(1) 整数の性質を理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（誤答率）
H26［１］(8)	$\sqrt{25+x}$ が自然数となるような，最小の自然数 x を求めなさい。(11)	81.5%（93.5%／73.2%）	$x=4$（3.3%），$x=5$（2.9%），$x=9$（2.2%）
H27［１］(8)	$\sqrt{\frac{72}{n}}$ が自然数となるような，自然数 n をすべて求めなさい。(2, 8, 18, 72)	33.2%（64.1%／2.6%）	$n=2,\ 8,\ 18$（14.3%），$n=2,\ 8$（10.4%），$n=2,\ 8,\ 72$（4.7%）

H26 より，平方根の中の数が平方数になるような自然数の値を求める問題を出題している。H26 は正答率が 81.5%であったのに対し，H27 は 33.2%と 50 ポイント近く下がった。これは，H26 では根号の中が和の形であるのに対し，H27 では商の形であること，さらにH26 では「最小の自然数を求めなさい」であるのに対し，H27 では「すべて求めなさい」となっていたためと考えられる。また根号の中が平方数になるための数を考えたとき，$72=2^3\cdot3^2$ と素因数分解したが $n=2\cdot3^2$，$2^3\cdot3^2$ まで考えられなかったためである。あるいは $n=72$ としたとき，$\sqrt{\frac{72}{n}}=\sqrt{1}$ となるが $\sqrt{1}=1$ と考えることができなかったことも正答率が下がった原因の１つと考えられる。

【今後の指導に向けて】

整数の問題ではまず具体的に整数を代入してみることも解答の糸口を見つけるよい方法である。つまり，$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 72$ のとき，$\sqrt{\frac{72}{1}}$，$\sqrt{\frac{72}{2}}$，$\cdots$，$\sqrt{\frac{72}{72}}$ の中で自然数になるものを見つけさせる。

次にこの種の問題では，平方根の性質である「根号の中の数が平方数ならば根号は外れる」ということを利用して解くことを指導するとよい。解法としては次の手順で考えると分かりやすい。

①素因数分解をする。②偶数乗になっていない部分を見つけて，偶数乗になるような数字を見つける。

つまり，$72=2^3\cdot3^2$ と素因数分解した後，偶数乗になっていない数は２であるので最小の自然数は２である。本問でも，同様に偶数乗になっていない数を見つけるのであるが分数のため約分を考えなければならない。また，すべて求めなければならないため，次のように板書するなどして丁寧に指導したい。

$n=2$ のとき，$\sqrt{\frac{72}{n}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot3^2}{2}}=\sqrt{2^2\cdot3^2}=\sqrt{6^2}$	６の２乗
$n=2^3$ のとき，$\sqrt{\frac{72}{n}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot3^2}{2^3}}=\sqrt{3^2}$	３の２乗
$n=2\cdot3^2$ のとき，$\sqrt{\frac{72}{n}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot3^2}{2\cdot3^2}}=\sqrt{2^2}$	２の２乗
$n=2^3\cdot3^2$ のとき，$\sqrt{\frac{72}{n}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot3^2}{2^3\cdot3^2}}=\sqrt{1^2}$	１の２乗

(2) 展開や因数分解の有用性に気付かせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（誤答率）
H27［２］(4)	$2015^2-2014\times2016-2013\times2017+2012\times2018$ を計算しなさい。　(−4)	29.5%（51.0%／15.0%）	0（5.3%） 6（2.3%）

本年度新傾向の問題として展開の公式を利用した応用問題を出題したところ，正答率は３割に満たなかった。主な誤答例を見ると０が 5.3%であり，これは計算をした結果というより推測で０と答えた生徒もいたと考えられる。

【今後の指導に向けて】

本問の場合，$a=2015$ とおくと $a^2-(a-1)(a+1)-(a-2)(a+2)+(a-3)(a+3)$ となり，「この式を展開しなさい」という問題と考えられる。このように，適当な文字に置き換えをして数式を簡単な形にすることは今後重要なことになってくる。定着を図るために，数値をより簡単にして次のような問題を考えてみる。

