

平成 22 年 度 高等学校新入学生徒の学力に関する研究（数学）

本研究会では、愛知県高等学校数学研究会と共同で、参加を希望した県内の高等学校において、新入学生徒を対象にした学力調査及び在学学生徒を対象にした学力検査を毎年実施し、結果の集計・分析・考察を行っている。

この研究は以下の内容で、本年度分についてまとめたものである。

- (1) 調査の趣旨，調査の実施及び処理，調査結果の概要，分析結果の概要，調査問題の妥当性と信頼性（S－P表処理等による分析）
- (2) テスト[A]，テスト[B]，テスト[T]の結果とその考察
- (3) 平成21年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

<検索用キーワード>

数学 中学校 高等学校 学力調査 数学Ⅰ 数学Ⅱ 正答率 誤答分析

研 究 会 委 員

愛知県立瑞陵高等学校教諭	青木勝人
愛知県立春日井南高等学校教諭	野澤真理
愛知県立犬山南高等学校教諭	堀田圭悟
愛知県立佐屋高等学校教諭	山本 治
愛知県立阿久比高等学校教諭	嘉賀正泰
愛知県立東浦高等学校教諭	筒井正善
愛知県立碧南高等学校教諭	松村貴之
愛知県立豊橋南高等学校教諭	古関利勝
愛知県立三谷水産高等学校教諭	小峰慶紀
愛知県立小坂井高等学校教諭	向坂健二
愛知県総合教育センター研究指導主事	齋藤育浩（主務者）

目 次

1 調査の趣旨	26
2 調査の実施及び処理	26
3 調査結果の概要	26
4 分析結果の概要	27
5 調査問題の妥当性と信頼性（S－P表処理等による分析）	28
6 テスト[A]の結果とその考察	30
7 テスト[B]の結果とその考察	33
8 テスト[T]の結果とその考察	39
付 平成 21 年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察	42

1 調査の趣旨

当センターでは愛知県高等学校数学研究会と共同で、昭和30年以来、高等学校入学者数学学力調査を実施してきた。調査結果を分析・考察し、指導上の留意点を明らかにして、中高連携の立場からそれぞれの数学教育に有用な資料を提供することが目的である。また、本調査を継続して実施することにより新入学生徒の学力傾向の推移をつかむことができ、指導の参考とすることができる。

2 調査の実施及び処理

(1) 調査問題の構成

調査問題をテストA、テストB、テストTの3種類に分け、各々について次の立場で問題を作成した。調査時間はいずれも50分である。

テストA 中学校学習指導要領に示された内容を出題基準とし、高等学校で数学を学習するのに必要と思われる基礎的・基本的な事項により問題を構成した。

テストB 問題構成の立場はテストAと同様であるが、より高度な思考力、洞察力を要する問題を中心に構成した。

テストT 問題構成の立場はテストAと同様であるが、極めて基本的な事項により問題を構成した。

(2) 調査の対象

県内の高等学校及び特別支援学校の高等部に、今年度入学した生徒を対象に調査を実施した。実施校（課程別資料提供校）の数はテストAが27校、テストBが117校、テストTが9校であった。

(3) 調査の実施時期及び資料の回収

学校ごとに3月下旬から4月中旬の間に調査を実施し、集計用紙（各標本の解答をそのまま一覧表に転記したものと全員の度数分布）を4月20日までに回収した。

(4) 標本の抽出

テストAでは229名（抽出率6.2%）、テストBでは1,508名（抽出率5.2%）、テストTでは132名（抽出率22.3%）を抽出して、問題別の正答率・無答率を算出し、主な誤答について分析した（テスト全体の平均点及び標準偏差は全員を対象にして算出した）。

なお、後出のテストA、Bにおける「上位群」、「下位群」は、それぞれ得点が「平均点+標準偏差」付近、「平均点-標準偏差」付近の各1割で形成される標本群である。

3 調査結果の概要

(1) 人数・平均点・標準偏差（過去との比較）

表1

年度	テストA			テストB			テストT		
	平均	SD	人数	平均	SD	人数	平均	SD	人数
H20	47.7	26.6	3,296	51.5	23.0	28,252	49.0	26.4	694
H21	48.7	26.3	3,765	58.7	24.8	28,476	45.6	25.1	530
H22	51.6	23.6	3,675	62.5	25.2	28,725	50.2	26.4	593

(2) 頻数分布 (%)

表2

得点	90~100	80~89	70~79	60~69	50~59	40~49	30~39	20~29	10~19	0~9
テストA	5.1	8.2	12.4	13.5	14.9	13.7	11.9	9.8	7.6	3.0
テストB	17.5	14.3	13.5	12.8	11.2	9.8	8.3	6.1	4.4	2.2
テストT	9.8	6.7	10.8	10.6	11.6	11.6	12.8	11.6	9.1	5.2

(3) 学校(課程)別平均点分布(校)

表3

平均点	90 以上	85~ 90	80~ 85	75~ 80	70~ 75	65~ 70	60~ 65	55~ 60	50~ 55	45~ 50	40~ 45	35~ 40	30~ 35	25~ 30	20~ 25	20 未満	計
テストA					2	1	4	4	1	2	6	2	2	3			27
テストB	4	5	11	12	5	8	9	11	10	8	14	5	6	4	4	1	117
テストT			1			1		1	2	1	1		1	1			9

4 分析結果の概要

(1) 例年、関数分野で、式、表、グラフ等の相互関連や関数を用いて事象を考察する問題を出題している。しかし、結果は満足のいくものではない。テストTでは表から関数を求めさせたり、グラフから関数を求めさせる問題を出題したが、正答率が低く、式、表、グラフ等の関係が結びついていないことが分かる。テストA、Bでは、事象を数学的に考察し、関数を立式させる問題を出題したが、やはり正答率は低く、習った一次関数を事象の考察に生かせないことが分かる。

高等学校の新学習指導要領数学解説の「改善の基本方針」の中に「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する」という文がある。この文からも分かるとおり、式、表、グラフ等は、問題を解いたり、事象を考察する場合だけでなく、さらに、根拠を明らかにして相手に分かりやすく説明するときにも、適切に用いることができるよう指導しなければならない。早期に、式、表、グラフの相互関連を理解させて、それらを自由自在に操れるレベルまで反復学習させ、活用できるよう指導を徹底したい。

(2) テストAでは、立体を規則正しく積み上げていき、必要な立体の個数を求める問題を出題した。テストBでは、4人がプレゼント交換するとき、自分のプレゼントを受け取らない方法が何通りあるかという問題を出題した。どちらも正答率は低く、30%前後であった。この立体の問題は、裏側に隠れている立体も漏れなく数えなければならないので、1段目の図、2段目の図、…を書いて慎重に規則性を見つけ、計算する必要がある。プレゼント交換の問題は、自分のプレゼントをもらわないよう慎重に樹形図を書いて求める必要がある。複雑な問題を、自分が分かりやすいように図を書き直したり、樹形図を書いたりして理解しやすくすることは大切なことなので、間違えた生徒には再度取り組みませたい。

(3) テストBで円周角と中心角の関係に関する問題を出題した。正答率は54%で、やや低い結果であった。形が扇形であったために円周角に気付かなかった生徒がいたようであるが、この問題は、補助線の引き方を工夫すれば、円周角と中心角の関係を使わなくても解を求めることができる。このように、多様な解答ができる問題を扱ったときは、思考力の育成にもなるので、時間をしっかりとって、他の解法を考えるよう指導したい。また、グループ学習で、自分の考えを発表し合ったり、考え方について話し合いをすることにより、表現力も高めることができる。多様な考え方ができる課題は、思考力や表現力といった活用する力を育成することができるので、大いに取り入れていきたい。

5 調査問題の妥当性と信頼性(S-P表処理等による分析)

平成22年度高等学校入学者数学学力調査[A]、[B]について、S-P表処理等を基にして差異係数、信頼性係数、内容別平均正答率、正答率帯別問題数、注意係数、UL指数、問題間の相関等を考察したところ、次のような結果を得た。なお、データは、テスト[A]については参加27校から229名、テスト[B]については118校から1,508名を抽出して作成した。

[1] 問題全体について

(1) 差異係数

差異係数とは、S、P両曲線のずれの程度を数量化したもので、生徒理解と一連の学習内容がうまくかみ合っているかを見るものである。差異係数は0から1の値をとり、0.5より小さい値のとき生徒の理解と指導の密着性が高いとされている。簡単な確認テストのようなドリル演習型のテストではS曲線とP曲線の乖離かいりは小さく、差異係数は小さくなる。実力テストのような多面にわたる総合的な問題ではS曲線とP曲線は大きく乖離かいりして、差異係数は大きくなる。差異係数が0.5を超えたとき、指導内容に問題がなかったか、出題に問題がなかったか、学習者の理解やモチベーションはよかったかなどを検討する必要がある。今回のテストでは表4のように差異係数は小さいので、出題及び学習者の理解の間にとりわけ大きな問題はないと考えられる。

表4

		(1) 差異係数		
テスト	年度	H20	H21	H22
テスト	A	0.345	0.286	0.249
テスト	B	0.307	0.253	0.280

(2) 信頼性係数 (クーダー-リチャードソンの公式20による)

信頼性係数とは、作成されたテスト問題が内容的に妥当で信頼できるものなのかを算出するものである。ここで言う信頼性とは、同一条件下で再度試験を実施しても同じ結果が出ると思われる安定性のことで、0から1の値をとり、1に近いほど信頼性が高いとされている。今回のテストでは表5のように信頼性係数は高いので、信頼できる良好な問題であったことが分かる。

表5

		(2) 信頼性係数		
テスト	年度	H20	H21	H22
テスト	A	0.881	0.896	0.870
テスト	B	0.850	0.884	0.884

(3) 内容別平均正答率 ()内の数字は問題数

表6

テスト 内容	年度	テスト[A]			テスト[B]		
		H20	H21	H22	H20	H21	H22
数と式の計算		63.6%(3)	61.0%(3)	68.3%(3)	83.7%(3)	82.9%(3)	83.3%(3)
方程式		53.8%(3)	52.9%(3)	69.1%(3)	64.6%(3)	71.8%(3)	76.8%(3)
関数		42.8%(6)	47.5%(6)	49.4%(6)	44.6%(6)	44.8%(6)	57.8%(6)
図形		36.6%(6)	27.4%(6)	29.1%(6)	34.1%(6)	53.2%(6)	52.9%(6)
確率		54.7%(1)	45.9%(1)	53.7%(1)	60.2%(1)	59.3%(1)	34.0%(1)
個数の処理・数列		39.1%(1)	70.6%(1)	27.9%(1)	37.1%(1)	56.3%(1)	51.7%(1)

(4) 正答率帯別問題数

表7

テスト 正答率	年度	テスト[A]			テスト[B]		
		H20	H21	H22	H20	H21	H22
0.851以上		1	0	1	2	2	2
0.667~0.850		2	3	4	4	6	8
0.333~0.666		11	13	9	11	8	8
0.150~0.332		5	3	3	2	4	2
0.149以下		1	1	3	1	0	0

(5) 全体の正答率との相関別問題数

表8

テスト 相関	年度	テスト[A]			テスト[B]		
		H20	H21	H22	H20	H21	H22
0.70以上		2	1	0	0	0	1
0.60~0.69		7	11	6	4	8	7
0.50~0.59		5	2	8	6	6	7
0.40~0.49		4	5	2	7	4	3
0.30~0.39		0	1	4	2	2	1
0.29以下		0	0	0	1	0	1

[2] 検討を要する問題群

表 9

表 9 の 4 つの指標について、基準を満たさない問題に注意マーク“×”を付けた。注意マークが 1 つ以上付いた問題を、正答率が基準を満たす“Ⅰ群”と正答率が基準を満たさない“Ⅱ群”とに分類整理し、まとめたところ表 10 のようになった。

指標	①正答率	②注意係数	③UL指数	④相関
基準値	> 0.333	< 0.500	> 0.400	> 0.400

平均正答率が非常に高い場合や非常に低い場合に、下記の指標②から④は注意マーク“×”が付きやすくなる。従って、今回のテストで、問題となるのは $\boxed{A}1(1)$ 、 $\boxed{A}1(7)$ ということになる。この原因は、31 ページの正答率の結果から、下位群の生徒がよく正解したためと考えられる。

(×印は該当項目について検討を要する数値であることを示す)

