	53	35	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ or $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (6.4)，3 (3.8)，−3 (3.7)，1 (1.7)
(5)	5	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	39	74	9	13	3	17	48	1/4 (7.0)，$\pi/12$ (6.4)，1/2 (4.1)，$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (4.0)
(6)	5	$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$	39	64	8	20	1	37	41	120° or $2\pi/3$ (7.6)，120°，300° (4.0)，$5\pi/3$ or 300° (2.7)，$\pi/3$，$4\pi/3$ (2.3)
(7)	5	ア 2，イ $\frac{\pi}{3}$	41	80	5	30	0	59	29	ア 2, イ $\pi/6$ (5.4)，ア 2, イ 60° (1.9)，ア 2, イ $\sqrt{3}/2$ (1.7)，ア 2, イ 1/3 (0.9)
(8)	5	−3	72	100	51	6	1	8	22	16 (2.6)，−4 (2.5)，4 (2.5)，$2\sqrt{2}$ (1.9)
(9)	5	3	48	78	21	22	0	41	30	1 (4.8)，−3 (4.1)，2 (2.6)，$y=3x$ (2.5)
(10)	5	$-2x^3+5x-1$	66	91	37	10	0	18	24	$-2x^3+5x$ (8.2)，x^3-6x^2+5x (1.0)，$-3x^2+5x$ (0.8)，−19 (0.6)
(11)	5	$\frac{32}{3}$	56	94	22	22	0	40	22	4 (2.9)，8 (1.6)，16 (1.6)，32 (1.4)
［2］(1)	5	$s^2+t^2-8s+12=0$	58	97	23	26	1	56	16	$(x-4)^2+y^2=4$ (2.6)，$s^2+t^2-8s+12$ (0.7)，$s^2+t^2=4$ (0.6)
(2)	5	ア $\frac{s}{2}$，イ $\frac{t}{2}$	50	85	8	31	9	64	19	ア$\frac{s+t}{2}$，イ$\frac{t}{2}$ (3.0)，ア 4，イ 0 (0.9)，ア s，イ t (0.8)
(3)		$(x-2)^2+y^2=1$	24	58	0	50	0	81	26	$(x-4)^2+y^2=4$ (2.1)，$(x-4)^2+y^2=1$ (2.0)，$(x-2)^2+y^2=2$ (1.1)，$s^2+t^2-16s+48=0$ (1.1)
［3］(1)	5	$1 \leqq t \leqq 4$	52	90	8	21	0	42	27	$0 \leqq t \leqq 4$ (5.6)，$0 \leqq t \leqq 2$ (2.6)，$0 \leqq t \leqq 1$ (2.0)，$t>0$ (2.0)
(2)	5	$t^2-16t+3$	48	90	5	20	0	43	32	t^2-4t+3 (7.1)，$-14t+3$ (3.3)，$-t^2+2t+3$ (1.7)，$-t^4+2t+3$ (1.2)
(3)	5	−45	28	38	12	26	0	47	46	−61 (11.7)，−13 (4.4)，−1 (4.1)，−12 (3.9)
［4］(1)	5	20	69	94	41	8	0	14	23	45 (7.9)，3 (2.0)，13 (1.6)
(2)	5	ア 45　イ −7	58	90	36	8	0	12	34	ア 45 イ 9 (5.3)，ア 20 イ −7 (4.7)，ア 45 イ −9 (2.2)
(3)	5	$9 \leqq a < 20$	14	29	1	32	4	57	54	$-7<a<20$ (17.5)，$9<a<20$ (7.0)，$9 \leqq a \leqq 20$ (4.7)