> 類題：35^2 を求めなさい。
> 解答：展開式 $(10a+5)^2=100a^2+100a+25$
> $\qquad\qquad\qquad\qquad=100a(a+1)+25$
> 　　において，$a=3$ とおくと，
> 　　$35^2=100\times3\times4+25=1225$

他にも，次のような問題に対しては因数分解の考え方も利用できるので，いろいろやってみると展開や因数分解の公式の有用性に気付くであろう。

> 問題①：101^2-99^2 を求めなさい。
> 問題②：99×101 を求めなさい。

さらに，これを発展させると因数定理において x に数値を代入する際，次のように考えると計算が楽になる。例えば，

> 問題：$P(x)=x^3-7x^2-64$ を因数分解しなさい。
> 　において，$x=8$ を代入する際，8^2 を共通因数としてくくるとよい。
> 解答の前半：$P(8)=8^3-7\times8^2-64=8^2(8-7-1)=8^2\times0=0$
> 　　　　　よって，$P(x)$ は $x-8$ を因数にもつ。

この方法は，代入する数値が大きいとき，特に有効である。

(3) 関数の定義域や値域を正しく理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（誤答率）
H27［1］(10)	2つの関数 $y=2x+6$ と $y=kx^2$ について，x の変域が $-3\leqq x\leqq a$ のとき，y の変域は $0\leqq y\leqq18$ で一致する。このとき，k の値を求めなさい。$\left(k=\dfrac{1}{2}\right)$	54.9% (88.9%／17.6%)	2(16.6%), 6(2.4%), 3(1.6%)

一次関数と二次関数の定義域や値域に関する問題を出題した。主な誤答例は $k=2$ だが，これは a の値を求めずに，$x=-3$ のとき $y=18$ と判断し，$18=k\times(-3)^2$ としてしまったのではないかと考えられる。このことから，定義域や値域がきちんと理解できていないと分かる。また，テストＢの中で上位群と下位群の正答率の差が最も大きかったのがこの問題である。関数分野について，下位群の生徒には特に丁寧な指導が必要である。

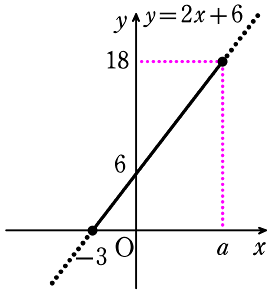
【今後の指導に向けて】

中学校ではまず一次関数を学ぶため，関数 $y=ax^2$ を考えるときでも「定義域の両端の値を調べれば，最大値や最小値を求めることができる」という先入観をもっている生徒がいると思われる。そこで二次関数のグラフを用いて，関数には増加する区間や減少する区間があることや，必ずしも定義域の両端で最大値や最小値をとるわけではないという一次関数との違いを視覚的に確認するとよいであろう。

また，問題を解く上でもグラフを利用するとよいだろう。今回の場合，一次関数と二次関数の定義域が一致しているので，まず一次関数のグラフのみをかいて a の値を求める。それから二次関数のグラフを重ねてかくことで，関数の定義域や値域を視覚的に理解することができる。

