付　平成25年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

１　検査の趣旨

当センターでは昭和51年から毎年，高等学校数学標準学力検査を実施してきた。今回も次の二つのねらいの下に学力検査を実施し，検査結果を分析・考察して，指導上の留意点を明らかにした。なお，過去の検査結果については，当該年度の当センター研究紀要別冊に掲載している。

(1) 入学者数学学力調査により把握した新入生の学力実態が，その後の高等学校での学習指導を通してどのように変容しているかを調べる。

(2) 基本事項についての理解と定着の程度を調査し，高等学校での指導に役立てる。

２　検査の実施及び処理

(1) 検査問題の種類と問題の構成

検査問題は，数学Ⅰ基本，数学Ⅰ＋Ａ，数学Ⅱの３種類である。どの検査問題も学習指導要領に示された内容を出題の基準とした。検査時間はいずれも50分である。

数学Ⅰ基本：　基本的な計算力，基礎事項の定着度を調べる問題を中心に構成した。

数学Ⅰ＋Ａ：　数学Ⅰ基本より高度の思考力・洞察力を要する数学Ⅰの問題に加え，数学Ａの内容も合わせて構成した。

数学Ⅱ　　：　問題［１］は基本問題，問題［２］,［３］,［４］は標準問題である。

(2) 調査の対象と方法

各科目の授業が終了した学年を対象に，学校ごとに２月１日から３月31日の間に適宜実施した。集計のための標本は各学校とも課程別，類型別に各々２学級分とし，集計用紙（２学級分の得点度数分布と，その10%の抽出者の解答をそのまま転記したもの）を４月18日までに回収した。

３　検査結果の概要

(1) 標本数・平均点・標準偏差　　表12

テスト 項目	数学 Ⅰ基本	数学 Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
標本数	1,892	7,687	8,100
平均点	44.0	47.6	44.0
標準偏差	23.1	25.6	28.7

(2) 得点分布（%）　　表13

テスト 得点	数学 Ⅰ基本	数学 Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
90 ～100	2.2	6.0	6.8
80 ～ 89	5.8	7.9	7.9
70 ～ 79	9.2	10.1	9.2
60 ～ 69	9.0	10.3	9.3
50 ～ 59	12.8	11.0	9.9
40 ～ 49	15.3	12.2	10.0
30 ～ 39	16.3	13.6	9.5
20 ～ 29	13.3	13.1	10.3
10 ～ 19	10.5	10.8	12.4
0 ～ 9	5.7	5.0	14.8

(3) 調査問題別平均点分布（校）　　表14

テスト 平均点	数学 Ⅰ基本	数学 Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
80以上		5	3
75～80未満		3	4
70 ～ 75		3	8
65 ～ 70		10	12
60 ～ 65	2	6	6
55 ～ 60	2	9	9
50 ～ 55	3	8	7
45 ～ 50	2	9	11
40 ～ 45	7	7	3
35 ～ 40	2	9	9
30 ～ 35	2	11	13
25 ～ 30	2	8	13
20 ～ 25	3	14	9
15 ～ 20	1	1	7
15未満		3	18
計	26	106	132

4　数学Ⅰ(基本)の問題，結果及びその考察

次の $\boxed{\quad}$ の中にあてはまる数，式または適語を解答欄に記入せよ。

［１］次の各問いに答えよ。

(1)　$(a^2)^3\times a^3=$ $\boxed{\quad}$ である。

(2)　$(2x-3)^2$ を展開すると $\boxed{\quad}$ である。

(3) $3x^2-20x+12$ を因数分解すると $\boxed{\quad}$ である。

(4)　$|2-7|=$ $\boxed{\quad}$ である。

(5) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=$ $\boxed{\quad}$ である。

(6)　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$ の分母を有理化すると $\boxed{\quad}$ である。

(7)　１次不等式 $2x-5\geqq 5x+7$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(8)　２次方程式 $2x^2+5x+1=0$ を解くと $x=$ $\boxed{\quad}$ である。

(9)　２次不等式 $(x-1)(x-2)<0$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(10)　集合A＝{1, 7, 9}，B＝{1, 3, 7} について，集合A∪B＝ $\boxed{\{\quad\}}$ である。

(11)　$x=2$ は $x^2=4$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である。

(12)　下の表は 40 人の生徒の土曜日，日曜日における数学の勉強時間を調べたものである。中央値は $\boxed{\quad}$ 時間である。

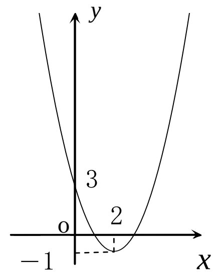
時間	0	1	2	3	4	5	6	計
人数	1	3	7	8	14	4	3	40

［２］次の各問いに答えよ。

(1)　２次関数 $y=-3(x-1)^2+2$ のグラフの頂点は $\boxed{(\quad,\quad)}$ である。

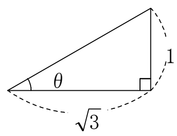
(2)　２次関数 $y=x^2-4x+5$ を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形すると，$y=$ $\boxed{\quad}$ である。

(3)　右図は２次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフである。この関数の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値は $\boxed{ア}$，最小値は $\boxed{イ}$ である。



［３］次の各問いに答えよ。

(1)　右図の直角三角形において，$\sin\theta=$ $\boxed{\quad}$ である。



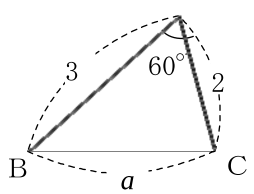
(2)　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\theta=$ $\boxed{\quad}$ である。

