付　平成22年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

１　検査の趣旨

当センターでは昭和51年から毎年，高等学校数学標準学力検査を実施してきた。今回も次の２つのねらいの下に学力検査を実施し，検査結果を分析・考察して，指導上の留意点を明らかにした。なお，過去の検査結果については，当該年度の当センター研究紀要別冊に掲載している。

(1) 入学者数学学力調査により把握した新入生の学力実態が，その後の高等学校での学習指導を通してどのように変容しているかを調べる。

(2) 基本事項についての理解と定着の程度を調査し，高等学校での指導に役立てる。

２　検査の実施及び処理

(1) 検査問題の種類と問題の構成

検査問題は，数学Ⅰ基本，数学Ⅰ＋Ａ，数学Ⅱの３種類である。どの検査問題も学習指導要領に示された内容を出題の基準とした。検査時間はいずれも50分である。

数学Ⅰ基本：　基本的な計算力，基礎事項の定着度を調べる問題を中心に構成した。

数学Ⅰ＋Ａ：　数学Ⅰ基本より高度の思考力・洞察力を要する数学Ⅰの問題に加え，数学Ａの内容も併せて構成した。

数学Ⅱ　　：　問題［１］は基本問題，問題［２］,［３］,［４］は標準問題である。

(2) 調査の対象と方法

各科目の授業が終了した学年を対象に，学校ごとに２月１日から３月31日の間に適宜実施した。集計のための標本は各学校とも課程別，類型別に各々２学級分とし，集計用紙（２学級分の得点度数分布と，その10%の抽出者の解答をそのまま転記したもの）を４月19日までに回収した。

３　検査結果の概要

(1) 標本数・平均点・標準偏差　　表14

テスト／項目	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
標本数	1,243	6,784	7,800
平均点	42.4	46.2	47.5
標準偏差	24.8	27.6	29.0

(2) 得点分布（%）　　表15

テスト／得点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
90 ～100	2.5	7.0	7.9
80 ～ 89	5.7	7.9	9.8
70 ～ 79	9.9	9.2	11.1
60 ～ 69	10.4	9.9	10.2
50 ～ 59	10.6	11.4	9.6
40 ～ 49	11.7	11.1	9.1
30 ～ 39	13.1	11.0	9.3
20 ～ 29	13.9	10.9	9.3
10 ～ 19	14.0	10.0	11.3
0 ～ 9	8.4	11.5	12.5

(3) 学校別（課程別）平均点分布（校）表16

テスト／平均点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
80以上		4	4
75～80未満		3	11
70 ～ 75		6	8
65 ～ 70	1	5	10
60 ～ 65	4	9	7
55 ～ 60	1	6	10
50 ～ 55	2	9	11
45 ～ 50	2	6	5
40 ～ 45	3	6	10
35 ～ 40	4	11	9
30 ～ 35	1	4	9
25 ～ 30		8	9
20 ～ 25	4	7	7
15 ～ 20	3	7	12
15未満		7	8
計	25	98	130

４　数学Ⅰ(基本)の問題，結果及びその考察

次の □ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］　次の各問いに答えよ。

(1)　$a^3 \times a^4 =$ □ である。

(2)　$(x+y)^3$ を展開すると □ である。

(3) $12x^2+20x+3$ を因数分解すると □ である。

(4)　$(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 =$ $\boxed{ア}$ であり，

$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) =$ $\boxed{イ}$ である。

(5)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ の分母を有理化すると □ である。

(6)　１次不等式 $5x+1<3x+7$ を満たす x の値の範囲は □ である。

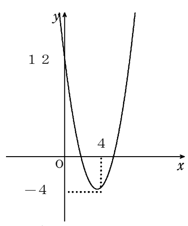
(7)　２次方程式 $2x^2+5x+1=0$ を解くと $x=$ □ である。

(8)　２次不等式 $(x-1)(x-2)>0$ を満たす x の値の範囲は □ である。

［２］　次の各問いに答えよ。

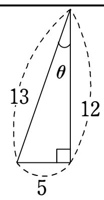
(1)　右図は２次関数 $y=x^2-8x+12$ のグラフである。

この関数の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値は $\boxed{ア}$ ，最小値は $\boxed{イ}$ である。



(2)　２次関数 $y=-3(x+1)^2+2$ のグラフの頂点は $\boxed{ア(\quad,\quad)}$ であり，このグラフを x 方向に１, y 方向に−2 だけ平行移動したグラフを表す２次関数は $\boxed{イ}$ である。

［３］次の各問いに答えよ。



(1)　右図の直角三角形において，$\tan\theta =$ □ である。

(2)　次の表を完成させよ。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

θ	ア	$120°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	イ

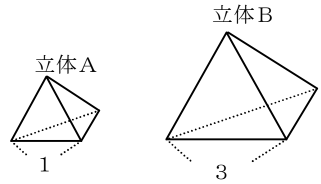
(3)　$\sin^2 A + \cos^2 A =$ $\boxed{ア}$ である。

また $90° \leqq A \leqq 180°$ で，$\sin A = \dfrac{3}{5}$ のとき，

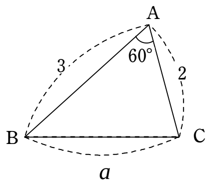
$\cos A =$ $\boxed{イ}$ である。

［４］次の各問いに答えよ。

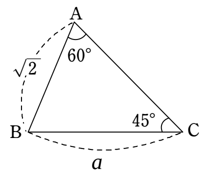
(1)　次の２つの相似な立体において，２つの立体 A，Bの体積比は $\boxed{\ :\ }$ である。



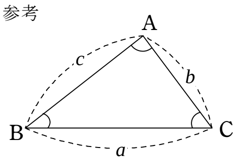
(2)　右図の△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの長さ a は □ である。