表 10

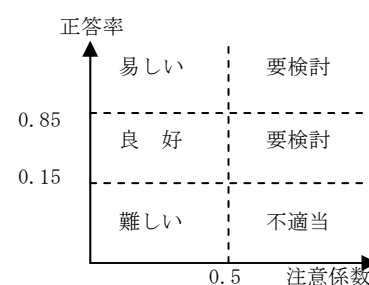
問 題	項 目 基準値	①正答率	②注意係数	③UL指数	④相 関	
		> 0.333	< 0.500	> 0.400	> 0.400	
Ⅰ	テスト \boxed{A}	1 (1)	0.716	0.500 ×	0.437	0.387 ×
		2 (1)	0.873	0.337	0.340 ×	0.387 ×
	テスト \boxed{B}	1 (1)	0.891	0.586 ×	0.196 ×	0.262 ×
		1 (3)	0.887	0.417	0.268 ×	0.374 ×
Ⅱ	テスト \boxed{A}	1 (7)	0.279 ×	0.585 ×	0.323 ×	0.321 ×
		2 (2)	0.275 ×	0.249	0.631	0.577
		4 (1)	0.201 ×	0.167	0.534	0.586
		4 (2)	0.118 ×	0.472	0.243 ×	0.310 ×
		5 (2)	0.140 ×	0.127	0.453	0.547
		5 (3)	0.144 ×	0.120	0.469	0.557
	テスト \boxed{B}	2 (2)	0.298 ×	0.165	0.717	0.607
		5 (3)	0.263 ×	0.130	0.707	0.606

(各項目の説明)

表 11

①正答率：各問題の正答率を示す。

②注意係数：S P 表において、ある問題の正誤の状況と他の問題の正誤の状況を比較し、異質の程度を数値化したものである。0.5 より小さい方が適切な問題であるとされている。表 11 に示すように平均正答率と併せて検討するとよい。



③UL指数：
$$\frac{(\text{上位 } 27\% \text{ の正答者数}) - (\text{下位 } 27\% \text{ の正答者数})}{(\text{生徒 } 27\% \text{ の人数})}$$

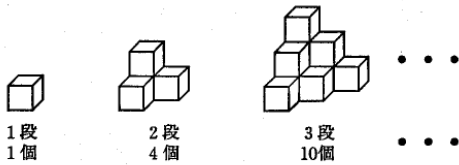
UL 指数は上式で算出する。「上位群に正答者が多く、下位群に正答者が少ない」場合に UL 指数は高くなるが、上位群に正答者が少なく下位群に正答者が多いという逆転現象の場合、UL 指数は低くなる。UL 指数が 0.4 より大きい方が適切な問題であるとされている。

④相 関：生徒の得点合計とその問題の正解との相関を示す。基準値を 0.4 とし大きい方が適切な問題であるとされている。

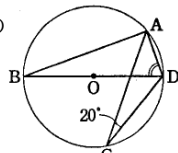
6 テストAの問題, 結果及びその考察

[1] 次の問いに答えなさい。

- (1) $(-3)^2 + 8 \times (-3^2)$ を計算しなさい。
- (2) $\sqrt{3} + \sqrt{75} - \sqrt{12}$ を計算しなさい。
- (3) $5x^2 - 20$ を因数分解しなさい。
- (4) 二次方程式 $x^2 + 3x + 2 = 0$ を解きなさい。
- (5) 42個のあめを, 大人に3個ずつ, 子どもに5個ずつ分けると, ちょうどなくなる。また, 大人に4個ずつ, 子どもに4個ずつ分けると, 2個余る。次の問いに答えなさい。
 (ア) 大人を x 人, 子どもを y 人として, x と y の連立方程式をつくりなさい。
 (イ) 大人と子どもの人数をそれぞれ求めなさい。
- (6) 大小2つのさいころを同時に投げるとき, 出る目の積が奇数になる確率を求めなさい。
- (7) 図のように, 大きさが同じ立方体を1段, 2段, 3段, …と積み上げていく。この規則にしたがって5段の立体を作るとき, 必要な立方体の個数を求めなさい。



- (8) y が x に反比例し, $x=2$ のとき $y=6$ である。 $x=4$ のときの y の値を求めなさい。
- (9) 関数 $y=x^2$ について, x の変域が $-1 \leq x \leq 3$ であるときの y の変域を求めなさい。
- (10) 図において, O は円の中心で, $\angle ACD = 20^\circ$ のとき, $\angle ADB$ の大きさを求めなさい。

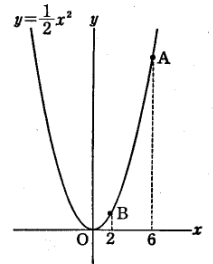


[2] 水の入っていない水そうに, 毎分 5ℓ の割合で12分間水を入れた。次の問いに答えなさい。

- (1) 水そうに入った水の量を求めなさい。
- (2) この水そうから毎分 6ℓ の割合で水を出す。水を出しはじめてから x 分後の水そうに

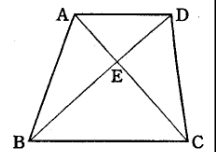
残っている水の量を $y \ell$ とする。 y を x の式で表しなさい。ただし, $0 \leq x \leq 10$ とする。

[3] 図において, 2点A, Bは関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり, 点Aの x 座標は6, 点Bの x 座標は2である。次の問いに答えなさい。



- (1) 点Aの座標を求めなさい。
- (2) 2点A, Bを通る直線の式を求めなさい。

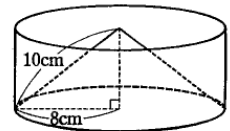
[4] 図のように, $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり, AC と BD の交点を E とする。



$AD = 6 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$, $BD = 12 \text{ cm}$ のとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) DE の長さを求めなさい。
- (2) $\triangle AED$ の面積が 9 cm^2 のとき, $\triangle BCE$ の面積を求めなさい。

[5] 底面の半径が 8 cm の円柱状の容器の中に, 底面の半径が 8 cm で, 母線の長さが 10 cm の円錐形



のおもりを図のように置く。容器とおもりの高さは等しいとして, 次の問いに答えなさい。ただし, 円周率は π とする。

- (1) 円錐形のおもりの高さを求めなさい。
- (2) 円錐形のおもりを入れた状態で, 水面の高さが 3 cm になるように水を入れたとき, 水面の面積を求めなさい。
- (3) 円錐形のおもりを入れた状態で, この容器いっぱい水を満たしたとき, 水の体積を求めなさい。

番号	配点	正 答	上位群 正答率 下位群	上位群 無答率 下位群	誤答率	主な誤答例 (標本全体に対する%)
[1] (1)	5	-63	72 78 61	0 0 0	28	63 (8.3) , 81 (7.9) , 153 (1.3)
(2)	5	$4\sqrt{3}$	83 100 70	5 0 9	12	$2\sqrt{3}$ (2.6) , $\sqrt{66}$ (1.7) , $-\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ (1.3) , $3\sqrt{3}$ (0.9)
(3)	5	$5(x+2)(x-2)$	50 83 13	13 0 44	37	$5(x^2-4)$ (12.2) , $(x+2)(x-2)$ (3.9)
(4)	5	$x=-1$, -2	79 96 61	10 0 26	11	$x=-1$, 3 (0.9) , $x=2$, 1 (0.9) $x=1$, 3 (0.9) , $x=-1$ (0.9)
(5)ア	5	$\begin{cases} 3x+5y=42 \\ 4x+4y=40 \end{cases}$	62 100 39	16 0 26	22	$\begin{cases} 3x+5y=0 \\ 4x+4y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y=42 \\ 4x+4y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y=42 \\ 4x+4y=42 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+5y=42 \\ 4x+4y=44 \end{cases}$ (4.8) (2.6) (1.7) (1.7)
イ	5	大人4人 子ども6人	67 91 48	21 0 30	12	大人7人 子ども6人(0.9) , 大人22人 子ども20人(0.9)
(6)	5	$\frac{1}{4}$	54 83 9	4 0 9	42	$1/2$ (10.9) , $1/6$ (4.8) , $2/9$ (3.5) , $1/3$ (2.6)
(7)	5	35	28 35 13	4 0 9	68	31 (18.8) , 28 (7.0) , 26 (3.1) , 25 (2.6)
(8)	5	3	47 91 13	12 0 26	41	12 (17.9) , $3/4$ (3.5) , 4 (2.6) , 8 (2.2)
(9)	5	$0 \leq y \leq 9$	35 78 0	23 4 52	45	$1 \leq y \leq 9$ (24.9) , $-1 \leq y \leq 9$ (3.5) , $0 \leq y \leq 3$ (3.1)
(10)	5	70°	55 74 30	7 0 9	38	60° (9.6) , 40° (8.3) , 80° (7.4) , 65° (2.6)
[2] (1)	5	60ℓ	87 100 70	7 0 26	6	70(1.7) , 100(0.9)
(2)	5	$y=-6x+60$	28 48 4	37 4 74	35	$6x$ (12.2) , $y=6x$ (3.1) , $6x+60$ (1.3)
[3] (1)	5	(6 , 18)	65 100 22	14 0 52	21	(6 , 12) (4.8) , (6 , 8) (3.5) , (6 , 3) (1.7)
(2)	5	$y=4x-6$	34 65 0	35 0 78	31	$y=4x-2$ (1.7) , $y=3x-4$ (1.3) , 16 (1.3)
[4] (1)	5	$\frac{9}{2} \text{ cm}$	20 26 4	15 9 26	65	4 (20.1) , 5 (14.0) , 3 (3.9) , 6(3.5)
(2)	5	25 cm^2	12 22 0	21 13 26	67	15 (30.6) , 18 (13.5) , 12 (3.1)
[5] (1)	5	6 cm	60 87 39	21 9 30	19	5(2.6) , 4(1.7) , 8(1.7)
(2)	5	$48\pi \text{ cm}^2$	14 22 0	46 26 83	40	16π (2.6) , 24 (2.6) , 12 (2.2)
(3)	5	$256\pi \text{ cm}^3$	14 22 0	42 9 70	44	256 (3.9) , 128π (2.6) , 64 (2.2)

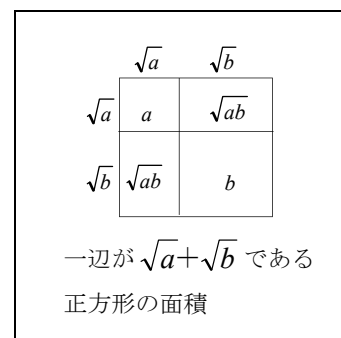
(1) 2乗公式の定着を図る。

年度	問題	正答率	主な誤答例
H20	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$ を計算しなさい。	33.9%	4 (13.0%), $4-4\sqrt{3}$ (6.8%)
H21	$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ を計算しなさい。	52.3%	5 (13.7%), $5+2\sqrt{3}$ (5.5%)
H22	$\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{12}$ を計算しなさい。	83.4%	$2\sqrt{3}$ (2.6%), $\sqrt{66}$ (1.7%)

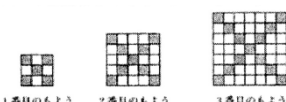
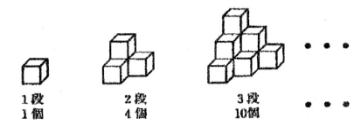
毎年[1](2)において平方根の計算を出題している。過去数年分の問題と正答率、主な誤答例は上記のとおりである。昨年度までは $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ の問題を出題し、正答率は60%を満たない状況だった。今年度は $\sqrt{\quad}$ の中を簡単にして加法・減法をする問題にしたところ、正答率が83.4%(上位群100%,下位群69.6%)まで上昇した。今回の結果により、多くの生徒が加法・減法までは理解できていることが分かった。 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ の計算を $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2 = a+b$ とする誤答が13%以上もあることから、 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ の公式が定着していないといえる。

【今後の指導に向けて】

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ の公式を理解していない生徒に対して $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ を展開し、 $2\sqrt{6}$ の項が出ることを確認したり、 $(3+2)^2=25 \neq 13=3^2+2^2$ のような簡単な数字を使って $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \neq (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2$ であることを丁寧に説明したい。また一辺が $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ である正方形の面積を利用して $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \neq (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2$ であることを示すことも効果的である。



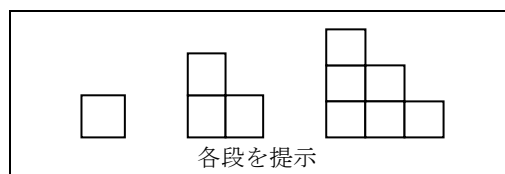
(2) 規則性を発見させたい。

年度	H21	H22
問題	1辺の長さが1cmの正方形の黒いタイルと白いタイルを、図のようにすきまなく並べる。「10番目のもよう」を作るために必要な黒いタイルの枚数を求めなさい。 	図のように、大きさが同じ立方体を1段、2段、3段、…と積み上げていく。この規則にしたがって5段の立体を作るとき、必要な立方体の個数を求めなさい。 
正答率	70.6%	27.9%

H21, H22の[2](7)は規則性を見付け出し、個数を求める問題である。H21は平面、H22は立体の問題を出題した。H21においては黒いタイルが4枚ずつ増えていくという規則性を見付けやすく、正答率も70.6%と高い結果だったが、H22は立体ということもあり規則性を見付けにくく、正答率は27.9%まで下がった。誤答は31個がもっとも多く、18.8%であった。これは1個、4個、10個という数から階差を考え、3個ずつ増えていくだろうという予想を立てた結果と考えられる。実際は下段に注目をし、階差のさらに階差を考えて規則性を見つけることになる。立体をうまくイメージできないため4段目を数えることができず、間違いに気付くことができなかったと思われる。