(3)　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ である。

$0^\circ\leqq A\leqq 180^\circ$ で，$\sin A=\dfrac{3}{5}$ のとき，

$\cos A=$ $\boxed{\quad}$ である。

(4)　下図の△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの長さ a は $\boxed{\quad}$ である。



番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1](1)	5	a^9	55	65	30	3	0	0	42	a^{18}(14.9)，a^{24} (9.8)，a^{11}(6.8)
(2)	5	$4x^2-12x+9$	77	91	70	3	0	4	20	$4x-12x+9$ (2.1) $4x^2-6x+9$ (2.1)，$4x^2+9$ (2.1)
(3)	5	$(x-6)(3x-2)$	51	70	4	25	4	52	24	$(x+6)(3x+2)$ (6.0)，6，$\frac{2}{3}$ (3.4)
(4)	5	5	50	57	26	11	4	17	39	-5(26.8)，$\lvert -5\rvert$ (2.6)
(5)	5	4	78	100	74	4	0	4	18	5(2.6)，$(\sqrt{5}+1)^2$(1.7)
(6)	5	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	40	87	4	12	0	26	48	$\frac{\sqrt{5}}{6}$(22.1)，$\frac{\sqrt{5}+1}{6}$(3.4)，$\frac{\sqrt{5}}{5}$(3.0)
(7)	5	$x\leqq -4$	39	57	13	23	4	35	38	$x\leqq 4$(9.4)，-4(5.6)， $x\geqq -4$(5.1)
(8)	5	$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$	43	70	13	34	9	48	24	$\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$(2.6)
(9)	5	$1<x<2$	24	52	0	42	13	65	34	$x=1$，2(8.5)，$x<1$，$2<x$(2.6)
(10)	5	{1,3,7,9}	38	65	13	8	0	9	54	{1,7}(40.9)，{3,9}(7.7)， {7}(3.0)
(11)	5	十分	30	48	22	22	4	17	48	必要(23.8)，必要十分(5.1)
(12)	5	4	41	48	39	6	0	0	53	3(31.1)，8(8.5)，5(5.1)
[2](1)	5	(1，2)	47	83	4	25	0	35	28	$(-3，2)$(3.4)，$(-1，2)$(2.6)
(2)	5	$y=(x-2)^2+1$	33	52	4	35	22	52	32	$(x-2)^2+5$(9.8)， $(x-2)^2+9$(3.0)
(3)	5	ア　8	34	65	4	16	0	22	50	3(18.7)，なし(13.2)
	5	イ　0	35	65	9	15	0	22	50	-1(33.2)，1(4.7)，$(2，-1)$(3.0)
[3](1)	5	$\frac{1}{2}$	48	74	35	9	0	13	43	30° (16.2)，$\frac{1}{\sqrt{3}}$(6.8)，2(4.7)
(2)	5	45°	54	65	26	20	9	17	26	60° (6.4)，90° (6.0)
(3)	5	$\pm\frac{4}{5}$	5	13	0	28	4	35	67	$\frac{4}{5}$(43.4)，$\frac{2}{5}$(4.3)
(4)	5	$\sqrt{7}$	41	70	4	24	4	30	35	7(7.2)，3(3.0)，5(2.6)

(1) 集合と命題についての基本的な概念の理解を深めさせたい

問題番号	問題(正答)	正答率(上位群／下位群)	無答率(上位群／下位群)	主な誤答例(誤答率)
[１](10)	A＝{1, 7, 9}，B＝{1, 3, 7}について，集合A∪B＝ $\boxed{\{\quad\}}$ である。 ({1, 3, 7, 9})	37.9% (65.2%／13.0%)	7.7% (0.0%／8.7%)	{1, 7} (40.9%)，{3, 9} (7.7%)
[１](11)	$x=2$ は $x^2=4$ であるための $\boxed{\quad}$ 条件である。 (十分)	29.8% (47.8%／21.7%)	22.1% (4.7%／17.4%)	必要 (23.8%)，必要十分 (5.1%)，絶対 (4.3%)

平成 24 年度の学習指導要領の改訂で数学Ａから数学Ｉに指導内容が変更された集合の分野から，集合と必要条件・十分条件の問題を出題した。どちらも低い正答率であった。また，最も多かった誤答と正答の割合がほぼ同じであることから，共通部分と和集合の違い，必要条件と十分条件の違いが分かっていないと推測される。さらに，(11)は無答率も高いことから，必要条件・十分条件という用語すら覚えていない生徒が多いことが分かる。

【指導上の留意点】

集合や命題は，用語を理解するだけでなく，事象の考察に活用できるようにすることが大切である。

共通部分と和集合を教える際，まずは，クラスや部活動など身近な集合の例を用いて，共通部分や和集合の概念を理解させるとよい。その後，「∩」や「∪」の記号を用いて表すが，これらは「キャップ」・「カップ」と読む方法と，「かつ」・「または」と読む方法がある。

「∩」・「∪」の違いを印象付ける覚え方は，「∩」はクレーンゲームのアームのイメージで，一部の集合と覚え，「∪」は両手を広げた人のイメージで，全部の集合と覚える方法がある。他には，「キャップ」から「帽子」をイメージし，帽子は「かぶる」から被っている部分，と覚える方法もある。

また，具体例をイメージしやすくするために，数学Ａの内容ではあるが，「100 以下の自然数のうち，２または３で割り切れる数の個数を求めよ」などの問題を紹介するのもよいだろう。