(1)軌跡についての理解が不十分である。

<table>
<tr><th>年</th><th colspan="2">問　　　題</th><th>正答率(%)(上位群/下位群)</th></tr>
<tr><td>H19</td><td colspan="2">〔2〕(3) 円 $x^2+y^2-8x+12=0$ 上を動く点Qと原点Oとを
結ぶ線分OQの中点Pの軌跡の方程式は □ である。</td><td>２３（３８／　１）</td></tr>
<tr><td rowspan="6">H20
21</td><td colspan="2">円 $x^2+y^2-8x+12=0$ ・・・① 上を動く点Q（s，t）と原点Oを結ぶ線分OQの中点をPとする。このとき，次の問に答えよ。</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">H20</td><td>(2) 点Pの座標（x，y）を s，t で表すと，$x=$ □ ，$y=$ □ である。</td><td>５３（８４／１５）</td></tr>
<tr><td>(3) 点Pの軌跡の方程式は □ である。</td><td>２５（４６／　１）</td></tr>
<tr><td rowspan="3">H21</td><td>(1) 点Qは円①上を動くので s，t が満たす関係式は， □ である。</td><td>５８（９７／２３）</td></tr>
<tr><td>(2) 点Pの座標（x，y）を s，t で表すと，$x=$ □ ，$y=$ □ である。</td><td>５０（８５／　８）</td></tr>
<tr><td>(3) 点Pの軌跡の方程式は □ である。</td><td>２４（５８／　０）</td></tr>
</table>

軌跡に関する問題の定着が悪いので，３年間にわたり，その原因を探った。H19 に一般的な出題をしたところ，正答率は，23%しかなく，軌跡についての理解が不十分であることが分かった。上位群でさえ正答率は 38%であった。そこで，H20 に媒介変数 s，t を与えて，x，y を s，t を用いて表す小問を入れたところ，小問は半数以上の生徒が正解しているにもかかわらず，軌跡を求められた生徒は前年度と変わりなく 25%しかなかった。そこで，H22 はさらに媒介変数 s，t の関係式を求める小問を入れて出題したところ，(1)(2)の小問までは前年同様，半数以上の生徒が正解した。しかし，最後の軌跡を求められたのは以前と変わりなく 24%であった。つまり，(1)(2)のような軌跡を求める準備段階の小問は半数以上解くことができるが，そこまで誘導しても，根本的に軌跡の求め方を理解していないため，軌跡を求められないのである。

上位群は，小問を入れることにより(3)の正答率は上がっているが，やはり，根本的に軌跡の求め方を理解していないため，(1)(2)の正答率が 85%以上あるのに，(3)の正答率は 58%しかない。

【指導上の留意点】

目標
点P(x，y)の軌跡を求めるには，x，y の間に成り立つ関係式を求めればよい。

軌跡の問題を解くたびに，何を求めるのか生徒に質問し，目標を再確認する必要がある。もし，点Pの座標を x，y とすると，円 $x^2+y^2-8x+12=0$ のような関数の x，y と混同してしまうならば，点Pの座標を X，Y とし，X，Y の関係式を求めさせてもよい。

解答例　　円上の点Q（s，t）は $s^2+t^2-8s+12=0$ を満たす。

点Pの座標(X，Y)は $\left(\dfrac{s}{2},\dfrac{t}{2}\right)$ である。よって　$s=2X$，$t=2Y$ である。

$s^2+t^2-8s+12=0$ に代入する。$4X^2+4Y^2-16X+12=0$　∴ $X^2+Y^2-4X+3=0$

よって点P(X，Y)は，円 $x^2+y^2-4x+3=0$ 上にあり，

点Pの軌跡は，中心(2，0)，半径１の円である。

(2) 指数計算の理解が不十分である。

問　　　題	正答率(%)(上位群/下位群)
関数 $y=4^x-2^{x+4}+3$ （$0\leqq x\leqq 2$）について，次の問に答えよ。	
(1) $2^x=t$ とおくとき，t がとる値の範囲は □ である。	５２（９０／　８）
(2) y を t の式で表すと，$y=$ □ である。	４８（９０／　５）
(3) y の最小値は □ である。	２８（３８／１２）

(1) では $t>0$ や $0 \leqq t \leqq 4$，$0 \leqq t \leqq 2$ ，などの誤答が 12%もあったことから，$2^0=0$ と誤解している生徒が多くいることが分かる。