(3)　右図の△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの長さ a は □ である。



参考

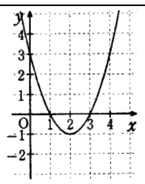
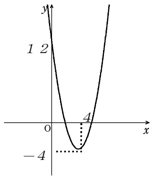


余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

番号	配点	正答	正答率	無答率	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1](1)	5	a^7	77	0	23	a^{12} （21.1），$2a^{12}$ （0.5），a^5 （0.5），7(0.5)
(2)	5	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	35	8	57	x^3+y^3 （7.0），$x^3+3xy+y^3$ （4.9），$x^3+x^2y+xy^2+y^3$ （3.2），$x^3+2x^2y^2+y^3$ （2.7）
(3)	5	$(2x+3)(6x+1)$	50	25	25	$4x(3x+5)+3$ （1.6），$(2x+3)(6x+2)$ （1.1），$(2x+1)(6x+3)$ （1.1），$(2x+6)(3x+1)$ （1.1）
(4)	5	ア　$7-2\sqrt{10}$ イ　3	39	6	55	ア 3 （7.6），$3-2\sqrt{10}$ （4.9），7 （3.2），$5-2\sqrt{10}+2$ （2.7） イ 1 （3.2），7(3.2)，5−2 （2.2）
(5)	5	$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$	40	10	50	$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7}$ （18.9），$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ （9.2），$\dfrac{\sqrt{10}}{7}$ （3.8），$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$ （2.2）
(6)	5	$x<3$	54	15	32	3 （8.6），$x<6$ （1.6），$x>3$ （1.6），2(1.6)
(7)	5	$\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$	38	32	30	3 （1.6），$\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ （1.1），$\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{4}$ （1.1），10 （1.1）
(8)	5	$x<1$，$2<x$	23	32	45	$x=1, 2$ （8.1），$1<x<2$ (7.6)，$x>2$ （2.7），$x>1, 2$ （2.2）
[2](1) ア	5	12	67	8	25	なし （11.4），3 （4.9），4 （3.2），(0, 12) (1.1)
イ	5	−3	40	9	51	−4 （33.0），12 （2.7），3 （2.2），2 （1.6）
(2) ア	5	（ −1 ， 2 ）	48	21	32	(1, 2) （7.0），(−3, 2) （4.3），(0, 2) （2.7），(3, 2) （2.2）
イ	5	$-3x^2$	18	29	52	$-3(x+1)^2$ （4.3），−2 （3.8），2 （3.2），$-3x$ （3.2）
[3](1)	5	$\dfrac{5}{12}$	36	7	57	$\dfrac{12}{5}$ （33.0），30° （6.5），$\dfrac{5}{13}$ （1.6），$\dfrac{12}{13}$ （1.6）
(2) ア	5	30°	76	2	22	60° （14.1），30° と 150° （3.2），45° （1.6），$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ （0.5）
イ	5	$-\dfrac{1}{2}$	58	3	39	$\dfrac{1}{2}$ (22.2)，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (4.3)，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2.7)，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (2.7)
(3) ア	5	1	45	18	37	$\tan^2 A$ （25.4），$\tan A$ （5.4），180° （1.1），$\dfrac{1}{2}\tan A$ (0.5)
イ	5	$-\dfrac{4}{5}$	15	30	55	$\dfrac{4}{5}$ (30.3)，$\dfrac{2}{5}$ (3.8)，$\dfrac{3}{5}$ (3.2)，4 (2.2)
[4](1)	5	1 : 27	28	4	68	1 ： 3 （45.4），1 ： 9 （16.8），1 ： 81 （1.1），1 ： 6 （1.1）
(2)	5	$\sqrt{7}$	44	12	44	7 （14.1），3 （4.3），6 （2.2），$\sqrt{5}$ （3.8）
(3)	5	$\sqrt{3}$	42	21	37	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ （6.5），$\sqrt{6}$ （4.3），1 （4.3），2 （3.2）

(1) **定義域と軸との位置関係について理解させたい。**

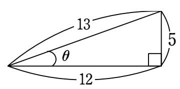
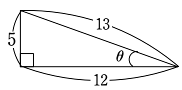
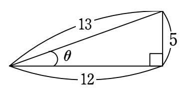
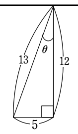
年度	問　題		正答率 （上位群／下位群）	主な誤答例（誤答率%）
H 21	右図は２次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフである。この関数の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値は $\boxed{ア}$ ，最小値は $\boxed{イ}$ である。 	ア	66.4% 82.6%／56.5%	なし（14.1），4（4.1）
		イ	65.0% 87.0%／60.9%	0（12.7），1（3.2）
H 22	右図は２次関数 $y=x^2-8x+12$ のグラフである。この関数の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値は $\boxed{ア}$ ，最小値は $\boxed{イ}$ である。 	ア	66.5% 73.6%／57.8%	なし（11.4），3（4.9）
		イ	40.0% 68.4%／10.5%	-4（33.0），12（2.7）

［２］(1)で，限られた定義域のある２次関数の最大値・最小値の問題を出題した。H21 は定義域内に軸が含まれているが，H22 は軸を定義域から外した問題を出題した。その結果，最大値の正答率は，H21 とH22 でほとんど同じであったが，最小値の正答率は，H21 は 65.0%，H22 は 40.0%と大幅に下がった。誤答例のうち，多かったのは−4(頂点の y 座標)で 33.0%であった。定義域内に軸が含まれていないことに気付かないで，定義域の両端と頂点の y 座標を求めて，その３つの値の中から一番大きい値を最大値，一番小さい値を最小値と考えて答えたと思われる。