必要条件・十分条件の問題は，まずは真偽や包含関係をきちんと答えられるようにすることが大切である。いきなり数式の問題で始めるのではなく，「『Ａ君は○○高校の生徒である』と『Ａ君は高校生である』はどういう包含関係か」といった身近な問題から始め，「命題『平行四辺形ならば，長方形である』の真偽を答えよ」といった問題につなげるのがよいだろう。

必要条件・十分条件の覚え方としては，矢印をお菓子のやりとりと考える方法もある。$p \Rightarrow q$ を，p が q にお菓子をあげたと考える。p はお菓子が「十分」にあるから与えることができ，q はお菓子が「必要」だから受け取る。

また，次のような問題は課題学習のテーマにすることもできるだろう。

問題　『４枚のカード』

ここに４枚のカードがあります。　「Ｉ」　「５」　「Ｊ」　「４」

どのカードも，片面にはアルファベット，もう片面には数字が書かれています。

このカードには「片面に母音（Ａ，Ｉ，Ｕ，Ｅ，Ｏ）が書かれていれば，もう片面には偶数が書かれている」というルールがあります。

このルールが正しいことを証明するためには，４枚のうち，どのカードを最低何枚裏返せばよいでしょう。

5 数学Ⅰ＋Aの問題，結果及びその考察

次の $\boxed{\quad}$ の中にあてはまる数，式または記号を解答欄に記入せよ。

［１］ 次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ を計算すると $\boxed{\quad}$ である。

(2) $x^2+xy-x-y$ を因数分解すると $\boxed{\quad}$ である。

(3) ２次方程式 $4x^2+x-3=0$ の解は $x=\boxed{\quad}$ である。

(4) 不等式 $|2x-5|>3$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(5) ２次関数 $y=x^2-5x+a$ のグラフが x 軸と接するとき，定数 a の値は $\boxed{\quad}$ である。

(6) 放物線 $y=2(x-1)^2+1$ を x 軸に関して対称移動させたグラフを表す２次関数は $y=\boxed{\quad}$ である。

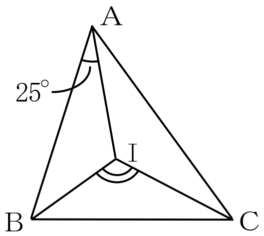
(7) 直線 $y=\sqrt{3}\,x$ と x 軸の正の向きとのなす角は $\boxed{\quad}$ である。

(8) △ＡＢＣにおいて，∠Ａ=60°，外接円の半径が２のとき，辺ＢＣの長さは $\boxed{\quad}$ である。

(9) ６個の数字 0，1，2，3，4，5 からくり返して用いることを許して３桁の整数をつくるとき，３桁の整数は $\boxed{\quad}$ 個ある。

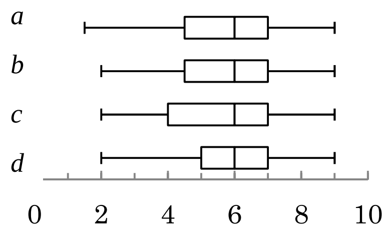
(10) 男子６人，女子４人の中から４人を選ぶとき，女子が少なくとも１人含まれる選び方は $\boxed{\quad}$ 通りである。

(11) 図において，点Ｉは△ＡＢＣの内心である。∠ＢＡＩ＝25° のとき，∠ＢＩＣの大きさは $\boxed{\quad}$ である。

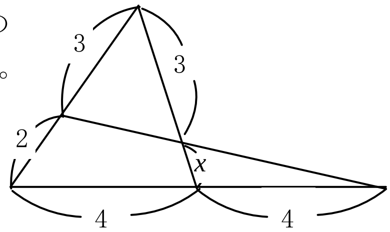


(12) 次のデータを箱ひげ図に表したとき，対応する箱ひげ図は，下の a ～ d のうち $\boxed{\quad}$ である。

点数	2	3	4	5	6	7	8	9	計
人数	1	4	5	6	7	10	4	3	40



(13) 図において，x の値は $\boxed{\quad}$ である。



［２］ ２次関数 $y=x^2-4x+5$ $(-1\leqq x\leqq a)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) $a=1$ のとき，y の最小値は $\boxed{\quad}$ である。

(2) $a>2$ のとき，y の最小値は $\boxed{\quad}$ である。

［３］ △ＡＢＣにおいて，ＡＢ＝8，ＢＣ＝5，∠Ｂ＝60° とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 辺ＡＣの長さは $\boxed{\quad}$ である。

(2) △ＡＢＣの面積は $\boxed{\quad}$ である。

(3) △ＡＢＣの内接円の半径は $\boxed{\quad}$ である。

［４］ 同じ製品を作る２つの工場Ａ，Ｂがあり，Ａ工場の製品には３％，Ｂ工場の製品には５％の不良品がでる。Ａ工場から100個，Ｂ工場から150個抜き出し，よく混ぜた後に１個を取り出す。次の確率を求めよ。