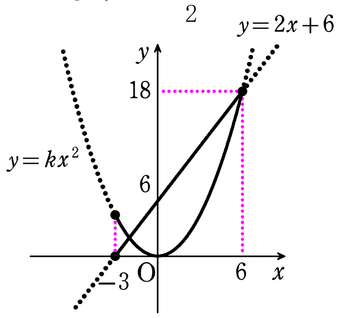
① 一次関数 $y=2x+6$ のグラフだけをかく。

$18=2\times a+6$ より $a=6$



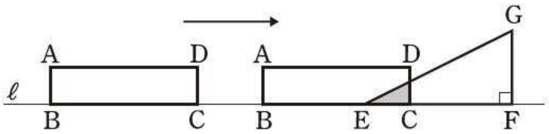
② 次に二次関数 $y=kx^2$ のグラフを重ねてかく。

$k\times 6^2=18$ より $k=\frac{1}{2}$



関数の値域，つまりは最大値や最小値を求める際，定義域について考察することは非常に重要なことである。グラフや増減表を用いるなどして，確実に定着させたい。

(4) 図形や点が動く問題の理解を深めさせたい

<table>
<tr><th>問題
番号</th><th colspan="3">問題（正答）</th></tr>
<tr><td rowspan="4">H27
［4］</td><td colspan="3">図のように，ＡＢ＝4cm，ＢＣ＝16cm の長方形ＡＢＣＤと，ＥＦ＝16cm，ＦＧ＝8cm，∠Ｆ＝90° である直角三角形ＥＦＧがある。長方形ＡＢＣＤは，直線ℓ にそって矢印の方向に毎秒 1cm の速さで動いていく。いま，点Ｃが点Ｅの位置にきたときから x 秒後の２つの図形が重なった部分の面積を $y\text{cm}^2$とする。このとき，次の問いに答えなさい。


(1) $0\leqq x\leqq 8$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。$\left(y=\frac{1}{4}x^2\right)$
(2) $8\leqq x\leqq 16$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。($y=4x-16$)</td></tr>
<tr><td>正答率（上位群／下位群）</td><td>無答率（上位群／下位群）</td><td>主な誤答例（誤答率）</td></tr>
<tr><td>(1)24.6%
(54.2%／1.3%)</td><td>(1)26.9%
(3.9%／54.9%)</td><td>(1) $y=2x$ (22.6%)，
$y=\frac{1}{2}x^2$ (4.5%)，
$y=4x$(3.0%)</td></tr>
<tr><td>(2)18.3%
(39.9%／0.0%)</td><td>(2)36.5%
(9.8%／64.7%)</td><td>(2) $y=4x+16$ (6.5%)，
$y=4x$ (5.2%)，
$y=2x$ (4.0%)</td></tr>
</table>

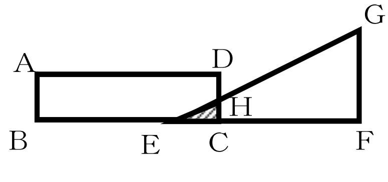
図形が動くことによって共通部分の面積の変化を立式する問題を出題した。(1)で最も多かった誤答は $y=2x$ だが，これは三角形の底辺の長さをＥＣ＝$x$cm，高さを 4cm と固定してしまい，$y=\frac{1}{2}\times x\times 4$ としてしまったと考えられる。無答率が高く正答率も低いことから，図形がどのような形で動いていくかといった状況の把握ができていない生徒が多数いることが分かる。

【今後の指導に向けて】

最初から一般化して考えるのではなく，$x=4$ のとき，$x=8$ のときなど具体的な図形を幾つかかいてみるとよい。その中から，共通の法則で変化する値や，全く変化しない値などを読み取れるように指導したい。

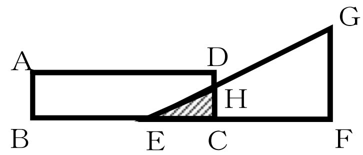
① $x=4$ のとき　ＣＥ：ＣＨ＝ＥＦ：ＦＧ＝16：8＝2：1

よって，ＣＥ＝4cm，ＣＨ＝2cm　　ゆえに，$y=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$



② $x=6$ のとき　ＣＥ＝6cm，ＣＨ＝3cm

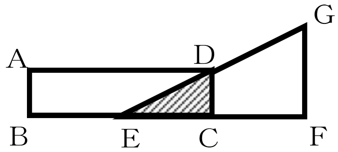
ゆえに，$y=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$



①・②から，ＣＥもＣＨも刻一刻と変化する！！

③　x＝8 のとき　ＣＥ＝8cm，ＣＤ＝4cm だから，

$y=\frac{1}{2}\times8\times4=16$



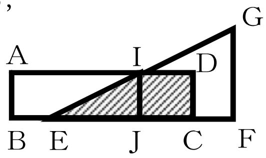
図が切り替わるときはどちらの式でも成り立つので，検算に用いるとよい

・$0\leqq x\leqq8$ のとき $y=\frac{1}{4}\times8^2=16$　　・$8\leqq x\leqq16$ のとき $y=4\times8-16=16$　一致したからＯＫ！