【指導上の留意点】

軸が定義域に入っているかどうかを意識して考えることが定着していない。限られた定義域がある２次関数の最大値・最小値を求める問題に関しては，軸の位置は非常に大切である。軸の位置をもとに定義域内においてのグラフの外形を理解させたい。そのために，意識的に軸の直線もかかせるなど，グラフを利用するときは常に軸を意識させると効果的である。

(2) **三角比の基本をしっかりと理解させたい。**

年度	H19	H20	H21	H22
図形				
正答率	70.4%	64.2%	74.1%	36.2%
誤答例	30°（6.6）　$\frac{12}{5}$（1.8）	$\frac{12}{5}$（5.6）　30°（5.2）	$\frac{12}{5}$（11.0）　30°（4.8）	$\frac{12}{5}$（33.0）　30°（6.5）

［３］(1) では，三角比の定義を使ってタンジェントの値を求める問題を出題した。H19 とH21 では図形を移動させないで求める問題だったため，正答率は 70.4%，74.1%という結果であった。H22 では図形を回転・線対称の移動をさせなければいけなかったため，正答率は 36.2%と半減した。誤答例を見てみると，左下に θ があると勘違いして，図形をそのままの状態でタンジェントの値を求めた $\frac{12}{5}$ が 33.0%もあった。

【指導上の留意点】

タンジェントは $\frac{高さ}{底辺}$ という考え方は理解しているが，角 θ の位置を意識していない生徒は約３割いることになる。角 θ が定位置にないと三角比の値を求められない生徒に対しては，回転・線対称の移動を利用して角 θ を定位置まで移動させた図形をノートにかかせ，三角比の値を求めるよう指導したい。サイン・コサインの値を求める際も同様に，角 θ の位置に注意しながら求めるよう指導したい。

５　数学Ⅰ＋Aの問題，結果及びその考察

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］　次の各問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ を計算すると $\boxed{}$ である。

(2)　$(x-y)^2-2x+2y$ を因数分解すると $\boxed{}$ である。

(3)　２次方程式 $3x^2-5x+1=0$ の解は $x=\boxed{}$ である。

(4)　２次不等式　$x^2-3x\leqq 0$ を解くと $\boxed{}$ である。

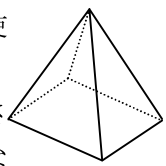
(5)　２次方程式 $x^2-5x+a=0$ が重解をもつとき，定数 a の値は $\boxed{}$ である。

(6)　放物線 $y=2(x-1)^2+3$ を x 軸方向に $\boxed{ア}$ ，y 軸方向に $\boxed{イ}$ だけ平行移動したグラフを表す２次関数は $y=2(x+1)^2+4$ である。

(7)　２つの不等式 $3x+3>x+2$，$3x-1\geqq x+7$ を同時に満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(8)　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ において，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ の値は $\boxed{}$ である。

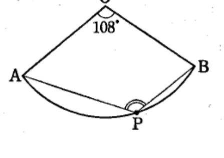
(9)　正四角錐の各面に異なる５色を使って塗り分ける方法は $\boxed{}$ 通りである。ただし，正四角錐を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。



(10)　６個の数字０，１，２，３，４，５から異なる３個の数字を並べてできる３桁の整数は　個ある。

(11)　９人を２人，３人，４人の３つのグループに分ける方法は $\boxed{}$ 通りである。

(12)　中心角 108° のおうぎ形の弧ＡＢ上に点Ｐをとるとき，∠ＡＰＢの大きさは $\boxed{}$ である。

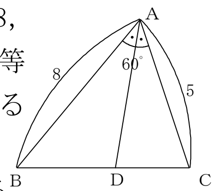


［２］　ＯＡ＝6，ＯＣ＝14 である長方形ＯＡＢＣの辺ＯＣ上にＯＤ＝2 となるように点Ｄをとる。いま，点ＰがＡを出発して辺ＯＡ上を毎秒１の速さでＯに向かうと同時に，点ＱはＤを出発して辺ＯＣ上を毎秒２の速さでＣに向かう。x 秒後の△ＯＰＱの面積を y とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 6$ のとき，ＯＰとＯＱを x の式で表すと，ＯＰ＝$\boxed{ア}$，ＯＱ＝$\boxed{イ}$ である。

(2)　(1)のとき，y を x の式で表すと $y=\boxed{ウ}$ であり，△ＯＰＱの面積 y が最大となる x の値は $x=\boxed{エ}$ である。