(1) 取り出した製品が不良品である確率は $\boxed{\quad}$ である。

(2) 取り出した製品が不良品であったとき，それがＡ工場の製品である確率は $\boxed{\quad}$ である。

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[１](1)	5	12	69	95	46	2	0	2	29	1(5.2)，2(3.1)，7(2.0)
(2)	5	$(x-1)(x+y)$	60	96	18	18	0	28	22	$x(x+y-1)-y$ (3.9)， $x(x+y)-(x+y)$ (1.2)
(3)	5	$x=-1,\ \frac{3}{4}$	68	87	46	4	0	5	28	$(4x-3)(x+1)$ (7.0)， 1，$\frac{3}{4}$(1.3)，1，$-\frac{3}{4}$(1.1)
(4)	5	$x<1,\ 4<x$	34	70	4	10	1	16	56	$4<x$ (12.2)，$1<x<4$ (5.6) $x>1$ (1.2)，$x<4$ (1.1)
(5)	5	$a=\frac{25}{4}$	45	86	10	21	2	46	34	0(3.1)，6(2.3)，5(2.0)
(6)	5	$y=-2(x-1)^2-1$	43	76	10	15	0	31	42	$-2(x-1)^2+1$(4.9)， $2(x-1)^2-1$(4.7)，$2(x+1)^2+1$(3.4)
(7)	5	60°	52	90	18	20	2	41	28	30° (6.7)，90° (2.5)
(8)	5	$2\sqrt{3}$	46	80	11	18	6	31	36	4(9.7)，2(4.4)，$\sqrt{3}$(3.7)
(9)	5	180　個	39	57	16	7	1	12	54	100(12.6)，216(6.5)，120(6.0)
(10)	5	195　通り	35	68	5	12	2	20	53	210(2.9)，336(2.2)
(11)	5	115　度	33	60	12	14	5	23	53	100(24.2)，130(10.2)
(12)	5	b	43	50	32	4	1	5	53	c(34.2)，d(13.8)，a(3.7)
(13)	5	1	78	95	64	6	0	10	16	2(5.9)，$\frac{3}{2}$(1.5)，$\frac{1}{2}$(1.5)
[２](1)	5	2	71	98	38	10	0	20	19	1(5.2)，5(2.6)，10(1.9)
(2)	5	1	44	76	16	20	3	32	36	2(12.0)，a^2-4a+5 (4.4)
[３](1)	5	7	65	95	26	12	2	28	23	6(2.7)，$\sqrt{39}$(2.6)
(2)	5	$10\sqrt{3}$	51	87	19	20	1	45	29	10(5.9)，20(3.1)，$20\sqrt{3}$(2.5)
(3)	5	$\sqrt{3}$	25	58	2	32	10	58	43	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$(8.4)，2(4.7)，3(3.4)
[４](1)	5	$\frac{21}{500}$	29	57	6	22	4	39	49	$\frac{2}{25}$(8.2)，$\frac{19}{300}$(4.1)，$\frac{1}{25}$(2.5)
(2)	5	$\frac{2}{7}$	13	20	1	35	16	54	52	$\frac{3}{250}$(10.9)，$\frac{3}{100}$(4.0)，$\frac{3}{8}$(2.5)

(1) 絶対値の計算方法を定着させたい

問題 番号	問題 (正答)	正答率 (上位群／下位群)	主な誤答例 (誤答率)
H24 [1] (5)	不等式 $\|2x-5\|<3$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。 $(1<x<4)$	43.0% (69.0%／15.0%)	$x<4$(14.0%), $-4<x<4$(2.8%)
H25 [1] (4)	不等式 $\|2x-5\|>3$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。 $(x<1,\ 4<x)$	34.1% (69.5%／4.2%)	$x>4$(12.2%), $1<x<4$(5.6%)

H24から出題している絶対値を含む不等式の問題である。単純に絶対値記号をはずし $2x-5>3$ としてしまい， $x>4$ となる誤答が最も多かった。H24は不等式 $|2x-5|<3$ を出題したが，同様に $x<4$ という誤答が最も多かった。このことから，絶対値そのものの理解が定着していないと考えられる。また， $1<x<4$ という誤答については，「$c>0$ のとき，不等式 $|x|>c$ の解は $x<-c$, $c<x$」という公式を誤って利用してしまった（$-c<x<c$ と勘違いした）ことが原因と予想される。

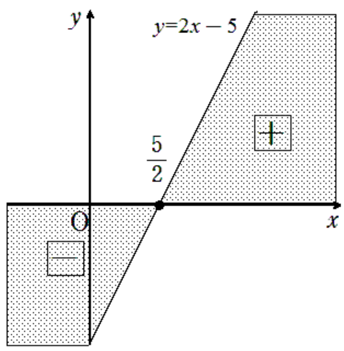
【指導上の留意点】

中学校では1年生で絶対値を学び,「数直線上で0からある数までの距離を,その数の絶対値という」と定義されているが，中学校では x や a といった文字は扱わず，-2 などの具体的な数値しか扱われていない。また，絶対値記号 $|\ |$ も扱わない。よって，「絶対値を問われたときには，正の値ならそのまま，負の値なら負の符号を除く」という認識しかできていない生徒も多いのではないかと思われる。文字式や複雑な形の式に対応するために，$|-2|$ などの絶対値記号を外す際にもただ負の符号を除くというのではなく，-1 をかけて正にするということを理解させたい。

高等学校で習う絶対値の定義（絶対値記号 $|\ |$ を用いた）が，中学校で習った定義と同じ意味であることをきちんと説明する。特に，文字式で表すので $a<0$ のとき，$|a|=-a$ として，マイナスにマイナスをかけてプラスに変えることで，すべての場合で，$|a|\geqq 0$ となることをしっかり理解させることが大切である。

