平　成　28　年　度
高等学校新入学生徒の学力に関する研究（数学）

本研究会では，愛知県高等学校数学研究会と共同で，参加を希望した県内の高等学校において，新入学生徒を対象にした学力調査及び在学生徒を対象にした学力検査を毎年実施し，結果の集計･分析･考察を行っている。

この研究は以下の内容で，本年度分についてまとめたものである。

(1) 調査の趣旨，調査の実施及び処理，調査結果の概要，分析結果の概要，調査問題の妥当性と信頼性（Ｓ－Ｐ表処理等による分析）

(2) テスト$\boxed{\text{A}}$，テスト$\boxed{\text{B}}$の結果とその考察

(3) 平成27年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

＜検索用キーワード＞
高等学校　中学校　学力調査　数学Ⅰ　数学Ⅱ　数学Ａ　正答率　誤答分析

研　究　会　委　員

愛知県立鳴海高等学校教諭　松川　木綿子
愛知県立春日井高等学校教諭　稲垣　憲
愛知県立津島東高等学校教諭　浦嶋　健司
愛知県立五条高等学校教諭　丹下　裕太
愛知県立半田高等学校教諭　竹内　拓也
愛知県立大府東高等学校教諭　田中　伸一
愛知県立三好高等学校教諭　臼杵　秀一
愛知県立岡崎北高等学校教諭　千田　圭太
愛知県立小坂井高等学校教諭　河合　謙二郎
愛知県立宝陵高等学校教諭　梅田　直樹
愛知県総合教育センター研究指導主事　髙石　幸信
愛知県総合教育センター研究指導主事　近藤　哲史（主務者）

目　　次

１　調査の趣旨

愛知県総合教育センターでは，愛知県高等学校数学研究会と共同で，昭和 30 年度以来，高等学校入学者数学学力調査を実施してきた。調査結果を分析・考察し，指導上の留意点を明らかにして，中高連携の立場からそれぞれの数学教育に有用な資料を提供することが目的である。また，本調査を継続して実施することにより新入学生徒の学力傾向の推移をつかむことができ，指導の参考とすることができる。

２　調査の実施及び処理

(1) 調査問題の構成

調査問題をテスト$\boxed{A}$，テスト$\boxed{B}$の２種類に分け，各々について次の立場で問題を作成した。調査時間はいずれも 50 分である。

テスト$\boxed{A}$　中学校学習指導要領に示された内容を出題基準とし，高等学校で数学を学習するのに必要と思われる基礎的・基本的な事項により問題を構成した。

テスト$\boxed{B}$　問題構成の立場はテスト$\boxed{A}$と同様であるが，基礎的・基本的な事項の問題に，より高度な思考力，洞察力を要する問題を加えて構成した。

(2) 調査の対象

県内の高等学校及び特別支援学校の高等部に今年度入学した生徒を対象として，調査を実施した。実施校（課程別資料提供校）の数はテスト$\boxed{A}$が 39 校，テスト$\boxed{B}$が 113 校であった。

(3) 調査の実施時期及び資料の回収

学校ごとに３月下旬から４月中旬までの間に調査を実施し，集計用紙（全員の度数分布と各標本の解答をそのまま一覧表に転記したもの）を４月 19 日までに回収した。

(4) 標本の抽出

テスト$\boxed{A}$では 273 名（抽出率 6.1%），テスト$\boxed{B}$では 1,518 名（抽出率 5.2%）を抽出して，問題別の正答率・無答率を算出し，主な誤答について分析した（テスト全体の平均点及び標準偏差は全員を対象にして算出した)。

なお，テスト$\boxed{A}$及びテスト$\boxed{B}$における後出の「上位群」,「下位群」は，それぞれのテストの合計得点が「平均点＋標準偏差」,「平均点－標準偏差」を中央値とした各１割で形成される標本群である。

３　調査結果の概要

(1) 人数・平均点・標準偏差（過去との比較）　表１

テスト／年度	テスト$\boxed{A}$			テスト$\boxed{B}$		
	平均	ＳＤ	人数	平均	ＳＤ	人数
H26	55.8	24.2	5,650	67.7	19.7	29,313
H27	53.6	26.5	5,001	57.2	20.5	29,281
H28	**56.5**	**25.1**	**4,506**	**52.9**	**24.2**	**29,201**