【今後の指導に向けて】

今回は立体図形のために規則性を見付け出すことが難しかったと思われる。この問題において、生徒に規則性を発見させるには立方体がどのように増加するかイメージさせることが大切である。生徒のイメージを助けるために各段が分離する立方体の模型を作り、実際に各段を見せることができれば生徒は規則性を発見しやすくなる。立体に限らず複雑な規則性の問題に対して、イメージしやすい例を提示し、徐々に複雑にする等、段階的に指導し、生徒が規則性を発見できるように手助けをしたい。



7 テストBの問題, 結果及びその考察

[1] 次の問いに答えなさい。

- (1) $(-3)^2 + 8 \times (-3^2)$ を計算しなさい。
- (2) $\frac{6}{\sqrt{3}} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ を計算しなさい。
- (3) $2x^3 - 4x^2 - 6x$ を因数分解しなさい。
- (4) 二次方程式 $(x-2)^2 - 5 = 0$ を解きなさい。
- (5) ある学校の昨年の全生徒数は900人だった。今年
の人数は、昨年より男子が10%減少し、女子が20%
増加したので、合わせて30人増加した。次の問
いに答えなさい。
(ア) 昨年の男子の人数を x 人、女子の人数を y 人
として連立方程式をつくりなさい。
(イ) 今年の子は昨年より何人増加したか、求めな
さい。
- (6) A, B, C, D の4人がそれぞれ1つずつプレ
ゼントを持って集まり、プレゼントの交換会を開く
ことになった。4人のプレゼントをいったん集めて、
あらためて4人に1つずつ配ることにする。この
とき、自分が持ってきたプレゼントを自分で受け取
る人が1人もいないような配り方は何通りあるか、
求めなさい。
- (7) 次のように、ある決まりにしたがって、数が並ん
でいる。

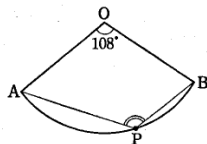
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

25番目までの数をすべてたすといくつになるか、
求めなさい。

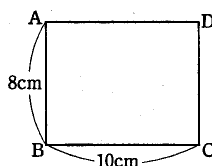
- (8) 関数 $y=3x^2$ と $y=ax-3$ は、 x の値が -1 から
3まで増加するときの変化の割合が等しい。 a の
値を求めなさい。
- (9) 関数 $y = \frac{12}{x}$ について、 x の変域が $a \leq x \leq 6$

のとき、 y の変域は $b \leq y \leq 12$ である。 a, b の
値を求めなさい。

- (10) 中心角 108° のおうぎ形の
弧 AB 上に点 P をとるとき、
 $\angle APB$ の大きさを求めなさい。



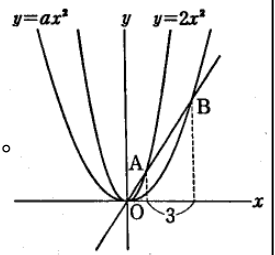
[2] 点 P は、図のような長方形
 $ABCD$ の周上を、 A を出発して、
 B, C を通り、 D まで、毎秒 2cm の
速さで移動する。出発して x 秒後の
 $\triangle PAD$ の面積を $y \text{cm}^2$ とする。次の
問いに答えなさい。



- (1) $x=10$ のとき、 y の値を求めなさい。
- (2) $9 \leq x \leq 13$ のとき、 y を x の式で表しなさい。

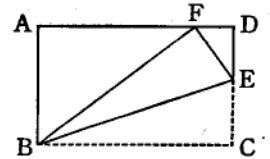
[3] 図のように、原点 O を通り、
傾きが4の直線と、2つの放物線

$y=2x^2, y=ax^2$ との原点以外
の交点を、それぞれ A, B とする。
次の問いに答えなさい。ただし、 a
は正の数とする。



- (1) 点 A の x 座標を求めなさい。
- (2) 2点 A, B の x 座標の差が3であるとき、 a の
値を求めなさい。

[4] 図のように、 $AB=6\text{cm},$
 $AD=10\text{cm}$ の長方形の紙
 $ABCD$ を BE を折り目とし
て、頂点 C が辺 AD 上にくる
ように折り、頂点 C が移った
点を F とする。次の問いに答えなさい。



- (1) $\triangle BAF \sim \triangle FDE$ であることを証明したい。文
中の(Ⅰ), (Ⅱ)にあてはまる適語を語群から選び、
そのかな符号を書きなさい。

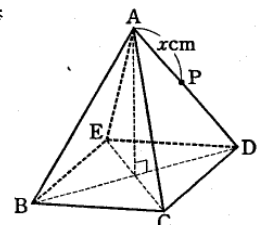
$\triangle BAF$ と $\triangle FDE$ において、
 $\angle BAF = \angle FDE = 90^\circ$ ①
次に、三角形の1つの外角は、そのとなりにない
2つの内角の和に等しいから、
(Ⅰ) = $\angle FBA + \angle BAF$ ②
また、 $\angle BFD = \angle BFE + \angle EFD$ ③
ここで、 $\angle BAF = \angle BFE = 90^\circ$ ④
②, ③, ④から、
 $\angle FBA =$ (Ⅱ)⑤
①, ⑤より2組の角がそれぞれ等しいので、
 $\triangle BAF \sim \triangle FDE$

語群

ア $\angle DEF$ イ $\angle EFD$ ウ $\angle EFA$ エ $\angle BFD$

- (2) EF の長さを求めなさい。

[2] 図は、底面が1辺 6cm の
正方形で、 $AB=9\text{cm}$ の正四角錐で
ある。点 P は、辺 AD 上の点で、
 $AP=x\text{cm}$ とする。次の問いに答
えなさい。



- (1) この正四角錐の高さを求めな
さい。
- (2) 点 P を通り、底面と平行な平面でこの立体を切っ
たとき、切り口の面積が 25cm^2 であった。 x の値
を求めなさい。
- (3) $x=3$ のとき、(2)と同様に底面と平行な平面で
この立体を切った。このときできる2つの立体の
うち、大きい方の立体の体積を求めなさい。

番号	配点	正 答	上位群 正答率 下位群	上位群 無答率 下位群	誤 答 率	主な誤答例 (標本全体に対する%)
[1] (1)	5	-63	89 97 83	0 0 0	11	81 (2.4), 63 (2.3), -153 (0.8)
(2)	5	$8 - 2\sqrt{3}$	72 90 58	1 0 0	27	$4 - 2\sqrt{3}$ (4.0), $4 + 2\sqrt{3}$ (2.3), $8 - 4\sqrt{3}$ (1.7), $8 + 6\sqrt{3}$ (1.2)
(3)	5	$2x(x-3)(x+1)$	89 96 82	1 0 1	10	$2x(x^2-2x-3)$ (1.6), $(x-3)(x+1)$ (1.3) $x(x-3)(x+1)$ (0.8), $2x(x+3)(x-1)$ (0.6)
(4)	5	$x = 2 \pm \sqrt{5}$	73 97 56	8 1 14	19	$x = 2 + \sqrt{5}$ (2.1), $x = -3, 7$ (0.9) $x = 3, 1$ (0.7), $x = -2 \pm \sqrt{5}$ (0.7)
(5)ア	5	$\begin{cases} x+y=900 \\ \frac{90}{100}x + \frac{120}{100}y = 930 \end{cases}$	84 97 66	3 0 7	13	$x + y = 900$ と $-0.1x + 0.2y = 930$ (1.0), $-0.1x + 0.2y = 30$ (0.8), $0.9x + 1.2y = 30$ (0.8)
イ	5	80人	73 97 42	6 0 15	21	480人(2.3), 40人(2.1), 20人(2.0), 100人(1.9)
(6)	5	9	34 52 10	2 0 3	64	12 (28.6), 6 (9.0), 3 (3.6), 24 (2.9)
(7)	5	$\frac{46}{7}$	52 73 22	7 1 14	41	25 (11.2), $\frac{151}{7}$ (4.2), 325 (1.5), $\frac{45}{7}$ (1.5)
(8)	5	$a = 6$	63 89 34	5 0 13	32	$\frac{3}{2}$ (3.5), 3 (3.4), 12 (2.7), 10 (2.7)
(9)	5	$a = 1, b = 2$	76 99 42	8 0 21	16	$a = 2, b = 1$ (4.3), $a = 2, b = 4$ (1.2), $a = 2, b = 6$ (1.2)
(10)	5	126°	54 85 21	5 1 10	41	108° (18.0), 144° (5.2), 72° (3.9), 54° (1.7)
[2] (1)	5	30	68 90 44	3 0 5	29	40 (9.9), 20 (4.6), 50 (2.1)
(2)	5	$y = -10x + 130$	30 62 1	22 3 47	48	$-10x + 40$ (7.5), 40 (2.5), $2x$ (2.5)
[3] (1)	5	2	56 83 18	8 0 18	36	1 (18.4), (2, 8) (7.2), (1, 2) (4.3)
(2)	5	$a = \frac{4}{5}$	54 91 8	14 0 30	32	$\frac{1}{2}$ (5.5), 1 (4.6), 4 (3.1)
[4] (1)	5	エ $\angle BFD$ イ $\angle EFD$	78 95 52	0 0 0	22	(ウ, イ) (6.7), (エ, ア) (5.2), (ウ, ア) (2.1)
(2)	5	$\frac{10}{3} \text{ cm}$	43 74 5	15 5 33	42	3 (9.9), 4 (6.5), 2 (3.1)
[5] (1)	5	$3\sqrt{7} \text{ cm}$	70 96 44	4 0 8	26	$6\sqrt{2}$ (3.5), $3\sqrt{5}$ (3.3), 7 (1.9)
(2)	5	$x = \frac{15}{2}$	47 82 9	20 4 44	33	4 (5.6), 5 (4.4), 3 (3.1)
(3)	5	$\frac{104\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3$	26 54 20	33 7 66	41	$24\sqrt{7}$ (2.2), $32\sqrt{7}$ (2.1), $36\sqrt{7} - \frac{4\sqrt{5}}{3}$ (1.1)

(1) 樹形図の指導を徹底する。

A, B, C, Dの4人がそれぞれ1つずつプレゼントを持って集まり、プレゼント交換会を開くことになった。4人のプレゼントをいったん集めて、あらためて4人に1つずつ配ることにする。このとき、自分が持ってきたプレゼントを自分で受け取る人が1人もいないような配り方は何通りあるか、求めなさい。
(正答率 34.0% 無答率 1.5%)

全体から、「4人とも自分の持ってきたプレゼントになる場合」「2人が自分の持ってきたプレゼントになる場合」「1人が自分の持ってきたプレゼントになる場合」を引くと求められるが、なかなか気付かず、樹形図で求めた生徒が多いようである。一見、基本的な問題のようであるが、「自分が持ってきたプレゼントを自分で受け取る人が1人もいない」という条件があるために、正答したのは34.0%しかいなかった。また全体の約3割の生徒が12通りという誤答を導いた。自分のプレゼント以外の3種類×4人、という誤答と思われる。

【今後の指導に向けて】

数え上げの問題にはじめて触れるのは、中学の時である。そこで樹形図の考え方を習う。高校では乗法公式や、順列の公式、組合せの公式などを新たに学習するが、樹形図を用いて「漏れなく」「重複なく」数え上げることは数え上げの問題の基本である。この問題は、自分のプレゼントをもらわないように配ることがポイントであり、そのことがこの問題を複雑にしている。丁寧に数え上げられるように指導していきたい。

また、単に樹形図を書くだけでなく、漏れなく、重複なく数え上げることを工夫させることで、興味関心が向上し、自ら問題を考え解決していこうという姿勢が生まれるのではないだろうか。

例えば図1は標準的な解法であるが、図2の方法ならば、Aに配ったプレゼントがbだった時、順番はB→C→Dの順で受け取るとして、ここまでは図1と同じ樹形図であるが、Aがcのプレゼントを受け取った場合には受け取る順序を変更しC→D→Bとし、dを受け取った場合には受け取る順序を変更しD→B→Cと変更すれば、どのパターンも形は同じで、記号の入れ替えだけでよくなる。このように、工夫することできれいに3×3が現れるのである。