また，以下のような方法を用いつつ，繰り返し演習することで絶対値の計算方法を確実に定着させたい。

① グラフを描いて場合分けをさせる

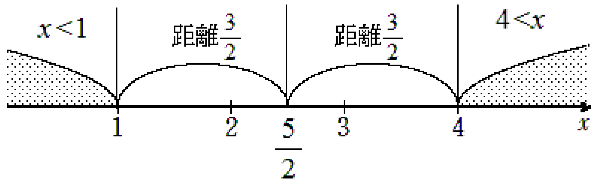


不等式 $|2x-5|>3$ を解く際に，例えば最初に $y=2x-5$ のグラフを描き， $x=\frac{5}{2}$ を境目としてグラフが x 軸の上側と下側に分かれるので，$2x-5$ は x の値によって正のときと負のときがあり，場合分けが必要だということを視覚的に気付かせる。その上で， $x\geqq\frac{5}{2}$ のときは， $|2x-5|=2x-5$ となり， $x<\frac{5}{2}$ のときは， $|2x-5|=-2x+5$ となるという場合分けを理解させる。公式を利用すればすぐ解けてしまう問題でも徹底して場合分けをさせることで，手間と時間はかかるが，高校1年生ではまだ経験の少ない「場合分け」の練習にもなる。

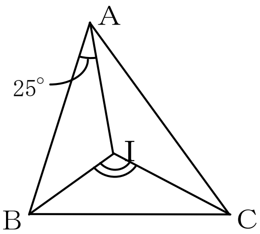
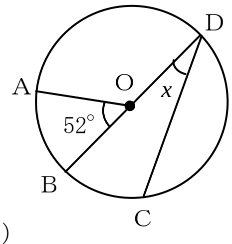
② 数直線を用いて絶対値の定義を理解させ，公式の定着を図る

不等式 $|2x-5|>3$ を解く際に，不等式の両辺を2で割って $\left|x-\frac{5}{2}\right|>\frac{3}{2}$ と変形することで，数

直線上で $\frac{5}{2}$ からの距離が $\frac{3}{2}$ より大きい範囲を求めさせる。そうすることで，求める範囲が $x<1$ と $4<x$ の二つあることに気付かせる。また，$\left|x-\frac{5}{2}\right|$ は「$|x|$ を数直線上で正の方向へ $\frac{5}{2}$ だけ平行移動した」と考えることができる。このような数直線を利用した考え方が理解できれば，公式の誤用も少なくなるのではないかと考える。



(2) 三角形の外心・内心の定義・性質を理解させたい

問題（正答）	正答率 （上位群／下位群）	無答率 （上位群／下位群）	主な誤答例 （誤答率）
標準学力検査Ⅰ＋Ａ［１］ (11) 図において，点Ｉは △ＡＢＣの内心である。 ∠ＢＡＩ＝25° のとき， ∠ＢＩＣの大きさは $\boxed{}$ である。　(115°)  	33．3% (60.0%／11.6%)	13．8% (5.3%／23.2%)	100° (24.2%)
入学者数学学力テスト$\boxed{\text{B}}$［１］ (11) 図のように，円Ｏの円周上に ４つの点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがある。 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$ であるとき，$\angle x$ の 大きさを求めなさい。 （$\angle x$ ＝ 26° ）  	92．6% (98.7%／87.6%)	0．4% (0.0%／0.7%)	52° (1.8%)

三角形の内心の定義・性質を利用する問題を出題した。中学校までの学習において，円に内接する三角形の性質を学習するため，外心や外接円を扱うことは多い。その際に扱う問題の多くが円周角や中心角を求める問題であり，入学者数学学力テスト$\boxed{\text{B}}$［１］(11)の正答率からすると，その内容は定着しているようである。

また，標準学力検査Ⅰ＋Ａ［１］(11)の問題で与えられた図には内接円は描かれていない。最も多かった誤答の 100°（24.2%)は，内心が各頂点の内角の二等分線の交点である性質は理解しているが，外接円を描いて考えたため，$\angle IBA=2\angle BAC$ と間違えてしまったと考えられる。

【指導上の留意点】

中学校では，三角形の外心・内心・重心・垂心の定義・性質などについて，あまり指導されていない。よって，指導する側は生徒がどの程度の知識があるのかよく把握してから指導に当たりたい。

中学校の教科書で，外心・内心・重心・垂心は以下のように扱われている。

○ 外心 / 外接円
- 外心や外接円という用語は，教科書によって発展的な内容として扱っている。
ただし，「三角形の３つの辺の垂直二等分線は１点で交わる」という証明問題を扱う教科書もある。
- 円に内接する三角形の内容として，接線と弦のつくる角の性質（接弦定理）を用いる問題や，円周角や中心角を求める問題はどの教科書もよく扱っている。ゆえに，生徒は三角形の外側に

円がある図は見慣れていると考えられる。

○ 内心 / 内接円

・内心や内接円という用語は，中学校の教科書にはほとんど出てこない。
ただし，「三角形の角の二等分線は１点で交わる」という証明問題を扱う教科書もある。

○ 重心

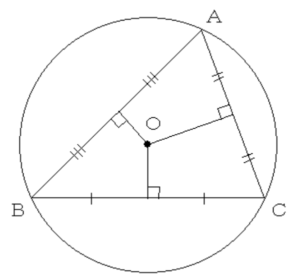
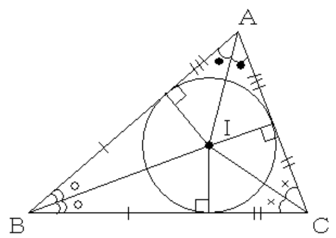
・重心という用語は，教科書によって発展的な内容として扱っている。