(2) 頻数分布（%）　表２

得　点	90～100	80～89	70～79	60～69	50～59	40～49	30～39	20～29	10～19	0～9
テスト$\boxed{A}$	8.6	13.7	11.6	16.6	10.9	13.6	7.3	8.4	4.6	4.7
テスト$\boxed{B}$	5.2	11.5	10.2	17.0	11.2	15.6	8.6	10.7	5.4	4.4

(3) 調査問題別平均点分布（校）

表3

平均点	90以上	85～90	80～85	75～80	70～75	65～70	60～65	55～60	50～55	45～50	40～45	35～40	30～35	25～30	20～25	20未満	計
テストA	0	0	1	4	5	4	1	3	5	5	4	2	1	2	2	0	39
テストB	0	3	3	4	8	10	8	7	14	7	8	12	7	9	11	2	113

4　分析結果の概要

(1) 数と式に関する問題に課題

毎年，基本問題を中心に数と式に関する問題をテストA，テストBともに出題している。その正答率を昨年度と比較してみると，テストAは上がっているが，テストBは 10 ポイント近く下がった（**表７**）。設問ごとに見てみると，テストBの［１］(1)及び［１］(2)は，正答率がそれぞれ 69.1%，41.7%で，他の問題と比較して上位群と下位群の正答率の差が小さいことが特徴として挙げられる。誤答を分析すると，計算を急ぐあまり，計算のプロセスを記述せずに解いていると思われる誤答が，下位群だけでなく上位群にも多く見られた。例えば，÷を×と間違えたり，括弧を付けなかったり，あるいは，括弧があると勘違いしたりしている。基本問題は解答のみを確認することが多く，計算のプロセスをきちんと見て指導することが少ない。生徒の間違えやすい問題の誤答例を提示して，間違いに気付かせるなど，計算のプロセスを正しく記述することを意識付ける指導が必要である。

また，テストBの［１］(8)及び［２］(4)は，正答率がそれぞれ 40%を切っている。この２問は数の性質（素因数分解，素数の意味，無理数の大きさ）を問う問題である。テストＢ［１］(8)は，「素数」の意味が理解できていないと思われる誤答例が多く見られた。数学Ａで整数の性質を扱うときには注意が必要である。また，テストＢ［２］(4)は，解の公式を利用して２次方程式は解けるが，その解である無理数の大きさについての理解ができていないことが分かった。高等学校では，無理数の大きさは，２次関数などさまざまな分野で扱われることが多いので，どれくらい知識を有しているか確認しながら指導することが大切である。

表４

テストB			
番号	概要	正答率	分野
［１］(1)	四則演算の基本計算	69.1%	①数と式
［１］(2)	分数式の基本計算	41.7%	①数と式
［１］(8)	数の性質（素因数分解，素数）に関する問題	32.8%	①数と式
［２］(4)	二次方程式の解の大きさ確認する問題	36.8%	①数と式

(2) 図形に関する問題に課題

テストA，テストBともに図形に関する問題の正答率が分野別で一番低かった。テストAの［１］(13)の平行四辺形の条件にもう一つ何を付け加えるとひし形になるかを問う選択形式の問題の正答率が44.0%，テストBの［６］(2)の三日月形の図形の面積を求める問題の正答率が21.7%であった。平行四辺形やひし形などの定義と，それぞれの図形のさまざまな性質とを結び付けて，より深い理解につなげる必要がある。また，テストBの［６］(2)はヒポクラテスの三日月と呼ばれる有名な問題である。曲線で囲まれた三日月の面積が直角三角形の面積に等しいという意外性があり，数学のよさを伝えるための問題としてぜひ生徒に紹介してほしい。

５　調査問題の妥当性と信頼性（Ｓ－Ｐ表処理等による分析）

平成 28 年度高等学校入学者数学学力調査A，Bについて，Ｓ－Ｐ表処理等を基にして差異係数，信頼性係数，内容別平均正答率，正答率帯別問題数，正答率，注意係数，ＵＬ指数，問題間の相関等を考察したところ，次のような結果を得た。なお，データは，テストAについては参加 39 校から 273 名，テストBについては 113 校から 1,518 名を抽出して作成した。

［１］　問題全体について

(1)　差異係数

表５

テスト　　年度	(1)差異係数 H26	H27	H28
テ　ス　ト A	0.226	0.306	**0.311**
テ　ス　ト B	0.298	0.228	**0.337**