図1

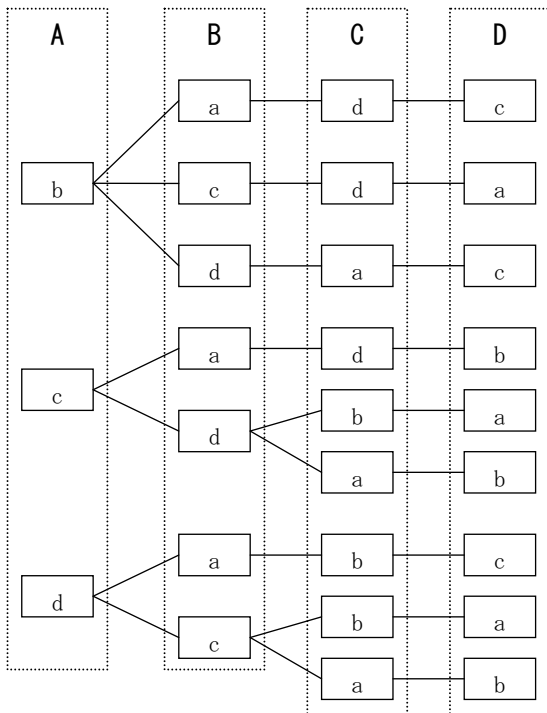
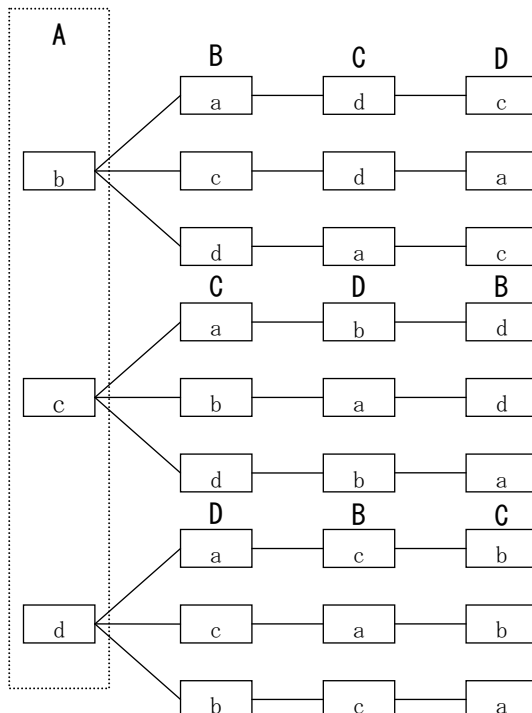


図2



(2) 変化の割合を正しく理解していない。

年 度	H16	H22
問 題 [1]	関数 $y=ax^2$ と $y=2x-3$ について、 x の値が-1 から 4 まで増加するときの変化の割合が等しいとき、 a の値を求めなさい。	関数 $y=3x^2$ と $y=ax-3$ について、 x の値が-1 から 3 まで増加するときの変化の割合が等しい。 a の値を求めなさい。
正答率	56% (上位群 91%/下位群 18%)	63.3% (上位群 89.4%/下位群 34.4%)
無答率	7% (上位群 0%/下位群 17%)	5.1% (上位群 0%/下位群 13.2%)
主な誤答	2 (8.2%), 6 (3.6%), 3 (3.0%)	$\frac{3}{2}$ (3.5%), 3 (3.4%), 12 (2.7%)

[1] (8)は変化の割合の問題である。全体の正答率はH16, H22ともに60%前後で、上位群の正答率は約90%であった。しかし、下位群の正答率を比較すると、H16は18%であるのに対し、H22は34%と差が出た。これは、数値を代入する2次関数の x^2 の係数が文字であるか、数であるかの違いにあると考えられる。また、主な誤答をみると、1次関数の変化の割合が x の係数となるのと同様に、2次関数の変化の割合も x^2 の係数であると考えている生徒が少数いることが分かる。

【今後の指導に向けて】

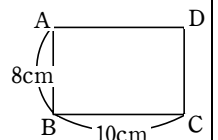
問題が複合的であったり、 x^2 の係数に文字が入ると正確に処理することができないと考えられる。

「変化の割合 = $\frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}}$ 」であること、「1次関数の変化の割合は直線の傾き」であることをしっ

かりと復習したい。特に、2次関数の変化の割合は「2つの端点を結ぶ直線の傾き」を表し、その値は一定でなく、1次関数の変化の割合とは異なるということをしっかりと理解させたい。

(3) 事象を数学的に処理し関数を立式できない生徒が多い。

年 度	H21	H22
問 題 [2]	点Pは、1辺が6cmの正方形ABCDの周上を、Aを出発し、B、Cを通り、Dまで、毎秒2cmの速さで移動する。出発して x 秒後の $\triangle PAD$ の面積を $y \text{ cm}^2$ とする。次の問いに答えなさい。 (1) $0 \leq x \leq 3$ のとき、 y を x の式で表しなさい。 (2) $6 \leq x \leq 9$ のとき、 y を x の式で表しなさい。	点Pは、図のような長方形ABCDの周上を、Aを出発し、B、Cを通り、Dまで、毎秒2cmの速さで移動する。出発して x 秒後の $\triangle PAD$ の面積を $y \text{ cm}^2$ とする。次の問いに答えなさい。 (1) $x = 10$ のとき、 y の値を求めなさい。 (2) $9 \leq x \leq 13$ のとき、 y を x の式で表しなさい。
(2)正答率	29.3% (上位群 65%/下位群 1%)	29.8% (上位群 61.6%/下位群 0.7%)
(2)無答率	20.3% (上位群 1%/下位群 40%)	21.5% (上位群 3.3%/下位群 47.0%)
(2)主な誤答	18 (8.6%), $18-6x$ (6.5%), $-6x$ (3.9%)	$40-10x$ (7.5%), 40 (2.5%), $2x$ (2.5%)



H22の[2](1)は、 $9 \leq x \leq 13$ を満たす具体的な数値を与え、(2)のヒントになっている。(1)の正答率は68.4%(上位群90.1%/下位群43.7%)、無答率7.7%(上位群0%/下位群29.8%)と多くの生徒が問題を解くことができた。しかし(2)においては、誘導問題のなかったH21と今回とで正答率の違いは現れず、29.8%と低かった。主な誤答に、高さをCDの長さ8cmから $2x$ を引いて $8-2x$ として面積を求めた $40-10x$ がある。点Pが辺CD上にあることは理解しているが、適切に処理できない生徒がいることが分かる。

【今後の指導に向けて】

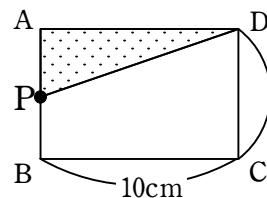
事象を数学的に処理をして関数を立式できるよう、指導を工夫したい。まずは、全体の状況を把握し、イメージをもたせることが重要である。様々なパターンを、段階を経て提示することで、全体の数量関係をイメージさせたい。

点Pは、図のような長方形ABCDの周上を、Aを出発し、B、Cを通り、Dまで、毎秒2cmの速さで移動する。辺ADを底辺とし、出発してx秒後の△PADの面積を求めよ。

【パターン1】 AB上に点Pがあるとき

$$\text{高さ} = AP = 2x$$

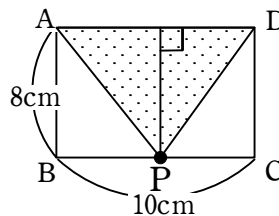
$$\text{よって、面積} = \frac{1}{2} \times 10 \times 2x = 10x$$



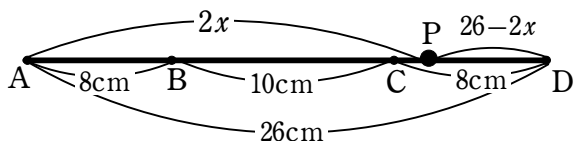
【パターン2】 BC上に点Pがあるとき

$$\text{高さ} = AB = 8$$

$$\text{よって、面積} = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40$$

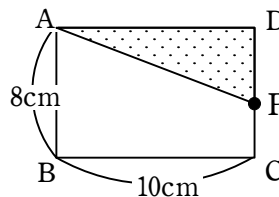


【パターン3】 CD上に点Pがあるとき

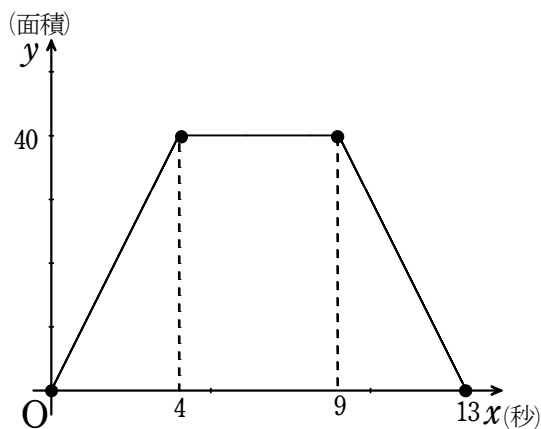


$$\text{高さ} = PD = 26 - 2x$$

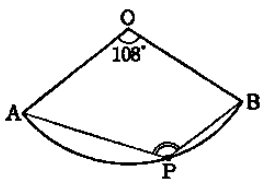
$$\text{よって、面積} = \frac{1}{2} \times 10 \times (26 - 2x) = 130 - 10x$$



さらにグラフを用いることで、面積の変化の様子を視覚的にとらえることができる。グラフをかくことは全体のイメージをつけさせるためにも、効果があると考えられる。



(4) 円の性質の分野ではいろいろなタイプの問題に取り組みせたい。

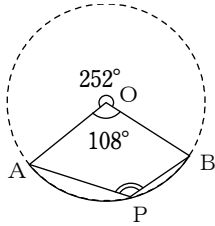
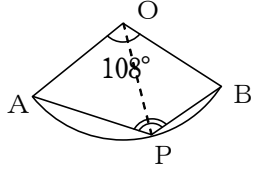
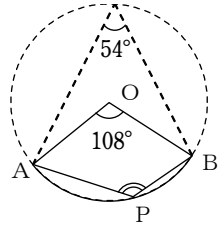
設問番号	問題の概要	正答率% (上位群%/下位群%)
[1] (10)	$\angle APB$ の大きさを求めよ。 	53.8 (85.4/20.5)
		誤答例 (誤答率%)
		108° (18.0), 144° (5.2), 72° (3.9)

[1] (10) では、円周角と中心角の関係を出题した。しかし、正答率は 53.8% しか無く、上位群で 85.4%、下位群で 20.5% であった。最頻誤答は扇形の中心角と同じ大きさの 108° で、18.0% もあった。

正答にたどり着けなかった要因として、円周角と中心角の関係が理解できていないことが挙げられる。ただ、円周角の問題は扇形ではなく円での出題が多く、扇形での出題に慣れていない可能性がある。また、 $\angle APB$ は弦 AB の優弧に対する円周角であるため、 $\angle APB$ に対する中心角の大きさが 180° より大きくなり、生徒には考えにくい問題であった可能性もある。

【今後の指導に向けて】

この問題の解法として次の 3 つを挙げる。(ただし、現行課程では円に内接する四角形の対角の和が 180° であることは、高校の数学 A で学習する内容なので、この段階では、解法 3 で解くことはできない。)

解法 1	解法 2	解法 3
 <p>円 O を考える。 円周角 $\angle APB$ に対する中心角の大きさは $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$ したがって $\angle APB$ の大きさは $252^\circ \div 2 = 126^\circ$</p>	 <p>線分 OP を引く。 $\angle OAP = x$, $\angle OBP = y$ とすると、 $\angle APB = \angle OPA + \angle OPB = x + y$ 四角形 $OAPB$ について $108^\circ + x + (x + y) + y = 360^\circ$ より $x + y = 126^\circ$</p>	 <p>中心角 $\angle AOB = 108^\circ$ に対する円周角の大きさは 54° である。 円に内接する四角形の対角の和は 180° より $180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$</p>

解法 1、解法 2 で解くためには補助線が必要になる。扇形のまま考えるのではなく、円にして考えたり、2 つの二等辺三角形で考えたりすることで、既習内容が使えるようになり解くことができる。このように、多様に考えることができる問題では、時間を多くとり、一つの解法以外に他の解法も考えさせると思考力が高まる。また、グループ学習を取り入れ、お互いの解法を発表し合うことで、表現力の育成にもなる。

8 テストTの問題, 結果及びその考察

[1] 次の問いに答えなさい。

(1) 次の計算をしなさい。

- ① 7×9
- ② $-23 + 7$
- ③ $20 - 12 \div 4$

④ $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{4} \div \frac{4}{5} \times \frac{8}{9}$

⑥ $13 - (-3)^2$

⑦ $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

⑧ $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

(2) 次の式を簡単にしなさい。

① $(5x - 3) - (2x + 5)$

② $9a^2b \div (-3ab)$

(3) $(x + 4)(x - 4)$ を展開しなさい。

(4) $x^2 - 9$ を因数分解しなさい。

(5) 次の方程式を解きなさい。

① $\frac{x}{5} = 3$

② $7x + 5 = 3x - 7$

③ $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

④ $(x - 1)(x - 3) = 0$

⑤ $x^2 = 3$

[2] 次の問いに答えなさい。

(1) 1000円の商品を30%引きで買うときの値段は何円か求めなさい。

(2) 12kmの道のりを時速3kmで歩くと何時間かかるか求めなさい。

(3) 200円のかごに, 1個90円のりんごを x 個つめると, 代金の合計は y 円になる。 x, y の関係を等式に表しなさい。

[3] 次の問いに答えなさい。

(1) 1つのさいころを投げるとき, 5以上の目が出る確率を求めなさい。

(2) 10本のくじの中に当たりが3本ある。このくじを1本引くとき, 当たりが出る確率を求めなさい。

[4] 次の問いに答えなさい。

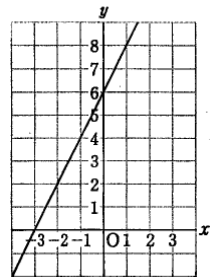
(1) y は x に比例し, x と y の値が下の表のように対応する。 にあてはまる値を求めなさい。