・発展的な内容として，三角形の三つの中線が１点で交わることを，中点連結定理を用いて証明している教科書もある。

○ 垂心

・中学校で重心・外心・内心を発展的な内容として扱うことは多いが，垂心はほとんど扱わない。

内心を考える際に，「円の内側に三角形がある」と勘違いしたり，内心と外心の作図方法を覚え間違えたりするなど，内心と外心の定義・性質・作図方法は覚えにくい。そのため，まず図に円を描き，その図から分かることを基に定義・性質を理解させたい。また，下の表のようにまとめることで，三角形の外心・内心の定義・性質の特徴や違いを定着させたい。

	定義	性質	代表的な図	相互関係
外心	･三角形の各頂点が同一円周上にあるとき，その円を外接円といい，その中心を外心という。	･各辺の垂直二等分線は１点（外心O）で交わる。		・正三角形のとき，外心･内心は一致する。 ・三角形の外接円の半径は，内接円の半径の２倍以上である（正三角形のとき，ちょうど２倍）。
内心	･三角形の各辺が同一円の接線になっているとき，その円を内接円といい，その中心を内心という。	･角の二等分線は１点（内心Ｉ）で交わる。 ･内心から各辺に引いた垂線の長さは全て等しい。 ･各頂点から２接点までの距離は等しい。		

６ 数学Ⅱの問題，結果及びその考察

次の $\boxed{\quad}$ の中にあてはまる数，式または記号を解答欄に記入せよ。

［１］ 次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{x+3}{x^2-1}-\dfrac{x+4}{x^2-x-2}$ を計算すると $\boxed{\quad}$ である。

(2) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-4}}$ を計算すると $\boxed{\quad}$ である。
ただし，虚数単位を i として答えよ。

(3) ３次方程式 $2x^3+5x^2+x-2=0$ の解は
$x=$ $\boxed{\quad}$ である。

(4) ２次方程式 $3x^2-2x+1=0$ の２つの解を
α，β とするとき，$\alpha+\beta=$ $\boxed{ア}$，
$\alpha\beta=$ $\boxed{イ}$ である。

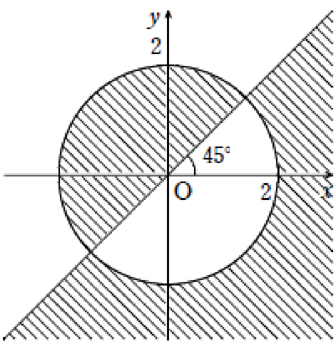
(5) $(x+2y)^5$の展開式における x^2y^3 の係数は
$\boxed{\quad}$ である。

(6) 点（－1，2）を通り，直線 $x+3y-5=0$ に垂直な直線の方程式は $\boxed{\quad}$ である。

(7) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$2\sin\theta-\sqrt{3}\geqq 0$ を満たす θ の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(8) $r>0$，$0\leqq\alpha<2\pi$ として，$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ を
$r\sin(\theta+\alpha)$ の形にすると $\boxed{\quad}$ である。

(9) 下の図の斜線部分を表す不等式は，下のア～エのうち $\boxed{\quad}$ である。ただし，境界線は含まないものとする。



ア $\begin{cases} x-y<0 \\ x^2+y^2-4<0 \end{cases}$

イ $\begin{cases} x-y>0 \\ x^2+y^2-4>0 \end{cases}$

ウ $(x-y)(x^2+y^2-4)<0$

エ $(x-y)(x^2+y^2-4)>0$

(10) $\log_3\dfrac{9}{8}+\log_3 54-\log_3\dfrac{3}{4}$ の値は $\boxed{\quad}$ である。

(11) 7^{12} は $\boxed{\quad}$ 桁の数である。
ただし，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

(12) $y=x^3-2$ 上の点（1，－1）における接線の傾きは $\boxed{\quad}$ である。

(13) ２つの放物線 $y=x^2+2x$，$y=-x^2+4$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{\quad}$ である。

［２］ ２点A(0，0)，B(6，0)について，次の各問いに答えよ。

(1) 線分ＡＢを２：１に内分する点は $\boxed{ア}$，
２：１に外分する点は $\boxed{イ}$ である。

(2) ２点Ａ，Ｂからの距離の比が２：１である点Ｐの軌跡は，中心 $\boxed{ア}$，半径 $\boxed{イ}$ の円である。

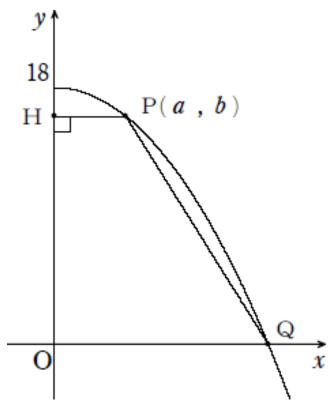
［３］ 関数 $y=4^x-2^{x+2}+3$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，
$2^x=t$ として，次の各問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(2) y を t の式で表すと，$y=$ $\boxed{\quad}$ である。

(3) y の最小値は $\boxed{\quad}$ である。

［４］ 関数 $y=-2x^2+18$ $(x>0)$ がある。この関数のグラフと x 軸との交点をＱとする。また，このグラフ上の点Ｐ$(a,\ b)$から y 軸に垂線ＰＨをおろす。このとき次の各問いに答えよ。ただし，$0<a<3$ とする。