差異係数とは，Ｓ，Ｐ両曲線のずれの程度を数量化したもので，生徒の理解と一連の学習内容がうまくかみ合っているかを見るものである。差異係数は０から１までの値をとり，0.5 より小さい値のとき生徒の理解と指導の密着性が高いとされている。簡単な確認テストのようなドリル演習型のテストではＳ曲線とＰ曲線の乖離(かいり)は小さく，差異係数は小さくなる。実力テストのような多面にわたる総合的な問題ではＳ曲線とＰ曲線は大きく乖離(かいり)して，差異係数は大きくなる。差異係数が 0.5 を超えたとき，指導内容に問題がなかったか，出題に問題がなかったか，学習者の理解やモチベーションは高かったかなどを検討する必要がある。今回のテストでは**表５**のように差異係数は小さいので，出題にとりわけ大きな問題はないと考えられる。

(2)　信頼性係数（ｸｰﾀﾞｰ・ﾘﾁｬｰﾄﾞｿﾝの公式 20 による）

表６

テスト　　年度	(2)信頼性係数 H26	H27	H28
テ　ス　ト A	0.908	0.922	**0.909**
テ　ス　ト B	0.876	0.873	**0.891**

信頼性係数とは，作成されたテスト問題が内容的に妥当で信頼できるものなのかを算出するものである。ここで言う信頼性とは，同一条件下で再度試験を実施しても同じ結果が出ると思われる安定性のことで，０から１までの値をとり，１に近いほど信頼性が高いとされている。今回のテストでは**表６**のように信頼性係数は高いので，信頼できる良好な問題であったことが分かる。

(3)　内容別平均正答率　（ ）内の数字は問題数

表７

内 容　　年度 ＼ テスト	テストA H26	H27	H28	テストB H26	H27	H28
①　数　と　式	70.7%(10)	66.5%(10)	**73.0%(11)**	85.9%(9)	67.6%(9)	**58.0%(11)**
②　図　　　形	43.0%(6)	46.1%(6)	**37.7%(6)**	55.5%(6)	55.8%(6)	**42.1%(6)**
③　関　　　数	37.4%(6)	35.2%(6)	**43.2%(6)**	52.4%(6)	40.2%(6)	**49.2%(6)**
④　資料の活用	52.4%(3)	45.1%(3)	**49.3%(2)**	74.0%(4)	60.3%(4)	**77.0%(2)**

(4)　正答率帯別問題数

表８

正答率　年度 ＼ テスト	テストA H26	H27	H28	テストB H26	H27	H28
0.851以上	1	0	**1**	6	4	**0**
0.667～0.850	8	9	**9**	12	9	**7**
0.333～0.666	9	11	**11**	4	5	**13**
0.150～0.332	6	5	**4**	2	5	**5**
0.149以下	1	0	**0**	2	2	**0**

(5)　全体の正答率との相関別問題数

表９

相関　年度 ＼ テスト	テストA H26	H27	H28	テストB H26	H27	H28
0.70以上	0	1	**0**	0	0	**0**
0.60～0.69	9	7	**11**	7	2	**6**
0.50～0.59	12	12	**5**	7	9	**10**
0.40～0.49	2	5	**6**	3	10	**6**
0.30～0.39	1	0	**2**	7	2	**3**
0.29以下	1	0	**1**	2	2	**0**

［２］ 検討を要する問題群

テストA，テストBの全ての問題について，正答率，注意係数，ＵＬ指数，相関係数を算出した。**表 10** は，四つの指標のうち一つでも基準値を満たさない問題を抽出し，基準を満たさない指標に注意マーク“×”を付け，正答率が基準を満たす“Ⅰ群”と，正答率が基準を満たさない“Ⅱ群”とに分け整理した表である。

②から④までの指標は，上位群と下位群の正答率の差が小さいときに注意マーク“×”が付きやすくなる。正答率が非常に高い問題（正答率 75%以上）と正答率が基準を満たさない（Ⅱ群）の場合，上位群と下位群の差が小さくなるので検討から除外した。

以上のことから，検討の対象とした問題は３問あり，**表 10** に※印で示した。

テストAの［１］(13)は，選択形式の問題であったので，たまたま正解してしまう者がいて上位群と下位群の差が小さくなったことが原因である。

テストBの［１］(1)及びテストBの［１］(2)は，下位群に比べて上位群の正答率の低さが目立つ。これについては，ｐ36 のテストBの考察で分析しているが，上位群の生徒が陥りやすいミスについて明らかにした問題であると言える。