④　x＝12 のとき　ＥＪ＝8cm，ＩＪ＝4cm，ＣＪ＝4cm，ＣＤ＝4cm だから，

△ＥＪＩ＝$\frac{1}{2}\times8\times4=16\text{cm}^2$　　四角形ＣＤＩＪ＝$4\times4=16\text{cm}^2$

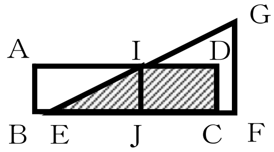
よって，y＝△ＥＪＩ＋四角形ＣＤＩＪ＝16＋16＝32



⑤　x＝14 のとき　ＥＪ＝8cm，ＩＪ＝4cm，ＣＪ＝6cm，ＣＤ＝4cm だから，

△ＥＪＩ＝$\frac{1}{2}\times8\times4=16\text{cm}^2$　　四角形ＣＤＩＪ＝$6\times4=24\text{cm}^2$

よって，y＝△ＥＪＩ＋四角形ＣＤＩＪ＝16＋24＝40



△ＥＪＩの面積と辺ＣＤの長さは点Ｃが動いても変化しない！！

(5) 三角形に分割して考えるようにさせたい

問題番号	問題(正答)	正答率(上位群／下位群)	無答率(上位群／下位群)	主な誤答例(誤答率)
H27［５］(2)	図のように，半径 5cm の円に内接する正八角形がある。次の問いに答えなさい。(2)正八角形の面積を求めなさい。 ($50\sqrt{2}$)	7.8%(19.0%／0.0%)	47.7%(35.9%／60.8%)	100 (2.5%)，75 (2.5%)，96 (1.8%)，$50\sqrt{3}$ (1.8%)

今回，テスト$\boxed{\text{B}}$で最も正答率が低かったのがこの問題である。円の中心から，正八角形の各頂点に補助線を引き，八つの二等辺三角形に分割すればよいわけだが，この二等辺三角形の面積を求めるのに,直角二等辺三角形を見つけるなどの工夫が必要であり,既習内容の活用という点で課題が見えた。

【今後の指導に向けて】

円に内接する正八角形の面積は，三角比の有用性を生徒に感じさせることのできる問題なので，数学Ｉで面積の公式を学習する際にぜひ扱いたい。三角比を用いた場合と，用いなかった場合の解答例は次のようになる。

三角比を用いた解答例

円の中心から，正八角形の各頂点に補助線を引き，８つの二等辺三角形に分割して考える。

中心角は 45°，半径は 5cm なので，三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot5^2\cdot\sin45°=\frac{25\sqrt{2}}{4}$$

よって，正八角形の面積は

$$\frac{25\sqrt{2}}{4}\times8=50\sqrt{2}$$

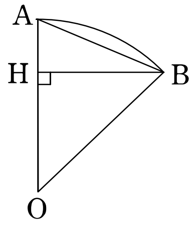
三角比を用いなかった解答例

右のようにＯ，Ａ，Ｂ，Ｈとおく。△ＯＢＨは∠ＢＯＨ＝45° の直角二等辺三角形であるから，ＯＢ:ＢＨ＝$\sqrt{2}$:1 となり

$$\text{BH}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ゆえに

$$\triangle\text{OAB}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{25\sqrt{2}}{4}$$



(以下，左と同様)

三角比を学ぶことにより,中学校で学んだ図形の知識をより深め活用できる力を育てたいと考える。

また，三角比の有用性を感じさせるには次のような問題を扱うのもよい。

『円周率を計算してみよう』

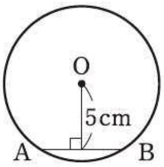
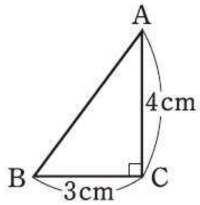
円周率は3.14…という無理数であることが分かっています。現代ではコンピュータを使って計算していますが，紀元前2000年頃には正六角形と比較したり，江戸時代の日本でも正1024角形を用いて円周率の近似値を求めたりしています。それでは，皆さんもやってみましょう。