$y = \text{□}x$	x	2	6	8
	y	10	30	40

(2) グラフが右の図のような直線になる一次関数がある。

次の問いに答えなさい。

- ① この直線の切片を求めなさい。
- ② この直線の傾きを求めなさい。



[5] 関数 $y = x^2$ について, x

の変域が $-1 \leq x \leq 3$ のとき,

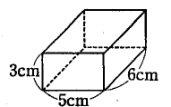
y の変域は $\text{ア} \leq y \leq \text{イ}$ で

ある。 ア と イ にあてはまる値

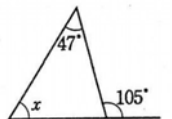
を求めなさい。

[6] 次の問いに答えなさい。

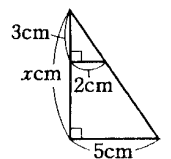
(1) 右の図の直方体の体積を求めなさい。



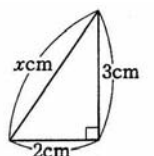
(2) 右の図で $\angle x$ の大きさを求めなさい。



(3) 右の図で x の値を求めなさい。



(4) 右の図で x の値を求めなさい。



番号	配点	正答	正答率	無答率	誤答率	主な誤答例 (標本全体に対する%)
1①	3	63	95	0	5	36 (3.8)
②	3	-16	86	1	13	16 (9.0), -30 (1.5)
③	3	17	84	2	14	2 (8.3), 23 (2.3), 18 (2.3)
④	3	$\frac{11}{12}$	64	4	32	$\frac{3}{7}$ (6.8), 1 (3.0), $\frac{3}{12}$ (3.0)
⑤	3	$\frac{5}{6}$	45	18	37	8/15 (4.5), 15/18(4.5)
⑥	3	4	75	4	21	22 (6.8), 7 (3.0)
⑦	3	$2 - \sqrt{6}$	36	28	36	$-\sqrt{2}$ (9.0), $\sqrt{2}$ (3.0)
⑧	3	$5\sqrt{2}$	61	20	19	$5\sqrt{4}$ (7.6), $6\sqrt{2}$ (3.8)
(2)①	3	$3x-8$	40	11	49	$3x+2$ (12.9)
②	3	$-3a$	58	15	27	$3a$ (9.0)
(3)	3	x^2-16	53	24	23	$x^2-4x+4x-16$ (1.5), $x^2-4x-16$ (1.5), x^2+x-16 (1.5), $(x+4)^2$ (1.5)
(4)	3	$(x+3)(x-3)$	46	30	24	3, $x=3$ (3.8), $x-3$ (2.3), $(x-3)^2$ (2.3), $(x+9)(x-9)$ (2.3)
(5)①	3	$x=15$	46	28	26	3/5 (6.0), -2 (5.3), 8 (3.8)
②	3	$x=-3$	52	24	24	3 (9.0)
③	3	$x=2, y=-1$	36	31	33	$x=4, y=-3$ (3.8)
④	3	$x=1, 3$	30	39	31	$x=-4$ (4.5), $x=2$ (3.8), $x=4$ (3.0)
⑤	3	$x=\pm\sqrt{3}$	16	36	48	$x=\sqrt{3}$ (14.4), $x=9$ (10.6)
[2](1)	3	700円	65	15	20	970 (3.8), 300 (3.0)
(2)	3	4時間	85	8	7	36 (2.3), 3 (2.3)
(3)	3	$y=90x+200$	43	34	23	$y=x+200$ (2.3), $y=200-90x$ (2.3), $900x+y=200$ (1.5)
[3](1)	3	$\frac{1}{3}$	56	12	32	$\frac{1}{6}$ (12.1)
(2)	3	$\frac{3}{10}$	71	11	18	30% (1.5), $\frac{1}{3}$ (1.5), $\frac{7}{10}$ (1.5), $\frac{4}{10}$ (1.5)
[4](1)	4	5	58	14	28	2 (6.8), a (3.0), 3 (2.3)
(2)①	4	6	37	33	30	-3 (9.0), 2 (3.8)
②	4	2	17	31	52	-3 (12.9), 6 (12.1)
[5]	4	ア 0 イ 9	16 25	30 31	54 44	ア 1 イ 9 (15.1), ア -1 イ 9 (6.8)
[6](1)	4	90 cm ²	58	12	30	30 (4.5), 15 (3.0)
(2)	4	$\angle x = 58$ 度	66	11	23	28° (3.0), 60° (2.3)
(3)	4	$x = \frac{15}{2}$ cm	24	20	56	8 (17.4), 7 (9.0), 6 (7.6)
(4)	4	$x = \sqrt{13}$ cm	21	17	62	4 (23.5), 5 (9.8)

(1) 因数分解の公式の定着を図りたい。

年度	問題	正答率	主な誤答例
H21	[1] (3) $(x-y)^2$ を展開しなさい。	18.2 %	$(x+y)(x-y)$
	(4) x^2-9 を因数分解しなさい。	28.3 %	$x=3$
H22	[1] (3) $(x+4)(x-4)$ を展開しなさい。	53.0 %	$x^2-4x+4x+16$
	(4) x^2-9 を因数分解しなさい。	46.2 %	$x=3$

x^2-9 の因数分解を2年連続で出題した。昨年度の正答率は 28.3%であったため、今年度は直前の問題に和と差の積の公式を利用して展開する問題を配置した。すると、正答率は 46.2%に上昇した。この結果から、展開式が示されればそれを利用して因数分解ができる生徒が約 18%いることがわかった。

【今後の指導に向けて】

式の展開は公式を知らなくても一つ一つ順にかけてから同類項をまとめることで正答に達することができる。しかし、公式を利用する因数分解は、与えられた整式から展開する前の形に気が付かないと正答が得られないため、因数分解の公式に気付くことが大切である。そこで、次のようなスパイラル的な指導を行い公式の定着を図りたい。

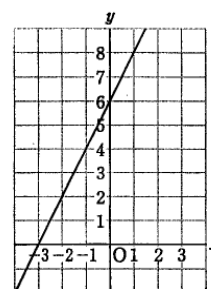
- Step1. 式の展開を指導するとき、先行して逆方向の変形が因数分解であることを予告する。
- Step2. 展開公式を定着させる。
- Step3. 因数分解の導入時に展開公式を確認する。
- Step4. 反復練習を行い因数分解の公式を定着させる。

(2) 直線の傾きが求められない。

問題[4] (2) グラフが右の図のような直線になる一次関数がある。

次の問いに答えなさい。

- ① この直線の切片を求めなさい。
- ② この直線の傾きを求めなさい。



	正答率(上位群, 下位群)	無答率(上位群, 下位群)	主な誤答例
①	37.1% (61.5%, 7.7%)	32.6% (7.7%, 69.2%)	-3, 2
②	16.7% (23.1%, 0.0%)	31.1% (0.0%, 69.2%)	-3, 6

H19~21 では「 y を x の式で表しなさい」と出題したところ、正答率は約 20%であった。そこで、本年度は生徒のつまづきを見るため、傾きと切片を分けて出題した。その結果、切片よりも傾きを求められない生徒が多いことが明らかになった。切片はグラフからすぐに読み取ることができるが、傾きは定義式から計算する必要があるためと思われる。誤答例にあるように、傾きもグラフから直接読み取れる値(-3 や 6)であろうと勘違いしている生徒は、合わせて 25%であった。

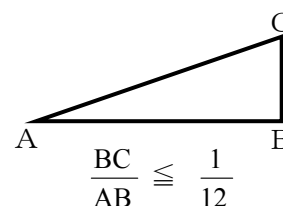
【今後の指導に向けて】

教科書に登場する定義について、まずは用語を正確に覚えさせ、次に定義式を使えるようになるまで繰り返し練習させたい。このとき時間をかけて粘り強く指導していきたい。特に、テストT受検者に対しては、中学校で学習する内容にまで戻って、生徒に興味・関心をもたせる必要がある。以下に中学校の教科書で扱われている身のまわりの傾きについて紹介する。

「スロープの傾き」

次の文章は、スロープを設置するときの傾きに関する設置基準の一部です。

- ◎ 勾配は $1/12$ (8.3%) 以下とし、屋外では $1/15$ (6.7%) 以下とする。
(高低差 10cm 未満の場合に限り $1/8$ (12.5%) 以下としてさしつかえない。)
- 屋外の勾配は $1/20$ 以下とすることが望ましい。



啓林館『未来へひろがる数学2』より

付 平成 21 年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

1 検査の趣旨

当センターでは昭和 51 年から毎年、高等学校数学標準学力検査を実施してきた。今回も次の 2 つのねらいの下に学力検査を実施し、検査結果を分析・考察して、指導上の留意点を明らかにした。なお、過去の検査結果については、当該年度の当センター研究紀要別冊に掲載している。

- (1) 入学者数学学力調査により把握した新入生の学力実態が、その後の高等学校での学習指導を通してどのように変容しているかを調べる。
- (2) 基本事項についての理解と定着の程度を調査し、高等学校での指導に役立てる。

2 検査の実施及び処理

(1) 検査問題の種類と問題の構成

検査問題は、数学 I 基本、数学 I + A、数学 II の 3 種類である。どの検査問題も学習指導要領に示された内容を出題の基準とした。検査時間はいずれも 50 分である。

数学 I 基本： 基本的な計算力、基礎事項の定着度を調べる問題を中心に構成した。

数学 I + A： 数学 I 基本より高度の思考力・洞察力を要する数学 I の問題に加え、数学 A の内容も併せて構成した。

数学 II： 問題 [1] は基本問題、問題 [2], [3], [4] は標準問題である。

(2) 調査の対象と方法

各科目の授業が終了した学年を対象に、学校ごとに 2 月 1 日から 3 月 31 日の間に適宜実施した。集計のための標本は各学校とも課程別、類型別に各々 2 学級分とし、集計用紙（2 学級分の得点度数分布と、その 10% の抽出者の解答をそのまま転記したもの）を 4 月 20 日までに回収した。

3 検査結果の概要

(1) 標本数・平均点・標準偏差 表 14

テスト 項目	数学 I 基本	数学 I + A	数学 II
標本数	1,384	7,108	7,927
平均点	39.0	44.7	48.7
標準偏差	23.6	26.3	29.2

(2) 得点分布 (%) 表 15

テスト 得点	数学 I 基本	数学 I + A	数学 II
90 ~ 100	2.6	4.7	9.6
80 ~ 89	4.1	6.9	10.8
70 ~ 79	5.8	9.4	10.0
60 ~ 69	8.0	10.8	9.2
50 ~ 59	12.2	11.3	9.3
40 ~ 49	11.0	12.7	9.1
30 ~ 39	15.9	10.9	9.6
20 ~ 29	15.3	11.5	10.5
10 ~ 19	16.8	11.7	11.4
0 ~ 9	8.2	10.1	10.6

(3) 学校別(課程別)平均点分布(校)表 16

テスト 平均点	数学 I 基本	数学 I + A	数学 II
80以上		1	9
75~80未満		4	13
70 ~ 75		3	6
65 ~ 70		5	6
60 ~ 65	3	11	6
55 ~ 60	1	6	8
50 ~ 55	3	7	11
45 ~ 50	2	6	8
40 ~ 45	3	9	9
35 ~ 40	4	7	13
30 ~ 35	2	9	12
25 ~ 30	3	10	3
20 ~ 25	4	3	8
15 ~ 20	1	9	7
15未満	1	6	10
計	27	96	129

4 数学 I (基本) の問題, 結果及びその考察

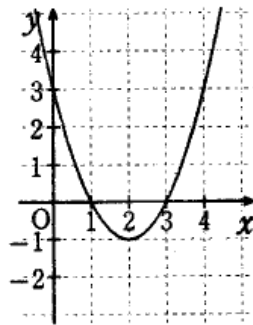
次の の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

[1] 次の各問に答えよ。

- (1) $(a^2 \times a)^4 = \text{}$ である。
- (2) $(x-y)^3$ を展開すると である。
- (3) $x^2 - 5x - 3$ 因数分解すると である。
- (4) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = \text{}$ である。
- (5) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ の分母を有理化すると である。
- (6) 1次不等式 $5x + 1 \leq 3x + 7$ を満たす x の値の範囲は である。
- (7) 2次方程式 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ を解くと $x = \text{}$ である。
- (8) 2次不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ を満たす x の値の範囲は である。

[2] 次の問に答えよ。

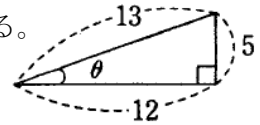
- (1) 右図は2次関数 $y = x^2 - 4x - 3$ のグラフである。この関数の $0 \leq x \leq 3$ における最大値は , 最小値は である。



- (2) 2次関数の $y = (x+1)^2 + 2$ のグラフの頂点は ア であり, このグラフを x 軸方向に1, y 軸方向に-2だけ平行移動したグラフを表す2次関数は $y = \text{}$ イ である。