［３］　△ＡＢＣにおいて，ＡＢ＝8，ＡＣ＝5，∠Ａ＝60°，∠Ａの二等分線と辺ＢＣとの交点をＤとするとき，次の各問いに答えよ。



(1)　辺ＢＣの長さは $\boxed{}$ である。

(2)　△ＡＢＣの外接円の半径は $\boxed{}$ である。

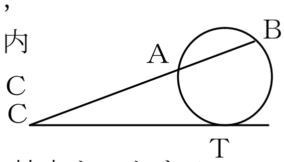
(3)　△ＡＢＤの面積は $\boxed{}$ である。

［４］Ａ，Ｂの２チームで野球の試合をする。ＡはＢに $\dfrac{1}{3}$ の確率で勝ち，引き分けはないものとする。３試合を行ったとき，次の確率を求めよ。

(1)　Ａが３試合とも負ける確率は $\boxed{}$ である。

(2)　Ａが２試合だけ勝つ確率は $\boxed{}$ である。

［５］右の図のように円周上の２点Ａ，Ｂを通る直線上に，点Ａが線分 ＢＣを 1 : 2 に内分する点となるように点Ｃをとる。



Ｃから円に接線を引き，接点をＴとする。ＡＢ＝2 のとき，ＣＴ＝ $\boxed{}$ である。

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	$-2\sqrt{35}$	56	82	25	3	0	7	40	0（9.2），$2\sqrt{35}$（2.7）
(2)	5	$(x-y)(x-y-2)$	41	81	13	26	10	36	33	$x^2-2xy+y^2-2x+2y$（7.9），$(x-y)^2-2(x-y)$（3.9）
(3)	5	$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$	82	97	71	8	0	11	10	1，$\frac{1}{3}$（1.4），$\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$（1.0），$\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$（0.8）
(4)	5	$0\leqq x\leqq 3$	64	100	35	11	0	16	25	$x\leqq 3$（7.0），$x=0, 3$（3.4），$x\leqq 0$，$3\leqq x$（1.7）
(5)	5	$a=\frac{25}{4}$	65	99	24	15	0	26	21	$-\frac{25}{4}$（2.3），6（2.3），25（1.6）
(6)	5	ア −2 イ 1	54	91	15	6	0	10	40	ア 2，イ 1（21.3），ア 1，イ 3（3.8）
(7)	5	$x\geqq 4$	58	93	23	12	0	20	31	$-\frac{1}{2}<x\leqq 4$（8.0），$x>-\frac{1}{2}$（6.8）
(8)	5	$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$	33	67	12	8	0	12	60	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$（41.2），$\frac{\sqrt{2}}{3}$（1.9），$\frac{2}{3}$（1.6）
(9)	5	30	16	30	1	10	0	12	74	120（29.8），24（8.3），25（7.6）
(10)	5	100	54	78	30	5	1	5	41	120（10.0），20（6.4），60（2.4），180（2.4）
(11)	5	1260	47	79	21	15	2	23	38	72（4.8），246（2.8），71（2.3）
(12)	5	126°	48	75	15	7	1	11	44	72°（21.2），108°（9.8），144°（2.9）
［2］(1)	5	ア $6-x$ イ $2+2x$	42	86	9	13	0	30	44	ア x イ $2x$（9.0），ア x イ $2+2x$（4.2）
(2)	5	ウ $-x^2+5x+6$ エ $\frac{5}{2}$	16	38	0	20	1	38	64	ウ x^2-5x+6（3.8），x^2+x（2.4） エ 2，3（14.9），6（10.0）
［3］(1)	5	7	59	95	38	19	0	25	22	13（4.0），6（3.7），6.5（2.1），$\sqrt{69}$（1.3）
(2)	5	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	34	68	12	34	13	47	32	4（4.4），7（2.9），3（2.9）
(3)	5	$\frac{80\sqrt{3}}{13}$	16	33	0	42	19	62	42	$10\sqrt{3}$（13.6），10（2.6）
［4］(1)	5	$\frac{8}{27}$	65	93	33	9	1	14	26	$\frac{2}{3}$（5.6），$\frac{1}{27}$（3.0），$\frac{1}{8}$（2.6）
(2)	5	$\frac{2}{9}$	30	56	9	12	2	25	57	$\frac{2}{27}$（23.9），$\frac{1}{9}$（6.3），$\frac{2}{3}$（4.4），$\frac{1}{3}$（3.3）
［5］	5	$2\sqrt{6}$	34	58	11	16	3	24	50	5（9.8），$2\sqrt{2}$（8.9），4（7.1）

(1) **下位群に平行移動の定着を図りたい。**

年度	問題［１］(6)	正答率 （上位群／下位群）	主な誤答例
H21	放物線　$y=2x^2-4x+5$　を x 軸方向に $\boxed{\text{ア}}$ ，y 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ だけ平行移動したグラフを表す２次関数は　$y=2(x+1)^2+4$　である。	40% (73%／７%)	ア２，イ１　(10.4) ア２，イ－1　(2.9) ア－1，イ４　(2.6)
H22	放物線　$y=2(x-1)^2+3$　を x 軸方向に $\boxed{\text{ア}}$ ，y 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ だけ平行移動したグラフを表す２次関数は　$y=2(x+1)^2+4$　である。	54% (91%／15%)	ア２，イ１　(21.3) ア１，イ３　(3.8)

H21 は２次関数を一般形で，H22 は２次関数を平方完成後の標準形で出題した。その結果，正答率は 40%から 54%に上昇した。特に，上位群に関しては，正答率は 73%から 91%に大幅に上昇した。一方，下位群に関しては正答率の大幅な上昇とはならず，結果的に上位群と下位群との差が更に広がった。また，誤答では，頂点の座標を正しく求めることができず，頂点の移動を（－1，3）から（1，4）と考えた誤答が 21.3%もあった。

【指導上の留意点】

平方完成された標準形から，軸の方程式および頂点の座標を正確に求めることができるようにした上で，頂点の座標の増減を考えることにより２次関数の平行移動を求めさせたい。

例１　頂点の増減で理解させる。

$y=a(x-p)^2+q$ で $y=q$ となる x の値は $x-p=0$ より，$x=p$ である。これが軸の方程式となる。

２次関数から軸の方程式と頂点の座標を求める流れ

$y=a(\underline{x-p})^2+q$

$x-p=0$

軸の方程式　$x=p$

頂点の座標（p，q）

$y=2(\underline{x-1})^2+3$

$x-1=0$

軸の方程式　$x=1$

頂点（1，3）

同様にして移動後の頂点を求めると，

移動後の頂点（－1，4）

よって，x 軸方向に－2，y 軸方向に１平行移動したことが分かる。

例２　公式化して機械的に求める。

２次関数 $y=ax^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると，$y=a(x-p)^2+q$ となる。ここで，q を左辺に移項させると $y-q=a(x-p)^2$ となり，元の式 $y=ax^2$ の x に $x-p$ を，y に $y-q$ を代入した形になっている。

$$y=ax^2 \xrightarrow{x\text{軸方向に}p,\ y\text{軸方向に}q} y=a(x-p)^2+q \longrightarrow y-q=a(x-p)^2$$

x に $x-p$，y に $y-q$ を代入

これを公式としてまとめると以下のようになる。したがって，

$$y=f(x) \xrightarrow[x\text{に}x-p,\ y\text{に}y-q\text{を代入}]{x\text{軸方向に}p,\ y\text{軸方向に}q} y-q=f(x-p)$$

$$y=2(x-1)^2+3 \xrightarrow[x\text{に}x+2,\ y\text{に}y-1\text{を代入}]{} y=2(x+1)^2+4$$