(1) 正六角形を用いて，円周率が３より大きいことを説明しなさい。

(2) 円周率が3.05より大きいことを説明しなさい。

(3) 教科書巻末の三角比の表を用いて，円周率が3.14に近い数であることを説明しなさい。

(6) 文字をふる習慣を付けさせたい

問題番号	問題(正答)	正答率 (上位群／下位群)	無答率 (上位群／下位群)	主な誤答例 (誤答率)
H27 ［１］ (12)	右の図は，半径6cmの円Ｏである。中心Ｏからの距離が5cmである弦ＡＢの長さを求めなさい。($2\sqrt{11}$)  	67.7% (93.5%／37.3%)	2.9% (0.7%／3.9%)	$\sqrt{11}$ (7.2%), 6 (4.4%), $\sqrt{22}$ (2.7%), 5 (2.4%)
H27 ［６］	図のように，ＢＣ＝3cm，ＡＣ＝4cm，∠Ｃ＝90°である直角三角形ＡＢＣにおいて,次の問いに答えなさい。ただし,円周率はπとする。 (1) 辺ＡＣを軸として1回転してできる立体の体積を求めなさい。 (12π) (2) 辺ＡＢを軸として1回転してできる立体の体積を求めなさい。 $\left(\frac{48}{5}\pi\right)$  	(1) 78.7% (97.4%／60.8%) (2) 11.4% (27.5%／0.7%)	3.4% (0.0%／6.5%) 41.8% (20.9%／56.2%)	12 (5.0%), 36π (3.6%) 16π (5.5%), 12π (4.0%), 24π (1.8%), 36π (1.4%)

［１］(12)は三平方の定理についての定着を見る問題で，半径を図示していないにもかかわらず，約３分の２の生徒が正答を導き出した。また，最も多い誤答の$\sqrt{11}$はＡＢの中点までの長さを求めており，三平方の定理の利用はできていることが分かる。

［６］はＢＣを軸として回転させてしまった誤答16πが5.5%，(1)と同じ答えになるだろうと予想した誤答12πが4.0%あった。ＡＢを軸に回転させるということが考えにくい問題であった。

【今後の指導に向けて】

［１］(12)に関しては，ＡＢの中点をＭなどとおくことを徹底させたい。これによって，求めるものがはっきりし，ミスを減らすことができる。

文字を用いなかった誤答例

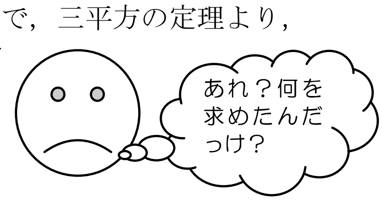
半径は６なので，三平方の定理より，

$\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

よって，

求める長さは，

$\sqrt{11}$



文字を用いた解答例

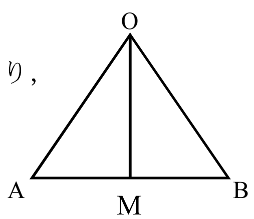
ＡＢの中点をＭとおくと，

ＯＡ＝6なので，三平方の定理より，

$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}$

$=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

よって，$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\sqrt{11}$



［６］(2)に関しては，ＣからＡＢに下ろした垂線の足をＨとおくと，相似・三平方の定理・面積などを用いてＣＨを求めればよいことに気が付くだろう。また，体積は

$\frac{\pi}{3}(\mathrm{CH})^2\mathrm{AH}+\frac{\pi}{3}(\mathrm{CH})^2\mathrm{HB}=\frac{\pi}{3}(\mathrm{CH})^2\mathrm{AB}$ となり，ＡＨやＨＢは求める必要がないことが分かる。