[3] 次の各問に答えよ。

- (1) 右図の直角三角形において $\tan \theta = \text{}$ である。



(2) 次の表を完成させよ。

ただし $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

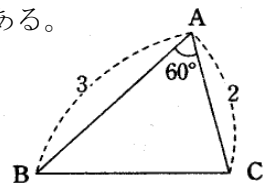
θ	ア	120°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	イ

- (3) $\sin^2 A + \cos^2 A = \text{}$ ア である。また $90^\circ \leq A \leq 180^\circ$ で, $\sin A = \frac{3}{5}$ のとき, $\cos A = \text{}$ イ である。

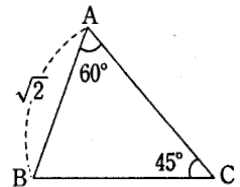
[4] 次の各問に答えよ。

- (1) 2つの相似な立体において, 相似比が $1 : 3$ のとき, 2つの立体の体積比は, : である。

- (2) 右図の $\triangle ABC$ において, 辺 BC の長さは である。

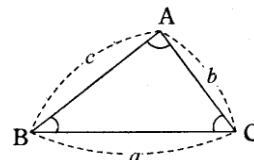


- (3) 右図の $\triangle ABC$ において, 辺 BC の長さは である。



余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



番号	配点	正答	正答率	無答率	誤答率	主な誤答例 (標本全体に対する%)
1	5	a^{12}	53	5	42	a^{81} (8.2), a^8 (4.5), a^{32} (3.6), a^6 (3.2), a^7 (3.2)
(2)	5	$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$	25	11	64	x^3-y^3 (5.0), $x^3-3xy+y^3$ (1.4), $x^3-3xy-y^3$ (1.4), $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (1.4)
(3)	5	$(2x+1)(x-3)$	50	26	24	$(x-1)(2x-3)$ (4.1), $(x+3)(2x-1)$ (3.2), $3, -\frac{1}{2}$ (2.7) $(x-3)(2x-1)$ (1.4)
(4)	5	$7+2\sqrt{10}$	51	5	44	7 (23.2), $7+2\sqrt{5}$ (4.1), $7+\sqrt{10}$ (2.3), $5+2\sqrt{10}+2$ (2.3), $7+2\sqrt{7}$ (2.3)
(5)	5	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$	36	12	52	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7}$ (17.7), $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (6.4), $\frac{\sqrt{10}}{7}$ (3.2), $\frac{1}{7}$ (2.7)
(6)	5	$x \leq 3$	50	21	29	3 (10.5), $0 \leq x \leq 3$ (4.5), 4 (1.8), $x \geq 3$ (1.8)
(7)	5	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$	30	40	30	$-\frac{1}{2}, -1$ (3.6), $\frac{1}{2}, 1$ (2.3), $-1, 1$ (1.8), -1 (1.8)
(8)	5	$x < 1, 2 < x$	13	33	54	$1 < x < 2$ (16.4), $x = 1, 2$ (7.7), 2 (3.2), $1 \leq x \leq 2$ (3.2)
[2](1) ア	5	3	66	6	28	なし (14.1), 4 (4.1), 0 (3.2)
イ	5	-1	65	7	28	0 (12.7), 1 (3.2), 2 (1.8), -2 (1.4)
(2)ア	5	(-1, 2)	25	28	47	2 (20.0), -3 (5.9), -1 (3.2), 3 (3.2)
イ	5	$-3x^2$	12	41	47	$-3(x+1)^2$ (3.2), $-3(x+2)^2$ (3.2), 2 (2.7), $3, -3x$ (2.3)
[3](1)	5	$\frac{5}{12}$	74	6	20	$\frac{12}{13}$ (4.1), $\frac{5}{13}$ (2.3), 30° (1.8), $\frac{13}{12}$ (1.4)
(2)ア	5	30°	71	1	18	60° (12.3), 90° (3.2), 45° (1.8), 60 (1.8)
イ	5	$-\frac{1}{2}$	55	4	41	$\frac{1}{2}$ (31.4), $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (1.4), $\sqrt{3}$ (1.4), $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1.4)
(3)ア	5	1	46	16	38	$\tan^2 A$ (20.5), $\tan A$ (5.0), $\frac{1}{\tan A}$ (1.4), 90° (1.4), 180° (1.4)
イ	5	$-\frac{4}{5}$	13	32	55	$\frac{4}{5}$ (31.4), $\frac{2}{5}$ (4.1), $\frac{3}{5}$ (2.7), $\frac{5}{3}$ (1.8)
[4](1)	5	1:27	37	9	54	1:3 (16.8), 1:9 (11.4), 3:9 (5.5), 2:6 (5.0)
(2)	5	$\sqrt{7}$	39	18	43	7 (8.2), 4 (4.5), 3 (3.2), 5 (1.8)
(3)	5	$\sqrt{3}$	37	29	34	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (6.4), 1 (4.5), 3 (3.6), 2 (2.7)

(1) 2次不等式を解くときは常に2次関数のグラフとの対応を意識させたい。

年度	設問番号	設問の概要	正答率% (上位群%/下位群%)	主な誤答例
H21	[1](8)	2次不等式 $(x-1)(x-2)>0$	13% (30%/4%)	$1 < x < 2$ (16%), $x=1, 2$ (8%)

左辺の因数分解の形が与えられているにも関わらず、正答率が13%であった。2次不等式 $(x-1)(x-2)<0$ の解 $1 < x < 2$ を答えている者が16%、2次方程式 $(x-1)(x-2)=0$ の解 $x=1, 2$ を答えているものが8%もあった。これらの誤答は、2次不等式の解の形を公式として、意味も分からないままに暗記していることに起因している。2次不等式であるから、(左辺) = 0 とした2次方程式の解と不等号を使って挟み込む形にすればよいと誤解しているようである。上位群の無答率は0%であったが、正答率は30%にとどまった。下位群での無答率は91%であり、正答率は4%であった。

【指導上の留意点】

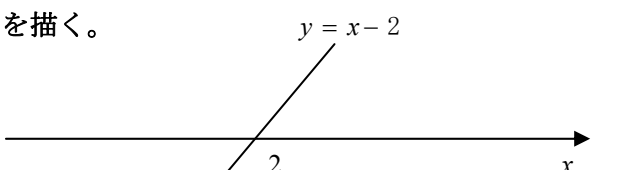
2次不等式の解を単純に公式として暗記するのではなく、2次関数のグラフと対応させて理解しておくことが大切である。 $y = (\text{2次不等式の左辺})$ とした2次関数のグラフを余白に描きながら、視覚的に考察する姿勢を養うことが、誤答を少なくすることにつながっていく。その前の段階として、1次不等式を学習するときから、グラフと対応させて不等式の解を求める指導をしておく必要がある。

以上の点を踏まえて、本問2次方程式 $(x-1)(x-2)>0$ を解かせるときには、以下のような段階に分けて指導していきたい。

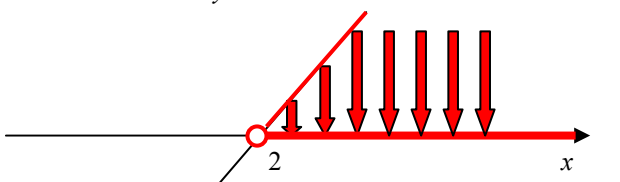
グラフを用いた不等式の解法

例1 1次不等式 $x-2>0$ を解く場合
(第1段階) 2次関数 $y=x-2$ のグラフと x 軸との交点の x 座標を求めさせる。
 $x-2=0$ を解いて、 $x=2$
 (これが、不等式の解でないことを意識させる)

(第2段階) 1次関数 $y=x-2$ の簡単なグラフを描く。



(第3段階) 1次不等式 $x-2>0$ が意味する x の範囲、つまり1次関数 $y=x-2$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲を答えさせる。

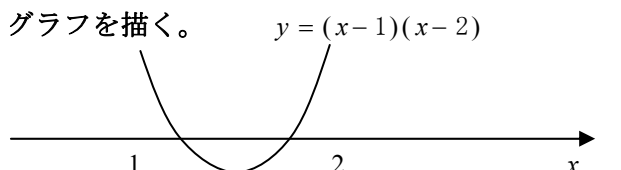


$x-2>0$ が意味するのは、1次関数 $y=x-2$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲である。これをグラフから読み取ると、
 $x > 2 \dots\dots$ (答)

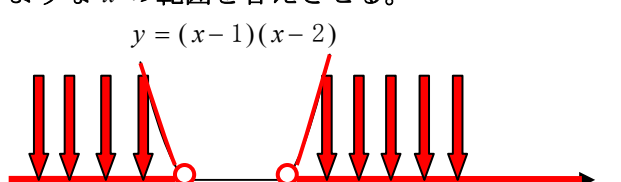
(注意) 本問は機械的に解いた方が優しいが、2次不等式の解法に通じるので、グラフを使った解法を紹介しておく。

例2 2次不等式 $(x-1)(x-2)>0$ を解く場合
(第1段階) 2次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標を求めさせる。
 $(x-1)(x-2)=0$ を解いて、 $x=1, 2$
 (これが、不等式の解でないことを意識させる)

(第2段階) 2次関数 $y=(x-1)(x-2)$ の簡単なグラフを描く。



(第3段階) 2次不等式 $(x-1)(x-2)>0$ が意味する x の範囲、つまり2次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲を答えさせる。



$(x-1)(x-2)>0$ が意味するのは、2次関数 $y=(x-1)(x-2)$ のグラフの y の値が正になるような x の範囲である。これをグラフから読み取ると、
 $x < 1, 2 < x \dots\dots$ (答)

5 数学 I + A の問題, 結果及びその考察

次の の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

[1] 次の各問いに答えよ。

(1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ を計算すると である。

(2) $(x+y)^2 + 2x + 2y$ を因数分解すると である。

(3) 2次方程式 $x(x+3) - 5 = 0$ の解は $x =$ である。

(4) 2次不等式 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ を解くと である。

(5) 2次方程式 $x^2 - 5x + a = 0$ が実数解をもたないとき, 定数 a の値の範囲は である。

(6) 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 5$ を x 軸方向に , y 軸方向に だけ平行移動したグラフを表す2次関数は $y = 2(x+1)^2 + 4$ である。

(7) 2つの不等式 $x + 2 < 3x + 3$, $3x - 1 \geq x + 7$ を同時に満たす x の値の範囲は である。

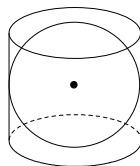
(8) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において, $2 \sin \theta - 1 = 0$ を満たす θ の値は ある。

(9) 5人が手をつないで輪を作る方法は 通りである。

(10) 6個の数字0, 1, 2, 3, 4, 5から異なる3個の数字を並べてできる3桁の奇数は 個ある。

(11) 1から100の自然数のうち, 2でも3でも割り切れない数は 個である。

(12) 底面の直径と高さが等しい円柱にちょうど入る球がある。円柱の底面の半径が3であるとき, 円柱と球の体積比をもっとも簡単な整数比で表すと : である。



[2] $OA = 6$, $OC = 14$ である長方形 $OABC$ の辺 OC 上に $OD = 2$ となるように点 D をとる。いま, 点 P が A を出発して辺 OA 上を毎秒1の速さで O に向かうと同時に, 点 Q は D を出発して辺 OC 上を毎秒2の速さで C に向かう。 x 秒後の $\triangle OPQ$ の面積を y とする。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 6$ のとき, OP と OQ を x の式で表すと, $OP =$, $OQ =$ である。

(2) (1)のとき, y を x の式で表すと $y =$ であり, $\square OPQ$ の面積 y の最大値は である。

[3] $\triangle ABC$ において, $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 辺 BC の長さは である。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径は である。

(3) $\triangle ABD$ の面積は である。

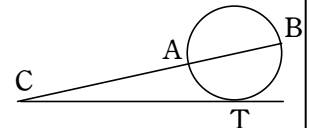
[4] A, B の2チームで野球の試合をする。 A は B に $\frac{1}{3}$ の確率で勝ち, 引き分けはないものとする。