よって　x 軸方向－2，y 軸方向＋1　平行移動したことになる。

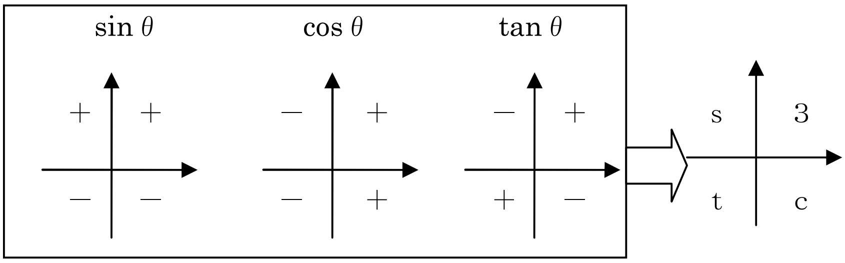
⑵　各象限における三角比の符号を定着させたい。

	問題［１］⑻	正答率 （上位群／下位群）	主な誤答例
H 20	0°　≦ θ ≦180°　において，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき， $\tan\theta$ ＝$\boxed{}$である。	56％ （75％／27％）	3（2.4），$\sqrt{2}$（2.3） $\sqrt{3}$（1.7），$\pm2\sqrt{2}$（1.7）
H 22	0°　≦ θ ≦180°　において，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき， $\cos\theta$　の値は$\boxed{}$である。	33％ （67％／12％）	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$（41.2），$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$（1.9） $\dfrac{2}{3}$（1.6）

H20 では，条件より θ が鋭角になるので，公式 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用して $\tan\theta$ を求めた場合，±に注意していなくても答えは出てしまう。それに対して，H22 では，与えられた条件では θ の範囲を絞ることができず 0°　≦ θ ≦180°　のままなので，公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用した場合，$\cos\theta$ の値は±の両方が解になる。利用する公式の違いはあるが，全体の正答率が 23％も下がった原因は，単に±の付け忘れだけではなく，三角比の各象限における符号が定着していないためと思われる。

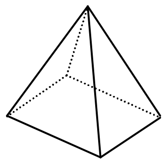
【指導上の留意点】

各象限での符号を徹底させため，三角比の符号が“＋”の象限に注目して，以下のようにまとめる。



第１象限(sin θ，cos θ，tan θ の３つとも＋)
第２象限(sin θ だけが＋)
第３象限(tan θ だけが＋)
第４象限(cos θ だけが＋)

⑶　順列の応用問題をできるようにしたい。

	H21	H22
問題［1］(9)	５人が手をつないで輪を作る方法は何通りあるか。	正四角錐の各面に異なる５色を使って塗り分ける方法は $\boxed{}$ 通りである。ただし，正四角錐を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。
正答率（上位／下位）	65.4％　（88％／46％）	16.2％　（29.6％／1.1％）
無答率（上位／下位）	3.1％　（０％／３％）	9.9％　（０％ ／12.0％）
主な誤答例（誤答率）	120（14.6％）　25（3.3％）	120（29.8％）　24（8.3％）

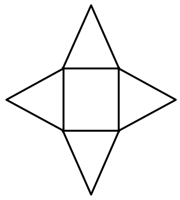
この数年間での円順列に関する出題はH21，H22 の２年間のみで，H21 は基本的な円順列を扱う問題であり正答率は 65.4％であった。それに対してH22 は，立体図形を題材にして円順列を考える問題であったため正答率が 16.2％まで大きく下がった。

誤答 120 は５!を計算した結果であり，全体の約 30％の生徒がそのように解答している。円順列ではなく単に順列で考えたためと推測できる。

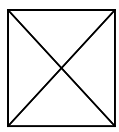
【指導上の留意点】

H21 の結果から円順列そのものの公式は定着していると言える。しかしH22 のように解答の一部に円順列を使うといった応用問題においては順列か円順列か区別ができない生徒が多いことが分かる。特に立体図形においては円順列をどこに利用するか分かりにくいので，展開図や上から見た図などを利用して指導をしていくのも１つの方法である。平面図形に書き換えることで側面を円順列としてイメージがしやすくなる。

例　展開図



上から見た図



(4) 組分けの問題を確実に解けるようにしたい。

	問題	正答率／無答率	主な誤答例（誤答率）
H15	［1］(10)　6人を2人・2人・2人に分ける	26%　／　8%	90（28.0%），30（7.1%）
H16	［1］(12)　6人を2人・2人・2人に分ける	32%　／　8%	90（25.0%），30（7.0%）
H17	［1］(13)　8人を3人・3人・2人に分ける	16%　／　13%	560（42.3%），67（2.7%）
H22	［1］(11)　9人を2人・3人・4人に分ける	47.0%／　14.7%	72（4.8%），　246（2.8%）

H15 から3年間，同じ人数を含む組分けの問題を出題したが，正答率は低い結果であった。そこで，H22 はすべて異なる人数に組分けする問題を出題したところ，正答率は 47.0%になった。グループに区別のついた分け方は比較的解けるが，グループに区別がなく同じ人数に分ける場合の組分けの問題は定着度が低い。