(1) 台形ＰＨＯＱの面積 Sを a で表すと
$S=$ $\boxed{\quad}$ である。

(2) 面積 Sの最大値は $\boxed{\quad}$ である。

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1](1)	5	$-\frac{2}{(x-1)(x-2)}$	55	73	32	8	1	15	37	$\frac{-2x-2}{x^3-2x^2-x+2}$ (4.9)， $\frac{-2}{(x+1)(x-2)}$ (2.9)
(2)	5	$-\sqrt{2}i$	37	45	19	3	1	4	60	$\frac{\sqrt{2}}{i}$ (29.6)， $\sqrt{2}i$ (13.6)
(3)	5	$x=-2,\ -1,\ \frac{1}{2}$	56	82	20	17	2	37	27	－1 (6.0)， $(x+1)(x+2)(2x-1)$ (3.0)
(4) ア	5	$\alpha+\beta=\frac{2}{3}$	64	91	38	10	0	24	26	$-\frac{2}{3}$ (5.9)， $\frac{3}{2}$ (1.7)
(4) イ		$\alpha\beta=\frac{1}{3}$	62	86	30	11	0	24	27	$-\frac{1}{3}$ (6.8)， 3(3.5)
(5)	5	80	48	73	26	12	3	20	40	40(6.9)， 8(6.0)
(6)	5	$3x-y+5=0$	58	93	16	20	1	46	22	$y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ (2.6)， $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ (2.1)
(7)	5	$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$	53	90	14	23	2	43	24	$60^\circ\leqq\theta\leqq120^\circ$ (1.6)， $\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$ (1.6)
(8)	5	$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$	46	74	11	30	3	55	24	$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ (10.2)， $\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ (0.5)
(9)	5	エ	22	28	11	4	1	6	74	ウ(34.9)， イ(20.9)， ア(17.3)
(10)	5	4	51	87	25	24	4	33	25	81(3.7)， $\log_3\frac{435}{8}$ (2.3)
(11)	5	11　ケタ	45	55	29	19	6	29	36	10(13.9)， 12(3.4)
(12)	5	3	45	67	10	24	6	43	31	1(6.7)， $y=3x-4$ (5.4)
(13)	5	9	35	50	8	26	5	44	39	$\frac{9}{2}$ (6.0)， 12(2.3)
[2](1) ア	5	(4，0)	73	98	51	6	0	9	21	4(4.8)
(1) イ		(12，0)	61	92	25	8	0	13	31	(9，0)(5.2)， (－6，0)(3.8)
(2) ア	5	中心 (8，0)	26	57	2	36	12	53	38	(4，0)(5.7)， (0，0)(3.8)
(2) イ		半径 4	29	62	6	37	12	54	34	2(7.1)， 3(5.5)
[3](1)	5	$1\leqq t\leqq4$	51	91	7	22	0	50	27	$0\leqq t\leqq4$ (4.2)， $1\leqq t\leqq3$ (2.7)
(2)	5	$y=t^2-4t+3$	52	92	6	21	0	49	27	t^2-2t+3 (4.8)， $-t^2+2t+3$ (4.2)
(3)	5	－1	44	84	6	26	0	58	30	0(6.7)， 2(4.9)， 1(3.1)， 3(3.0)
[4](1)	5	$-a^3-3a^2+9a+27$	39	74	6	31	1	60	30	$\frac{(a+3)b}{2}$ (11.4)
(2)	5	32	30	59	2	48	17	70	22	27(3.8)

(1) 複素数の計算方法を定着させたい

年度	問題（正答）	正答率 （上位群／下位群）	主な誤答例 （誤答率）
H25	［1］(2) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-4}}$ を計算すると$\boxed{}$である。ただし，虚数単位を i として答えよ。 （$-\sqrt{2}i$）	36.5% (45.0%／19.3%)	$\dfrac{\sqrt{2}}{i}$ (29.6%), $\sqrt{2}i$ (13.6%), $\dfrac{2}{i}$ (2.7%)

虚数単位 i を含む計算問題は例年出題している。H25 は，H17(正答率 24.0%)と同じ問題で，H17 よりは高い正答率(36.5%)であったが出題の形式の異なる前年度よりは低い結果となった。主な誤答は $\dfrac{\sqrt{2}}{i}$ であり，H17 でも 21.7%の誤答があった。これは $\sqrt{-4}=2i$ は理解できているものの，i を分母に残したままではいけないということが理解できていないことが理由の一つになっていると考えられる。

また，$\sqrt{2}i$ という誤答は $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-4}}=\sqrt{\dfrac{8}{-4}}=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$ としたためであると考えられる。H17 では 10.7%の誤答があった。これは $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ が成り立つのは $a>0$，$b>0$ のときのみであることが定着していないためであると考えられる。

【指導上の留意点】

複素数は，$a+bi$ の形で表すのが一般的であるので，答えは分母に i が残ったままではいけないということを認識させる。H22 からH24 では「$\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-i}$ を計算せよ」という問題を出題したところ，正答率はすべて 60%を超えていた。つまり，分母が $a+bi$ の形である式を計算する問題にはよく対応できているので，計算の過程において分母が純虚数である場合も分母を実数化させることを確認させたい。

年度	問　題	正答率
H22	$\dfrac{1}{\sqrt{2}+i}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-i}$	70.4%
H23		63.2%
H24		62.6%

類題として，$\dfrac{8}{\sqrt{32}}$ の計算方法について確認させる。この式のように，$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ と変形し約分をすると $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ になるが，分母の有理化をすることによって更に簡単な形にできることを確認させる。今年度の問題も同様に，分母分子に i をかけることによって分母が実数化されて式が簡単になるということを理解させ，計算方法の定着につなげることが大切である。