（×印は該当項目について検討を要する数値であることを示す） **表 10**

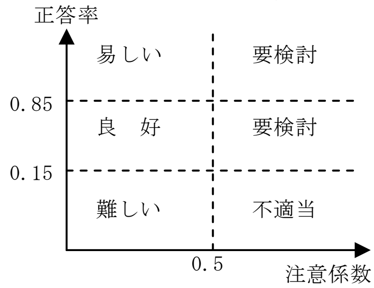
問題		指標 基準値	①正 答 率	②注意係数	③ＵＬ指数	④相関係数
			＞0.333	＜0.500	＞0.400	＞0.400
Ⅰ	テストA	［１］(1)	0.890	0.336	0.258 ×	0.366 ×
Ⅰ	テストA	［１］(10)	0.828	0.350	0.393 ×	0.443
Ⅰ	テストA	［１］(13)※	0.440	0.685 ×	0.312 ×	0.262 ×
Ⅰ	テストA	［２］(3)	0.795	0.525 ×	0.366 ×	0.344 ×
Ⅰ	テストB	［１］(1)※	0.691	0.558 ×	0.427	0.358 ×
Ⅰ	テストB	［１］(2)※	0.417	0.574 ×	0.432	0.347 ×
Ⅰ	テストB	［２］(1)	0.819	0.454	0.383 ×	0.391 ×
Ⅱ	テストB	［５］(2)	0.150 ×	0.280	0.376 ×	0.436

(各項目の説明)

①正 答 率：各問題の正答率を示す。

$$\frac{\text{正答者数}}{\text{受検者数}}$$

表 11



②注意係数：Ｓ－Ｐ表において，ある問題の正誤の状況と全ての問題の正誤の状況を比較して，その関係性を数値化したものである。0.5 より小さい方が適切な問題であるとされている。**表 11** に示すように平均正答率と併せて検討するとよい。

③ＵＬ指数：

$$\frac{\text{（上位 27\%の正答者数）－（下位 27\%の正答者数）}}{\text{（生徒 27\%の人数）}}$$

ＵＬ指数は上式で算出する。「上位 27%の正答者数が多く，下位 27%の正答者数が少ない」場合にＵＬ指数は大きくなるが，上位 27%の正答者数が少なく下位 27%の正答者数が多いという逆転現象の場合，ＵＬ指数は小さくなる。ＵＬ指数が 0.4 より大きい方が適切な問題であるとされている。