3試合を行ったとき, 次の確率を求めよ。

(1) A が3試合とも負ける確率は である。

(2) A が1試合だけ勝つ確率は である。

[5] 直径が AB の円に対し, 右の図のように点 A が線分 BC を $1:2$ に内分する点となるように点 C をとる。



C から円に接線を引き, 接点を T とする。

$AB = 2$ のとき, $CT =$ である。

番号	配点	正答	上位群 正答率 下位群	上位群 無答率 下位群	誤答率	主な誤答例 (標本全体に対する%)
[1] (1)	5	-6	71 93 56	4 0 8	25	$-6+\sqrt{35}$ (2.6), -1 (1.7), 1 (1.3)
(2)	5	$(x+y)(x+y+2)$	47 88 10	23 5 38	30	$x^2+2xy+y^2+2x+2y$ (7.2) $(x+y)^2+2(x+y)$ (4.9), $2(x+y)^3$ (2.0)
(3)	5	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$	72 93 49	8 0 14	20	$0, -3$ (1.8), $5, -3$ (1.5), $\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$ (1.2)
(4)	5	$x = 3$	42 66 14	4 0 9	54	$x \leq 3$ (25.3), $-3 \leq x \leq 3$ (4.3), $0 \leq x \leq 3$ (3.3), $x \geq 3$ (2.7)
(5)	5	$a > \frac{25}{4}$	49 90 7	23 0 47	28	$a < \frac{25}{4}$ (5.5), $a \geq \frac{25}{4}$ (2.0), $a > -\frac{25}{4}$ (1.3)
(6)	5	ア -2 イ 1	40 73 7	8 0 14	52	ア 2, イ 1 (10.4), ア 2, イ -1 (2.9), ア -1, イ 4 (2.6), ア -2, イ -1 (2.2)
(7)	5	$x \geq 4$	55 88 19	12 0 21	33	$-\frac{1}{2} < x \leq 4$ (8.2), $x > -\frac{1}{2}$ (6.2), $x \leq 4$ (1.7), $x < -\frac{1}{2}$, $4 \leq x$ (1.5)
(8)	5	$30^\circ, 150^\circ$	50 76 19	16 1 28	34	30° (9.9), $\frac{1}{2}$ (3.5), $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ (2.9) 90° (2.2)
(9)	5	24	65 88 46	3 0 3	32	120 (14.6), 25 (3.3), 60 (2.0), 16 (1.5)
(10)	5	48	26 47 12	8 1 14	66	100 (7.6), 75 (7.5), 45 (3.0), 20 (2.9), 120 (2.8)
(11)	5	33	43 56 24	6 5 8	51	67 (7.6), 16 (5.8), 17 (5.5), 84 (5.4)
(12)	5	3 : 2	31 44 15	13 7 15	56	3 : 1 (8.8), 2 : 1 (6.7), 4 : 3 (5.1), 2 : 3 (3.3)
[2] (1)	5	ア $6-x$ イ $2+2x$	43 74 18	15 0 28	42	$(x, 2x)$ (9.2), $(6-x, 12-2x)$ (4.0), $(x, 2+2x)$ (3.8), $(6-x, 2x)$ (2.1)
(2)	5	ウ $-x^2+5x+6$ エ $\frac{49}{4}$	13 23 0	20 6 33	67	$(-x^2+5x+6, 12)$ (8.7), (無答, 12) (2.5), $(\frac{1}{2}(6-x)(2x+2), 12)$ (1.8), $(x^2+x,$ 42) (1.6)
[3] (1)	5	7	62 88 38	14 1 24	24	$\sqrt{69}$ (2.4), 6 (1.7), 13 (1.6), $\sqrt{39}$ (1.2)
(2)	5	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	35 57 3	31 9 61	34	4 (4.0), 7 (3.0), $\sqrt{3}$ (2.5), 3 (1.6)
(3)	5	$\frac{80\sqrt{3}}{13}$	16 32 1	41 18 66	43	$10\sqrt{3}$ (12.0), $5\sqrt{3}$ (3.6), 10 (3.0), 20 (1.7)
[4] (1)	5	$\frac{8}{27}$	65 92 39	9 0 17	26	$\frac{3}{2}$ (4.3), $\frac{1}{27}$ (3.8), $\frac{1}{8}$ (3.6), $\frac{1}{9}$ (1.6)
(2)	5	$\frac{4}{9}$	34 63 6	10 0 18	56	$\frac{4}{27}$ (28.1), $\frac{1}{3}$ (9.6), $\frac{3}{8}$ (2.9), $\frac{1}{9}$ (2.5)
[5]	5	$2\sqrt{6}$	42 69 17	13 0 26	45	5 (9.0), $2\sqrt{2}$ (7.0), 6 (4.2), 4 (3.7)

(1) $D=b^2-4ac$ の必要性和有効性を実感させたい。

年 度	問題	正答率 (上位群/下位群)	主な誤答例
H 19	2次方程式 $x^2-5x+a=0$ が異なる2つの実数解をもつとき、実数 a の値の範囲は <input type="text"/> である。	50% (89% / 7%)	$a > \frac{25}{4}$ (3.7), $a \leq \frac{25}{4}$ (3.1)
H 20	2次方程式 $x^2-5x+a=0$ が実数解をもつとき、実数 a の値の範囲は <input type="text"/> である。	41% (81% / 4%)	$a < \frac{25}{4}$ (9.0), $a \geq \frac{25}{4}$ (3.8)
H 21	2次方程式 $x^2-5x+a=0$ が実数解をもたないとき、実数 a の値の範囲は <input type="text"/> である。	49% (90% / 7%)	$a < \frac{25}{4}$ (5.5), $a \geq \frac{25}{4}$ (2.0)

[1] (5)で2次方程式の実数解の個数について出題した。H19は「異なる2つの実数解をもつ」に対してH20は「実数解をもつ」としたため、正答率は41%に下がった。H19, H21の正答率から $D=b^2-4ac$ の符号の向きの違いは理解していることは分かる。また、H20の正答率や誤答例から生徒は $D=b^2-4ac$ の不等号に等号が入るか入らないかの区別が出来ていないことが分かる。上位群と下位群を見ても、上位群の約9割は $D=b^2-4ac$ の使い方を理解しているが、下位群は1割もの生徒が使い方を理解していないことが分かる。下位群の無答率は47%となっており、2次方程式に a などの文字が入ってしまうと、難しい問題だという意識を持ってしまい、最初から問題に取り組まない場合が多い。また、誤答例から、実数解という意味をしっかりと理解していない生徒や、 $D=b^2-4ac > 0$ をグラフが y 軸よりも上になると勘違いし、共有点がないと覚えている生徒もいるようである。

【指導上の留意点】

数学Iにおいて、2次方程式の解の公式のあとに、 $D=b^2-4ac$ を使った実数解の個数のことについて学ぶ。そのとき、 $D=b^2-4ac$ は解の公式のルートの中と同じであることを強調する。2次関数のグラフと x 軸との位置関係の単元でも $D=b^2-4ac$ を使った方が有効な場合がある。

また、実数解をもつ2次方程式はどんな係数の場合になるのか、生徒本人に問題を作らせるのも思考力を高めるすばらしい指導法である。

例： x^2 + x + = 0の□の中に数を入れて、異なる実数解をもつ場合、重解を持つ場合、実数解をもたない場合の3つの式を作ってみよう。そして友達と作った式を出題しあい、実数解の個数を当ててみよう。

- どういった数の組だと実数解の個数がわかりにくいかな？

因数分解ができないとわかりにくい。係数に無理数や分数が入るとわかりにくい。

- 簡単に見つけ出す法則はあるのかな？

アとウに入った符号が違う場合（+と-）のときは必ず実数解をもつ。重解のときもあるけれど。

- 確実に見つけ出すにはどうしたらいい？

解の公式を使うといい。

- 解の公式を使うと余分な計算はないかな？解の公式で最低でも必要な部分はあるかな？

分母の部分は必要ない。

ルートの中身だけがわかればいい。



$D=b^2-4ac$ の導入へ

(2) 正弦定理を正確に使えるようにしたい。

[3] $\triangle ABC$ において、 $AB=8$ 、 $AC=5$ 、 $\angle A=60^\circ$ 、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 辺 BC の長さは である。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径は である。

この問題の全体の正答率だけを見てみると、大きな変動はみられない。しかし上位群の正答率を見ると、(1)、(2)においては3年間で一番低いものになった。特に(2)の上位群の正答率は例年よりも低いものとなった。余弦定理より正弦定理の方が定着していないことが分かる。

年度	正答率 (上位群 / 下位群)	
	(1)	(2)
H19	62% (98% / 33%)	34% (67% / 4%)
H20	60% (95% / 28%)	37% (77% / 5%)
H21	62% (88% / 38%)	35% (57% / 3%)

【指導上の留意点】

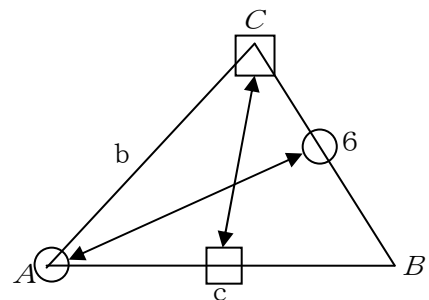
正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ はイコールが3つも入った式になっており、今まで学んできた式

の形「左辺=右辺」とは違い、生徒にとっても馴染みのないものである。そのため数学を苦手としている生徒にとっては、なかなか受け入れることができず処理に困っていると思われる。

まず、図をかきことができない生徒が多いので、必ず図をかきよう指導したい。そして問題文から角度や辺の長さがわかっているところに着目して、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ や $\frac{a}{\sin A} = 2R$ の形のように必要なところだけを書き出し、計算するよう指導していく。計算の際に、繁分数となる場合がほとんどなので、分母分子に同じものをかけて処理するか、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ を $a \div \sin A = 2R$ あるいは $a = 2R \cdot \sin A$ のようにしてから処理するなど、各学校の実状に合わせて指導したい。そして、問題のレベルも、単純に答えがでるものから複雑なものまで扱い、正弦定理の使い方を理解させていく必要がある。

例： $\triangle ABC$ において、 $\angle A=45^\circ$ 、 $\angle C=60^\circ$ 、 $BC=6$ のとき、
 AB の長さを求めよ。

問題文から分かるところに○や□などの記号を図形に書き込む。そして、必要な部分だけ書き出して考える。



$$\frac{\textcircled{a}}{\sin \textcircled{A}} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\square{c}}{\sin \square{C}} = 2R \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

(3) 順列問題における並べ方の優先順位を考えさせる。

3桁の整数をつくる問題は過去にも出題されているが、H21の問題ではさらに奇数という条件を付け加えた。その結果、正答率が大幅に下がった。誤答の例としては、奇数という条件が抜けていたり、百の位の「0」に関する場合分けが不十分である誤答が目立つ。条件が複雑になると対処しきれず、大きく正答率が下がることが分かる。

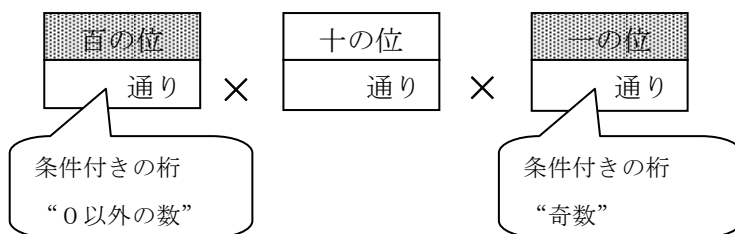
年度	問 題	正答率
H15	0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個を並べて 3 桁の整数をつくる	59%
H17	0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個を並べて 3 桁の整数をつくる	58%
H21	0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個を並べて 3 桁の奇数をつくる	25.7%

誤答例	誤答率	誤答分析
100	7.6%	(百:0 以外の 5 通り) × (十:残りの数 5 通り) × (一:残りの数 4 通り)
75	7.5%	(百:0 以外の 5 通り) × (十:残りの数 5 通り) × (一:奇数 3 通り)
45	3.0%	(一:奇数 3 通り) × (十:残りの数 5 通り) × (百:0 以外で 3 通り)

【指導上の留意点】

桁数の問題は、右のような枠を書いて、条件が付いている桁から考えていく。

今回の場合のように、条件付きの桁が複数ある場合は、どちらかを優先して考える。以下の解答例のように優先する桁の順番によって場合分けが必要な場合がある。



解答 1 「一の位」→「百の位」→「十の位」の順番で考える。

「一の位」…奇数は 1, 3, 5 の 3 通り。

「百の位」…0 と「一の位以外」の 4 通り。

「十の位」…残った数字の 4 通り。

従って、 $4 \times 4 \times 3 = 48$ 通り

百の位	十の位	一の位	=	48 通り
4 通り	4 通り	3 通り		

解答 2 「百の位」→「一の位」→「十の位」の順番で考える。

この場合、「百の位」に奇数を使った場合とそうでない場合で、「一の位」の結果に影響を与えるので場合分けが必要である。

(i) 「百の位」で奇数を使う場合は 1, 3, 5 の 3 通り。

「一の位」…「百の位以外」の奇数は 2 通り。

「十の位」…残った数字の 4 通り。

百の位	十の位	一の位	=	24 通り
3 通り	4 通り	2 通り		

(ii) 「百の位」で奇数を使うわない場合は 2, 4 の 2 通り。

「一の位」…奇数は 3 通り。

「十の位」…残った数字の 4 通り。

百の位	十の位	一の位	=	24 通り
2 通り	4 通り	3 通り		

(i) (ii) より、 $24 + 24 = 48$ 通り

今回は、奇数を求める問題だったので、場合分けのない**解答 1**が簡単であるが、偶数を求める問題や、5の倍数を求める問題になると場合分けが必要となるので、**解答 1**の解説後、**解答 2**の方法も学習しておく必要がある。また、グループ学習を取り入れて、お互いに説明し合ったり、どの方法が求めやすいかを話し合うのも有効な指導法である。

6 数学Ⅱの問題、結果及びその考察

次の の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

[1] 次の各問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$ を計算すると である。ただし、 i は虚数単位とする。