また，$\dfrac{\sqrt{2}}{i}=\dfrac{\sqrt{2}}{0+i}=\dfrac{\sqrt{2}(0-i)}{(0+i)(0-i)}=-\sqrt{2}i$ と $a+bi$ の形と同じ方法で計算させれば，分母の実数化ができる生徒が増えるかもしれない。

(2) 内分点，外分点の求め方を定着させたい

年度	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（誤答率）
H25	［2］ 2点A（0，0），B（6，0）について，次の各問いに答えよ。 (1) 線分ABを2：1に内分する点は $\boxed{ア}$，2：1に外分する点は $\boxed{イ}$ である。 （ア（4，0），イ（12，0））	ア 73.2% (98.2%／50.5%) イ 61.4% (91.7%／24.8%)	ア　4　(4.8%) イ（9，0）(5.2%)， （−6，0）(3.8%)

内分点，外分点の求める問題はここ数年出題されていなかった。結果，外分点に対しては下位群の正答率が 24.8%となった。これは，単に公式を覚えていないだけでなく外分点の図形的意味を理解していないことも理由の一つと考えられる。

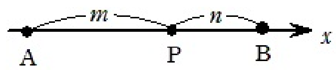
【指導上の留意点】

本問では2点がA（0，0），B（6，0）であり，公式を忘れてしまっても座標平面上に点がとれれば答えは出すことはできる。特に下位群には，下記のように x 座標に注目させ，指導したい。

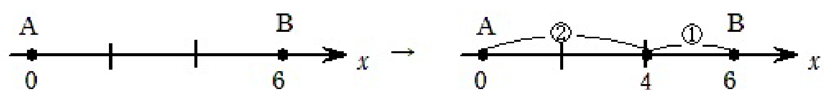
<u>～基準となる1メモリを見つけよう！～</u>

＜内分点＞

線分ABを m:n に内分する点Pの図形的意味として AB＝AP＋BP より，線分ABを(m+n)等分したものを，1メモリとして考える。



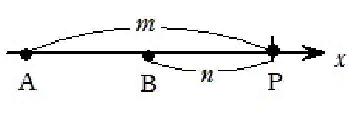
本問：2点A（0，0），B（6，0）について，線分ABを2：1に内分する点Pを求めよ。
考え方：ABを2+1=3等分したものを，1メモリ（距離2）と考えるから，点Aから点Bの方向に2メモリ（距離4）進んだ点が点Pとなる



＜外分点＞

線分ABを m：n に外分する点Pの図形的意味として m>n のときは AB＝AP－BP より，線分ABを（m−n）等分したものを，1メモリとして考える。

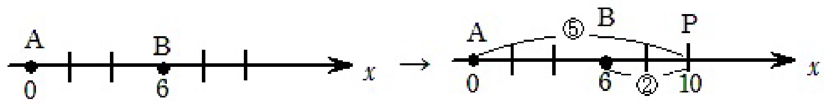
m>n のとき



m<n のときも同様に考える。

また，点Pは，m−n>0 のときは点Bの右側，m−n<0 のときは点Aの左側にあると考える。

類題：2点A（0，0），B（6，0）について，線分ABを5：2に外分する点Pを求めよ。
考え方：ABを5−2=3等分したものを，1メモリ（距離2）と考えるから，点Aから点Bの方向に5メモリ（距離10）進んだ点が点Pとなる



(3) 面積を確実に求めさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	誤答例（誤答率）
H23 [1](11)	放物線 $y=x^2$ と直線 $y=4x$ とで囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。$\left(\frac{32}{3}\right)$	55.0%（86.0%／28.0%）	4（3.5%），8（2.6%）
H25 [1](13)	2つの放物線 $y=x^2+2x$，$y=-x^2+4$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。(9)	35.1%（49.5%／8.3%）	$\frac{9}{2}$（6.0%），12（2.3%）

面積を求めさせる問題は例年出題している。今回，二つの放物線で囲まれた部分の面積を求める問題について出題した。その結果，H23 の放物線と直線で囲まれた部分の面積を求める問題よりも正答率が約 20 ポイント下がった。

原因として，H23 の問題は定積分の下端が 0 であったのに対し，H25 の問題では定積分の上端もしくは下端が 0 でなかったことで，計算ミスを起こしやすかったことが考えられる。

また，誤答の中で一番多かったのが $\frac{9}{2}$ であったため，下記に挙げる公式①を正しく使うことができていなかったと考えられる。

【指導上の留意点】

「放物線と直線」や「放物線と放物線」とで囲まれる部分の面積を求める際には，公式①を使うと計算が簡単になる。

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots\text{公式①}$$

ただし，今回の問題で公式①を使うときに注意しなければいけなかった点は，面積を求める際，a の値が－２となる点である。生徒は「放物線と直線（放物線）で囲まれた部分の面積」を求めるときに，公式①を使うと簡単に計算できることを習う。しかし，放物線の２次の係数が１である問題を扱うことが多く，今回も a の値を－１と思い込んで解いてしまったと推測される。

間違いを減らすには，まず『 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび２直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 S 』を求める問題では，まず『 $S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$ 』を必ず書くことを定着させることが有効である。さらに，次のように因数分解まで書くことを確実に定着させることで，a の値をきちんと意識して面積を正確に求めることができる。

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}(ax^2+bx+c)dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

> ２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が２つの解 α，β をもつとき
>
> $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$
>
> 例：$-2x^2+5x-2=-(2x-1)(x-2) \cdots \times$
>
> $=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) \cdots ○$