【指導上の留意点】

H15，16 は ${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2$ を3!で割り，H17 は ${}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_2$ を2!で割る。同じ人数で分ける場合はなぜ割らなければならないか理解できない生徒が多いので，以下の例を記す。

例　6人を2人，2人，2人の3つのグループに分ける方法は何通りあるか。

①6人をA～F，3部屋をⅠ～Ⅲとする。6人をAB，CD，EFの3グループに分け，2人部屋ⅠⅡⅢに入れる場合をすべて書き出す。

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
1	AB	CD	EF
2	AB	EF	CD
3	CD	AB	EF
4	CD	EF	AB
5	EF	AB	CD
6	EF	CD	AB

②部屋ⅠⅡⅢの区別をなくすためⅠⅡⅢの行を消すと，6通りの同じ分け方が残る。すなわち1つの分け方に対して部屋の区別をなくすと6通り（3!倍）同じものが存在する。

↓

1つにするためには3!で割る ⇒ 重複している数の階乗で割る

組分けする人数が異なる場合は部屋の入れ替えが出来ないため，階乗で割る必要がない。

(5) 反復試行を正しく理解させたい。

［4］A，Bの2チームで野球の試合をする。AはBに $\frac{1}{3}$ の確率で勝ち，引き分けはないものとする。3試合行ったとき，次の確率を求めよ。

	H21	H22
(1) 正答率／無答率	Aが3試合とも負ける確率 65.4%　／　8.4%	Aが3試合とも負ける確率 65.0%　／　9.1%
(2) 正答率／無答率	Aが1試合だけ勝つ確率 33.8%　／　10.1%	Aが2試合だけ勝つ確率 30.2%　／　12.4%
主な誤答例（誤答率）	$\frac{4}{27}$（28.1%）　$\frac{1}{3}$（9.6%）	$\frac{2}{27}$（23.9%）　$\frac{1}{9}$（6.3%）

H21，H22 とほぼ同じ問題を出題した。(1) ではAがBに3試合とも負ける確率を求める問題であり，正答率は2年ともほぼ同じ約 65%であった。しかし，(2) の反復試行の問題では，いずれも正答率が 30%程度で，反復試行の問題が理解できていないことが分かる。誤答で多かったのは全体の約 24%を占める $\frac{2}{27}$ で，これは勝敗の順番を考慮せずに求めた誤答である。

【指導上の留意点】

誤答を分析すると，反復試行の公式 ${}_nC_r\,p^r\,q^{n-r}$ をきちんと覚えきれずに，組合せCの計算を忘れている解答が多い。単に暗記するのではなく，最初は実際に，勝ちを○，負けを×などとして，2勝1敗となる場合を○－○－×，○－×－○，×－○－○のように書き出して，なぜCの計算があるかを考えさせてから，公式を理解して使えるように指導をしていく必要がある。

６　数学Ⅱの問題，結果及びその考察

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-i}$ を計算すると $\boxed{}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(2) ３次方程式 $2x^3+x^2-5x+2=0$ の解は $x=\boxed{}$ である。

(3) ２次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の２つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2=\boxed{}$ である。

(4) 点$(-1,\ 2)$ を通り，直線 $x+3y-5=0$ に垂直な直線の方程式は $\boxed{}$ である。

(5) $15°=45°-30°$ であることを利用して $\sin 15°$ の値を求めると $\boxed{}$ である。

(6) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$2\cos\theta+1\geqq 0$ を満たす θ の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(7) $r>0$，$0\leqq\alpha<2\pi$ として，$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形すると，$r=\boxed{\text{ア}}$，$\alpha=\boxed{\text{イ}}$ である。

(8) $\log_9 27$ の値は $\boxed{}$ である。

(9) 関数 $y=x^3-2$ を x について微分すると，$y'=\boxed{\text{ア}}$ である。この関数のグラフ上の点$(-1,\ -3)$における接線の傾きは $\boxed{\text{イ}}$ である。

(10) 放物線 $y=x^2-3$ と直線 $y=1$ とで囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。

［２］円 $x^2+y^2-8x+12=0$ ・・・ ① 上を動く点Ｑ$(s,\ t)$と原点Ｏを結ぶ線分ＯＱの中点をＰとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 円①の中心の座標は $\boxed{}$ である。

(2) 点Ｑは円①上を動くので，s，t が満たす関係式は $\boxed{}$ である。

(3) 点Ｐの座標$(x,\ y)$を s，t で表すと，$x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ である。

(4) 点Ｐの軌跡の方程式は $\boxed{}$ である。

［３］関数 $y=4^x-2^{x+4}+3\ (0\leqq x\leqq 2)$ について，$2^x=t$ とおくとき，次の各問いに答えよ。

(1) y を t の式で表すと，$y=\boxed{}$ である。

(2) t がとる値の範囲は $\boxed{}$ である。

(3) y の最小値は $\boxed{}$ である。

［４］関数 $y=x^3-3x\ \left(-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3\right)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) この関数の極大値は $\boxed{}$ である。

(2) $-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$ のとき，y の最大値は $\boxed{\text{ア}}$，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) x についての方程式 $x^3-3x=a$ が，$-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$ の範囲に異なる３つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。