④相関係数：生徒の得点合計とその問題の正解との相関を示す。基準値を 0.4 として大きい方が適切な問題であるとされている。

平成28年度高等学校入学者数学学力テスト　A

愛知県高等学校数学研究会

答えは別紙の解答欄に記入しなさい。
実施時期によっては，問題用紙も回収します。

科	組	番	氏名
受検番号		番	

〔1〕 次の問いに答えなさい。

⑴ $30+12\div(-6)$ を計算しなさい。

⑵ $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{4}-1$ を計算しなさい。

⑶ $\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ を計算しなさい。

⑷ $-a^2+(-4a)^2$ を計算しなさい。

⑸ $(a+b)^2$ を展開しなさい。

⑹ x^2+x-12 を因数分解しなさい。

⑺ 連立方程式 $\begin{cases}2x+y=5\\3x-2y=4\end{cases}$ を解きなさい。

⑻ 二次方程式 $x^2+3x+1=0$ を解きなさい。

⑼ 1個60円のお菓子を何個か買って，100円の箱に入れてもらったところ，代金の合計が820円になった。

㋐ 買ったお菓子の個数を x 個として，方程式をつくりなさい。

㋑ x の値を求めなさい。

⑽ y は x に比例し，x と y の値が下の表のように対応する。□にあてはまる値を求めなさい。

x	…	-2	…	1	…	3	…
y	…	□	…	2	…	6	…

⑾ 次のア～オについて，y が x に比例するもの，y が x に反比例するもの，y が x の2乗に比例するものをそれぞれ1つずつ選び，かな符号で答えなさい。

ア　1辺の長さ x cm の立方体の体積 y cm³

イ　1本100円のボールペンを x 本買ったときの代金 y 円

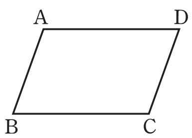
ウ　200ページの本を，x ページまで読んだときの残りのページ数 y ページ

エ　10Lのジュースを x 人で分けたとき，1人あたりのジュースの量 y L

オ　1辺の長さ x cm の正方形の面積 y cm²

⑿ 正八角形の内角の和を求めなさい。

⒀ 右の図の平行四辺形ABCDがひし形になるにはどのような条件を加えればよいか。次のア～エの中から正しいものを1つ選び，かな符号で答えなさい。



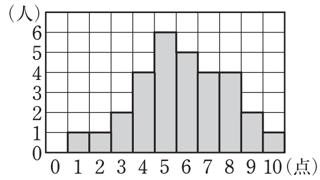
ア　∠A＝∠D　　イ　AC＝BD

ウ　AB＝AD　　エ　AB⊥BC

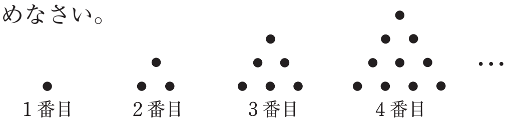
〔2〕 次の問いに答えなさい。

⑴ 大小2つのさいころを同時に投げるとき，出る目の数の積が5の倍数となる確率を求めなさい。

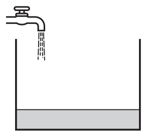
⑵ あるクラスの生徒30人に10点満点の小テストを実施した。図は，その結果をヒストグラムに表したものである。このクラスの得点の中央値を求めなさい。



⑶ 図のように石を規則的に並べていく。例えば4番目では石が10個必要である。このとき，10番目では石が何個必要か求めなさい。



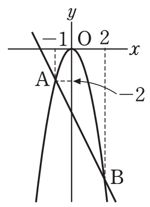
〔3〕 図のように，30Lはいる水そうがあり，最初に水が6Lはいっている。この水そうに，一定の割合で10分間水を入れる。入れはじめてから3分後の水そうの水の量は12Lであった。水を入れはじめてから，x 分後の水そうの水の量を y L とする。次の問いに答えなさい。



⑴ $0\leqq x\leqq 10$ のとき，y を x の式で表しなさい。

⑵ x と y の関係をグラフに表しなさい。

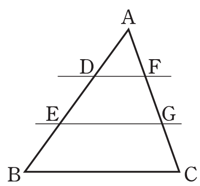
〔4〕 図のように，2点A，Bは関数 $y=-2x^2$ のグラフ上にあり，点Aの座標は$(-1,\ -2)$で，点Bの x 座標は2である。次の問いに答えなさい。



⑴ 点Bの y 座標を求めなさい。

⑵ 2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

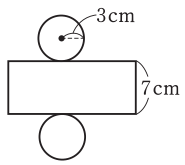
〔5〕 図のように，△ABCの辺ABを三等分する点をAに近い方からD，Eとし，それぞれの点を通り辺BCと平行な直線が辺ACと交わる点をF，Gとする。次の問いに答えなさい。