(2) では指数法則を使って $4^x=2^{2x}$ や $2^{x+4}=2^4 \cdot 2^x$ とできない生徒が半数いることが分かる。

(3) では，(1) で求めた定義域の範囲内で，(2) で求めた２次関数の最小値を求めなければならないのに，定義域を考慮していない誤答が目立った。

【指導上の留意点】

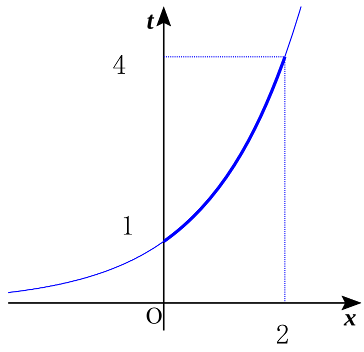
(1) では，グラフを利用して，確認するよう指導する必要がある。

$t=2^x \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

$x=0$ のとき $t=2^0=1$

$x=2$ のとき $t=2^2=4$

右図より $1 \leqq t \leqq 4$

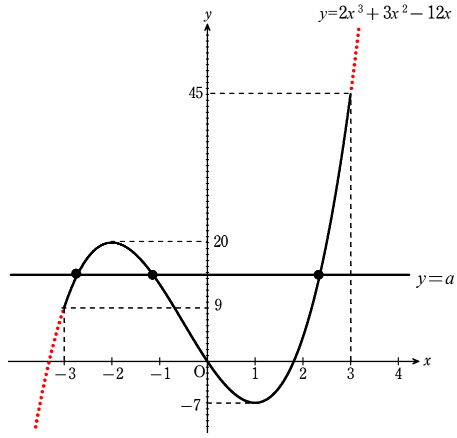


また，文字の置き換えをした場合，常に，定義域の存在を気にするよう指導していく必要がある

(3) 必ずグラフをかいて解くことが重要である。

年		問　　　題	正答率(%)(上位群/下位群)
H19		関数 $y=2x^3+3x^2-12x$ について，次の各問いに答えよ。	
		(1) この関数の極大値は $\boxed{}$ である。	７５（９６／５３）
		(2) x の３次方程式 $2x^3+3x^2-12x-a=0$ が異なる３つの実数解をもつような定数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。	４４（７７／　６）
H20 21		関数 $y=2x^3+3x^2-12x$ ($-3 \leqq x \leqq 3$) について次の問いに答えよ。	
	H20	(1) この関数の極大値は $\boxed{}$ である。	５３（８０／２１）
		(2) $-3 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の値の範囲は $\boxed{}$ である。	５２（７６／２３）
		(3) x についての方程式 $2x^3+3x^2-12x=a$ が，$-3 \leqq x \leqq 3$ の範囲に異なる３つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。	１５（２３／　４）
	H21	(1) この関数の極大値は $\boxed{}$ である。	６９（９４／４１）
		(2) $-3 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の最大値は，$\boxed{}$ 最小値は $\boxed{}$ である。	５８（９０／３６）
		(3) x についての方程式 $2x^3+3x^2-12x=a$ が，$-3 \leqq x \leqq 3$ の範囲に異なる３つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。	１４（２９／　１）

H19 では，定義域が実数全体であるが，H20，H21 では，定義域を $-3 \leqq x \leqq 3$ として出題した。(2) の最大値・最小値を求める問題では，グラフをかいて解答していない生徒があり，機械的に，極大値・極小値を解答したり，x の端点に対する y の値を解答した誤答があった。(3) の実数解の個数に関する問題でも，グラフをかいていないため，３個になる範囲が正確につかめず間違えている生徒が目立った。



【指導上の留意点】

グラフを実際に書くことによって視覚的に得られる情報を理解することが重要である。ＧＲＡＰＥＳなどで $y=a$ のグラフを実際に動かして見せ視覚的に訴えることが大切である。