番号	配点	正　　答	正答率	上位群 下位群	無答率	上位群 下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［１］(1)	5	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	70	90 57	3	0 4	27	$2\sqrt{2}$ (8.2)，$\frac{2\sqrt{2}}{2-i^2}$ (2.8)，$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (1.6)，$\sqrt{2}$ (1.1)
(2)	5	-2，$\frac{1}{2}$，1	60	89 27	16	1 34	24	1 (2.9)，$-1/2, 1, 2$ (1.7)，$-2, 1$ (1.6)，$(x-1)(x+2)(2x-1)$ (1.6)
(3)	5	$-\frac{7}{4}$	52	83 24	13	1 25	34	$\frac{25}{4}$ (4.2)，$\frac{9}{8}$ (3.9)，1 (2.4)，$\frac{1}{4}$ (2.1)
(4)	5	$3x-y+5=0$	60	94 24	17	0 31	23	$x-3y+7=0$ (3.9)，$x-3y+5=0$ (2.1)，$3x+y+1=0$ (1.3)，$3x-y-1=0$ (0.8)
(5)	5	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	39	67 8	10	1 16	51	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (27.7)，$\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ (2.2)，$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ (1.6)，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (1.4)
(6)	5	$0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$	36	68 4	23	3 44	41	$\frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{4}{3}\pi$ (6.1)，$0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ (4.2)，$0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi$ (1.1)，$0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ (0.8)
(7)	5	ア 2，イ $\frac{11}{6}\pi$	14	19 1	30	1 56	56	ア 2,イ $-\pi/6$ (13.3)，ア 2,イ $\pi/6$ (8.7)，ア 2,イ $\pi/3$ (3.4)，ア 2,イ $2\pi/3$ (2.7)
(8)	5	$\frac{3}{2}$	63	89 36	6	0 8	30	3 (15.1)，1/3 (2.3)，2/3 (1.9)，4/3 (0.8)
(9)	5	ア $3x^2$，イ 3	59	90 33	3	0 1	39	ア $3x^2$,イ 無答 (12.8)，ア $3x^2$,イ -3 (2.7)，ア $3x^2$,イ -1 (2.6)，ア $3x^2$,イ $3x$ (1.7)
(10)	5	$\frac{32}{3}$	35	58 9	23	4 50	42	8 (5.5)，$\frac{20}{3}$ (3.8)，$\frac{16}{3}$ (2.8)，16 (2.5)
［２］(1)	5	(4，0)	73	97 38	12	0 21	15	(4，-6) (2.6)，(2，6) (1.1)，(8，0) (0.9)，(6，2) (0.7)
(2)	5	$s^2+t^2-8s+12=0$	55	90 15	30	0 68	15	$2 \leqq s \leqq 6, -2 \leqq t \leqq 2$ (1.3)，$s^2+t^2=4$ (0.9)，$x^2+y^2-8x+12=0$ (0.9)，$s+t=1$ (0.8)
(3)	5	ア $\frac{s}{2}$，イ $\frac{t}{2}$	48	85 10	34	2 77	19	ア$\frac{4+s}{2}$，イ$\frac{t}{2}$ (3.0)，ア$\frac{s-4}{2}$，イ$\frac{t}{2}$ (1.7)，ア s，イ t (0.9)
(4)	5	$x^2+y^2-4x+3=0$	26	50 1	52	21 90	23	$(x-4)^2+y^2=1$ (2.1)，$(x-4)^2+y^2=2$ (1.1)，$(x-4)^2+y^2=4$ (0.7)，$(x-2)^2+y^2=2$ (0.7)
［３］(1)	5	$t^2-16t+3$	53	93 10	8	1 12	40	t^2-4t+3 (7.6)，$2t-t^4+3$ (6.6)，$-14t+3$ (2.7)，t^2-t-13 (1.2)
(2)	5	$1 \leqq t \leqq 4$	50	86 13	23	2 49	27	$0 \leqq t \leqq 4$ (4.2)，$1 \leqq t \leqq 3$ (3.1)，$0 \leqq t \leqq 2$ (1.9)，$8-\sqrt{61} \leqq t \leqq 8+\sqrt{61}$ (1.7)
(3)	5	-45	31	48 8	24	2 56	45	-61 (9.9)，-12 (5.1)，-13 (4.0)，-1 (3.7)
［４］(1)	5	2	67	95 45	9	0 13	25	18 (11.6)，3 (2.6)，24 (1.6)，-1 (1.4)
(2)	5	ア 18　イ -2	60	80 37	11	0 18	29	ア 18 イ 9/8 (6.0)，ア 18 イ $-63/8$ (3.7)，ア 16 イ -2 (1.5)，ア 2 イ -2 (1.1)
(3)	5	$\frac{9}{8} \leqq a < 2$	15	30 1	33	6 65	53	$-2 < a < 2$ (24.1)，$9/8 < a < 2$ (10.5)，$9/8 < a < 18$ (1.5)，$-1 < a < 1$ (1.5)

(1) 軌跡について本質的な理解ができていない。

問　題	正答率			無答率		
［２］円　$x^2+y^2-8x+12=0$　・・・①　上を動く点Ｑ（s，t）と原点Ｏを結ぶ線分ＯＱの中点をＰとする。このとき，次の各問いに答えよ。	H20	H21	H22	H20	H21	H22
(1)円①の中心の座標は $\boxed{}$ である。	69	／	73	11	／	12
(2)点Ｑは円①上を動くので，s，t が満たす関係式は $\boxed{}$ である。	／	58	55	／	26	30
(3)点Ｐの座標（x，y）を s，t で表すと，$x=\boxed{}$，$y=\boxed{}$ である。	53	50	48	29	31	34
(4)点Ｐの軌跡の方程式は $\boxed{}$ である。	25	24	26	54	50	52

５年間にわたり，同じ問題を用いて軌跡に関する生徒の誤答の原因を探ってきた。これは，H19 に軌跡の方程式を出題して正答率が 23％と大変低かったためで，H20 以降に小問を出題しながら誘導して解答させてきた。図をイメージするために円の中心を求めさせる問題，動点Ｑ（s，t）が満たす関係式を求めさせる問題，軌跡を求める点Ｐ（x，y）と動点Ｑ（s，t）との関係を求めさせる問題を入れて分析をした。