(2) 3次方程式 $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ の解は $x =$ である。

(3) 2次方程式 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2 =$ である。

(4) 点 $(-1, 2)$ と直線 $4x + 3y - 5 = 0$ との距離は である。

(5) $\sin 15^\circ$ の値は である。

(6) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $\tan \theta + \sqrt{3} = 0$ を満たす θ の値は である。

(7) $r > 0, -\pi \leq \alpha < \pi$ として、 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形すると、 $r =$ $\alpha =$ である。

(8) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ の値は である。

(9) 曲線 $y = x^3 - 2$ 上の点 $(-1, -3)$ における接線の傾きは である。

(10) 関数 $F(x)$ は $F'(x) = -6x^2 + 5$,
 $F(1) = 2$ を満たしている。このとき、 $F(x) =$ である。

(11) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 4x$ で囲まれた部分の面積は である。

[2] 円 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ … ① 上を動く点 $Q(s, t)$ と原点 O を結ぶ線分 OQ の中点を P とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 点 Q は円①上を動くので、 s, t が満たす関係式は である。

(2) 点 P の座標 (x, y) を s, t で表すと、 $x =$ $y =$ である。

(3) 点 P の軌跡の方程式は である。

[3] 関数 $y = 4^x - 2^{x+4} + 3$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の各問いに答えよ。

(1) $2^x = t$ とおくと、 t がとる値の範囲は である。

(2) y を t の式で表すと、 $y =$ である。

(3) y の最小値は である。

[4] 関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ($-3 \leq x \leq 3$) について、次の各問いに答えよ。

(1) この関数の極大値は である。

(2) $-3 \leq x \leq 3$ のとき、 y の最大値は y の最小値は である。

(3) x についての方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x = a$ が、 $-3 \leq x \leq 3$ の範囲に異なる3つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は である。

番号	配点	正答	上位群 正答率 下位群	上位群 無答率 下位群	誤答率	主な誤答例 (標本全体に対する%)
[1] (1)	5	1	79 94 70	3 0 3	18	$\frac{1}{2}$ (6.8), $\frac{2}{1-i^2}$ (2.0), 2 (1.5), $\frac{2}{(1+i)(1-i)}$ (0.8)
(2)	5	$-2, \frac{1}{2}, 1$	59 94 23	18 0 37	23	1 (6.4), $-2, 1$ (2.0), 1, 2, 1/2 (0.8), $-2, -1, 1/2$ (0.8)
(3)	5	$-\frac{7}{4}$	55 88 18	11 0 23	34	1 (4.0), $\frac{25}{4}$ (3.6), $\frac{9}{8}$ (2.4), $\frac{1}{4}$ (1.6)
(4)	5	$\frac{3}{5}$	39 74 2	26 4 53	35	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ or $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (6.4), 3 (3.8), -3 (3.7), 1 (1.7)
(5)	5	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	39 74 9	13 3 17	48	1/4 (7.0), $\pi/12$ (6.4), 1/2 (4.1), $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (4.0)
(6)	5	$\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$	39 64 8	20 1 37	41	120° or $2\pi/3$ (7.6), 120°, 300° (4.0), $5\pi/3$ or 300° (2.7), $\pi/3, 4\pi/3$ (2.3)
(7)	5	$\pi/2, \pi/3$	41 80 5	30 0 59	29	$\pi/2, \pi/6$ (5.4), $\pi/2, 60^\circ$ (1.9), $\pi/2, \sqrt{3}/2$ (1.7), $\pi/2, 1/3$ (0.9)
(8)	5	-3	72 100 51	6 1 8	22	16 (2.6), -4 (2.5), 4 (2.5), $2\sqrt{2}$ (1.9)
(9)	5	3	48 78 21	22 0 41	30	1 (4.8), -3 (4.1), 2 (2.6), $y=3x$ (2.5)
(10)	5	$-2x^3+5x-1$	66 91 37	10 0 18	24	$-2x^3+5x$ (8.2), x^3-6x^2+5x (1.0), $-3x^2+5x$ (0.8), -19 (0.6)
(11)	5	$\frac{32}{3}$	56 94 22	22 0 40	22	4 (2.9), 8 (1.6), 16 (1.6), 32 (1.4)
[2] (1)	5	$s^2+t^2-8s+12=0$	58 97 23	26 1 56	16	$(x-4)^2+y^2=4$ (2.6), $s^2+t^2-8s+12$ (0.7), $s^2+t^2=4$ (0.6)
(2)	5	$\pi \frac{s}{2}, \pi \frac{t}{2}$	50 85 8	31 9 64	19	$\pi \frac{s+t}{2}, \pi \frac{t}{2}$ (3.0), $\pi/4, \pi/0$ (0.9), $\pi s, \pi t$ (0.8)
(3)		$(x-2)^2+y^2=1$	24 58 0	50 0 81	26	$(x-4)^2+y^2=4$ (2.1), $(x-4)^2+y^2=1$ (2.0) $(x-2)^2+y^2=2$ (1.1), $s^2+t^2-16s+48=0$ (1.1)
[3] (1)	5	$1 \leq t \leq 4$	52 90 8	21 0 42	27	$0 \leq t \leq 4$ (5.6), $0 \leq t \leq 2$ (2.6) $0 \leq t \leq 1$ (2.0), $t > 0$ (2.0)
(2)	5	$t^2-16t+3$	48 90 5	20 0 43	32	t^2-4t+3 (7.1), $-14t+3$ (3.3), $-t^2+2t+3$ (1.7), $-t^4+2t+3$ (1.2)
(3)	5	-45	28 38 12	26 0 47	46	-61 (11.7), -13 (4.4), -1 (4.1), -12 (3.9)
[4] (1)	5	20	69 94 41	8 0 14	23	45 (7.9), 3 (2.0), 13 (1.6)
(2)	5	$\pi/45, \pi/7$	58 90 36	8 0 12	34	$\pi/45, \pi/9$ (5.3), $\pi/20, \pi/7$ (4.7), $\pi/45, \pi/9$ (2.2)
(3)	5	$9 \leq a < 20$	14 29 1	32 4 57	54	$-7 < a < 20$ (17.5), $9 < a < 20$ (7.0) $9 \leq a \leq 20$ (4.7)

(1) 軌跡についての理解が不十分である。

年	問 題	正答率(%) (上位群/下位群)
H 19	[2] (3) 円 $x^2+y^2-8x+12=0$ 上を動く点Qと原点Oとを結ぶ線分OQの中点Pの軌跡の方程式は <input type="text"/> である。	23 (38 / 1)
	円 $x^2+y^2-8x+12=0$ ……① 上を動く点Q (s, t) と原点Oを結ぶ線分OQの中点をPとする。このとき、次の問に答えよ。	
H 20	H (2) 点Pの座標 (x, y) を s, t で表すと、 $x=$ <input type="text"/> , $y=$ <input type="text"/> である。	53 (84 / 15)
	20 (3) 点Pの軌跡の方程式は <input type="text"/> である。	25 (46 / 1)
	21 H (1) 点Qは円①上を動くので s, t が満たす関係式は、 <input type="text"/> である。	58 (97 / 23)
	21 H (2) 点Pの座標 (x, y) を s, t で表すと、 $x=$ <input type="text"/> , $y=$ <input type="text"/> である。	50 (85 / 8)
	21 H (3) 点Pの軌跡の方程式は <input type="text"/> である。	24 (58 / 0)

軌跡に関する問題の定着が悪いので、3年間にわたり、その原因を探った。H19に一般的な出題をしたところ、正答率は、23%しかなく、軌跡についての理解が不十分であることが分かった。上位群でさえ正答率は38%であった。そこで、H20に媒介変数 s, t を与えて、 x, y を s, t を用いて表す小問を入れたところ、小問は半数以上の生徒が正解しているにもかかわらず、軌跡を求められた生徒は前年度と変わりなく25%しかなかった。そこで、H22はさらに媒介変数 s, t の関係式を求める小問を入れて出題したところ、(1)(2)の小問までは前年同様、半数以上の生徒が正解した。しかし、最後の軌跡を求められたのは以前と変わりなく24%であった。つまり、(1)(2)のような軌跡を求める準備段階の小問は半数以上解くことができるが、そこまで誘導しても、根本的に軌跡の求め方を理解していないため、軌跡を求められないのである。

上位群は、小問を入れることにより(3)の正答率は上がっているが、やはり、根本的に軌跡の求め方を理解していないため、(1)(2)の正答率が85%以上あるのに、(3)の正答率は58%しかない。

【指導上の留意点】

軌跡の問題を解くたびに、何を求めるのか生徒に質問し、目標を再確認する必要がある。もし、点Pの座標を x, y とすると、円 $x^2+y^2-8x+12=0$ のような関数の x, y と混同してしまうならば、点Pの座標を X, Y とし、 X, Y の関係式を求めさせてもよい。

目標
点P (x, y) の軌跡を求めるには、 x, y の間に成り立つ関係式を求めればよい。

解答例 円上の点Q (s, t) は $s^2+t^2-8s+12=0$ を満たす。

点Pの座標 (X, Y) は $\left(\frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right)$ である。よって $s=2X, t=2Y$ である。

$s^2+t^2-8s+12=0$ に代入する。 $4X^2+4Y^2-16X+12=0 \quad \therefore X^2+Y^2-4X+3=0$

よって点P (X, Y) は、円 $x^2+y^2-4x+3=0$ 上にあり、

点Pの軌跡は、中心(2, 0)、半径1の円である。

(2) 指数計算の理解が不十分である。

問 題	正答率(%) (上位群/下位群)
関数 $y = 4^x - 2^{x+4} + 3$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の問に答えよ。	
(1) $2^x = t$ とおくと、 t がとる値の範囲は <input type="text"/> である。	52 (90 / 8)
(2) y を t の式で表すと、 $y=$ <input type="text"/> である。	48 (90 / 5)
(3) y の最小値は <input type="text"/> である。	28 (38 / 12)

(1)では $t > 0$ や $0 \leq t \leq 4$, $0 \leq t \leq 2$, などの誤答が 12%もあったことから, $2^0 = 0$ と誤解している生徒が多くいることが分かる。

(2)では指数法則を使って $4^x = 2^{2x}$ や $2^{x+4} = 2^4 \cdot 2^x$ とできない生徒が半数いることが分かる。

(3)では, (1)で求めた定義域の範囲内で, (2)で求めた 2 次関数の最小値を求めなければならないのに, 定義域を考慮していない誤答が目立った。

【指導上の留意点】

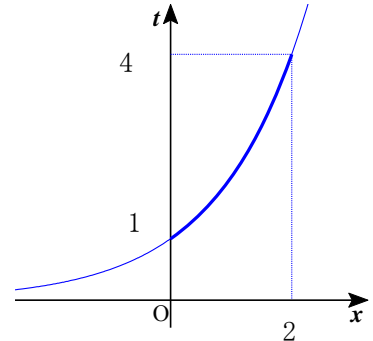
(1)では, グラフを利用して, 確認するよう指導する必要がある。

$$t = 2^x \quad (0 \leq x \leq 2)$$

$$x = 0 \text{ のとき } t = 2^0 = 1$$

$$x = 2 \text{ のとき } t = 2^2 = 4$$

$$\text{右図より } 1 \leq t \leq 4$$



また, 文字の置き換えをした場合, 常に, 定義域の存在を気にするよう指導していく必要がある

(3) 必ずグラフをかいて解くことが重要である。

年	問 題	正答率 (%) (上位群/下位群)
	関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ について, 次の各問いに答えよ。	
H	(1) この関数の極大値は <input type="text"/> である。	75 (96 / 53)
19	(2) x の 3 次方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x - a = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲は <input type="text"/> である。	44 (77 / 6)
	関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ($-3 \leq x \leq 3$) について次の問いに答えよ。	
H	(1) この関数の極大値は <input type="text"/> である。	53 (80 / 21)
H	(2) $-3 \leq x \leq 3$ のとき, y の値の範囲は <input type="text"/> である。	52 (76 / 23)
H	(3) x についての方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x = a$ が, $-3 \leq x \leq 3$ の範囲に異なる 3 つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は <input type="text"/> である。	15 (23 / 4)
21	(1) この関数の極大値は <input type="text"/> である。	69 (94 / 41)
H	(2) $-3 \leq x \leq 3$ のとき, y の最大値は, <input type="text"/> 最小値は <input type="text"/> である。	58 (90 / 36)
21	(3) x についての方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x = a$ が, $-3 \leq x \leq 3$ の範囲に異なる 3 つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は <input type="text"/> である。	14 (29 / 1)

H19 では, 定義域が実数全体であるが, H20, H21 では, 定義域を $-3 \leq x \leq 3$ として出題した。(2)の最大値・最小値を求める問題では, グラフをかいて解答していない生徒があり, 機械的に, 極大値・極小値を解答したり, x の端点に対する y の値を解答した誤答があった。(3)の実数解の個数に関する問題でも, グラフをかいていないため, 3個になるの範囲が正確につかめず間違えている生徒が目立った。

【指導上の留意点】

グラフを実際に書くことによって視覚的に得られる情報を理解することが重要である。GRAPE Sなどで $y = a$ のグラフを実際に動かして見せ視覚的に訴えることが大切である。