(1)～(3)までの各問いでは 50％以上の正答率であるが，(4)の軌跡の方程式まで求めることができた者は 25％前後しかなかった。そこで，(2)，(3)の両方とも正解している者を調べたところ，正答率は 39％と低く，個々には 50％を超えてはいるが，両方正解していないために(4)の正答を導けないことが分かった。逆に(2)，(3)の両方とも正解している生徒のうち 64％の生徒が(4)を正解している。したがって，軌跡の問題では，まず，(2)，(3)を確実に理解させた上で，(4)の説明をすることが大切であることが分かる。

【指導上の留意点】

(2)，(3)に共通していることは，条件から変数 s，t を含む関係式を求めるところである。文字の多さに圧倒されている可能性もあるので，具体的な数値を用いた問題を与えながら文字に対する抵抗感を和らげ，正解を導かせたい。特に(2)は，図形の方程式と図形上の点の関係が理解できてない可能性があるので，具体例を示しながら丁寧に指導する必要がある。

(2)の問題

円上を動く点Ｑ（s，t）とは，点Ｑの x 座標 s と y 座標 t を円の方程式に代入すると式が成り立つことである。

例１　点（a，3）が直線　$y=2x+1$　上にあるとき，a の値を求めよ。

例２　点（a，2）が円　$x^2+y^2-8x+12=0$　上にあるとき，a の値を求めよ。

例３　点（s，t）が円　$x^2+y^2-8x+12=0$　上にあるとき，s，t が満たす関係式を求めよ。

(3)の問題

点Ｐ（x，y）が原点Ｏ（0，0），点Ｑ（s，t）の中点である。

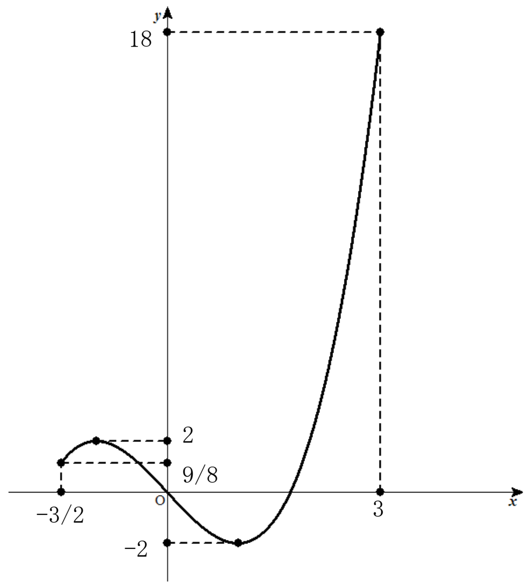
例１　２点Ａ（1，－1），Ｂ（5，7）を結ぶ線分ＡＢの中点の座標を求めよ。

例２　２点Ｏ（0，0），Ｃ（4，2）を結ぶ線分ＯＣの中点の座標を求めよ。

例３　２点Ｏ（0，0），Ｑ（s，t）を結ぶ線分ＯＱの中点の座標を求めよ。

(2) 関数の位置関係をグラフによって正確に捉えさせたい。

問　題	正答率（%）（上位群／下位群）	無答率（%）（上位群／下位群）
［4］関数　$y=x^3-3x$　（$-\frac{3}{2}\leqq x\leqq 3$）について，次の各問いに答えよ。		
(1) この関数の極大値は $\boxed{}$ である。	67%（95%／45%）	8%（0%／13%）
(2)　$-\frac{3}{2}\leqq x\leqq 3$　のとき，y の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。	60%（80%／37%）	11%（0%／18%）
(3) x についての方程式　$x^3-3x=a$　が，$-\frac{3}{2}\leqq x\leqq 3$　の範囲に異なる3つの実数解をもつような実数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。	15%（30%／1%）	33%（6%／65%）



(1)，(2)の極値，最大値と最小値については 60%の正答率を得ることができているため，増減表によって関数の増減や極値，端点での値については，おおよそ求められるようである。しかし，(3)のように曲線と直線の位置関係から交点の数を求め，実数解の個数を考える問題では，正答率は 15%と大幅に下がってしまう。誤答で一番多かったのは $-2<a<2$ で誤答率は 24.1%，次に多かったのは $\frac{9}{8}<a<2$ で誤答率は 10.5%であった。定義域を考慮していなかったり，端点の部分を考慮していないことが原因の誤答である。グラフを用いて視覚的に正しくとらえることができるように指導する必要がある。

【指導上の留意点】

異なる実数解の個数の問題は，グラフを示し視覚的に捉えさせて確認することが重要である。下の例のように，簡単な問題を取り上げ，考え方を理解させた上で，今回の問題を再度チャレンジさせたい。

例１　$2x^2+4x-k=0$　が異なる２つの実数解をもつ。（２次方程式で定義域が実数全体の場合）

解１　判別式の利用

$D=4^2-4\cdot 2\cdot(-k)>0$

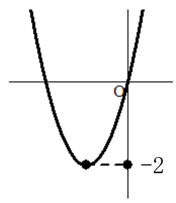
$k>-2$

解２　グラフの利用

$2x^2+4x=k$

$y=2x^2+4x$ のグラフから

$k>-2$

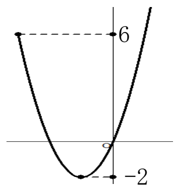


例２　$2x^2+4x-k=0$　（$x\geqq -3$）が異なる２つの実数解をもつ。

解　$2x^2+4x=k$

$y=2x^2+4x$　（$x\geqq -3$）のグラフから

$-2<k\leqq 6$



例３　$x^3-3x=a$　が異なる３つの実数解をもつ。

解　$x^3-3x=a$

$y=x^3-3x$ のグラフから

$-2<a<2$