⑴ △ADFと△ABCの面積の比を求めなさい。

⑵ △ADFの面積が4cm²のとき，四角形EBCGの面積を求めなさい。

〔6〕 底面の半径が3cm，高さが7cmの円柱の展開図をかいたところ，図のようになった。この円柱について，次の問いに答えなさい。ただし，円周率は π とする。



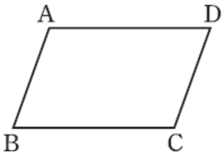
⑴ 円柱の表面積を求めなさい。

⑵ 円柱の体積を求めなさい。

平成 28 年度　テスト$\boxed{\text{A}}$

番号	配点	正　答	上位群 正答率 下位群		上位群 無答率 下位群		誤答率	主な誤答例 （標本全体に対する％）
[1](1)	4	28	89.0	96.3 85.2	0.0	0.0 0.0	11.0	-7(4.4)，-32(2.2)
(2)	4	$\frac{11}{12}$	76.2	85.2 70.4	2.2	0.0 7.4	21.6	$\frac{11}{6}$ (4.0)，$\frac{13}{12}-1$(1.5)，22(1.5)
(3)	4	$3+\sqrt{6}$	67.4	100 25.9	2.6	0.0 7.4	30.0	$3\sqrt{6}$(8.8)，$\sqrt{15}$(5.5)
(4)	4	$15a^2$	65.6	88.9 44.4	3.7	0.0 7.4	30.7	16(4.8)，$-5a^2$(4.4)
(5)	4	$a^2+2ab+b^2$	68.9	100 37.0	8.1	0.0 18.5	23.0	a^2+ab+b^2(5.5)， $(a+b)(a-b)$(3.3)
(6)	4	$(x+4)(x-3)$	69.2	96.3 37.0	15.0	0.0 25.9	15.8	$(x+3)(x-4)$(3.7)， 3，-4(2.9)
(7)	4	$x=2$，$y=1$	78.0	85.2 70.4	9.5	0.0 18.5	12.5	$x=6$，$y=-7$(2.2)， $x=2$，$y=3$(1.1)
(8)	4	$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	50.2	74.1 7.4	25.6	3.7 63.0	24.2	$\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$(2.6)，$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$(2.2)
(9)	4	ア　$60x+100=820$	80.6	100 63.0	11.0	0.0 29.6	8.4	$y=60x+100$(1.1)
	4	イ　$x=12$	78.8	96.3 55.6	11.4	0.0 29.6	9.8	120(4.0)，9(1.5)
(10)	4	-4	82.8	92.6 74.1	3.3	0.0 11.1	13.9	4(4.0)，-1(3.2)
(11)	4	比例　イ	63.0	85.2 37.0	3.3	0.0 14.8	33.7	ア(8.8)，オ(5.5)
		反比例　エ	50.2	85.2 22.2	3.3	0.0 14.8	46.5	ウ(18.3)，ア(7.7)
		2乗に比例　オ	61.2	85.2 40.7	4.4	0.0 14.8	34.4	ア(16.5)，イ(5.1)
(12)	4	1080	49.1	81.5 14.8	9.2	0.0 33.3	41.7	720(6.2)，135(5.1)
(13)	4	ウ	44.0	48.1 33.3	1.1	0.0 3.7	54.9	イ(40.3)，エ(8.1)
[2](1)	4	$\frac{11}{36}$	47.3	77.8 14.8	11.4	0.0 18.5	41.3	$\frac{1}{6}$(7.7)，$\frac{1}{3}$(7.0)
(2)	4	6	51.3	85.2 29.6	9.5	0.0 14.8	39.2	5(25.6)，5.5(4.4)，4(2.9)
(3)	4	55	79.5	88.9 74.1	3.3	0.0 7.4	17.2	54(2.6)，45(1.5)，60(1.1)
[3](1)	4	$y=2x+6$	27.1	55.6 0.0	33.7	3.7 74.1	39.2	$2x$(5.5)，$4x$(4.8)
(2)	4	y 切片が 6 で(3,12)を通る直線	46.2	70.4 18.5	27.1	3.7 63.0	26.7	ア(8.4)，カ(5.5)，オ(5.1)
[4](1)	4	-8	50.5	88.9 7.4	19.0	0.0 40.7	30.5	8(7.0)，6(2.6)，(2，-8)(2.6)
(2)	4	$y=-2x-4$	28.2	74.1 0.0	38.8	0.0 77.8	33.0	$-2x^2$(1.1)，$2x$(1.1)
[5](1)	4	1:9	35.9	59.3 0.0	9.9	3.7 22.2	54.2	1:3(35.2)，3:1(4.8)
(2)	4	20　cm^2	33.0	59.3 18.5	21.2	7.4 48.1	45.8	12(12.8)，16(8.4)
[6](1)	4	60π　cm^2	22.7	51.9 3.7	23.8	7.4 40.7	53.5	63π(6.2)，21(4.4)
(2)	4	63π　cm^3	41.4	85.2 11.1	26.0	0.0 51.9	32.6	42π(4.0)，63(2.9)

図形の性質を理解させたい

問題 番号	問題（正答）	正答率 （上位群／下位群）	主な誤答例 (標本全体に対する%)
［１］ (13)	右の図の平行四辺形ＡＢＣＤが ひし形になるにはどのような条件 を加えればよいか。次のア～エの 中から正しいものを１つ選び， かな符号で答えなさい。  ア　∠Ａ＝∠Ｄ　　イ　ＡＣ＝ＢＤ ウ　ＡＢ＝ＡＤ　　エ　ＡＢ⊥ＢＣ　　（ウ）	44.0% (48.1%／33.3%)	イ　(40.3%)， エ　(8.1%)， ア　(6.6%)

「イ」と解答している割合が 40.3%あり，これは正答率 44.0%とほとんど変わらない。ひし形は「長さが等しい」というイメージで「イ」または「ウ」を選択している。しかし，「イ」の「ＡＣ＝ＢＤ」は対角線の長さが等しいということを表しており，これは長方形の性質であり，ひし形の性質ではないということが理解できていない。

【今後の指導に向けて】

四角形の定義及び性質を確認し，表や図で示すことにより，四角形の相互関係を視覚的に理解することができる。また，集合を考えることによって，必要十分条件であるかどうかを確認させることができる。

①　定義及び性質の確認

平行四辺形，長方形，ひし形，正方形は次のように定義される。

「２組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形を，平行四辺形という」

「４つの角がすべて等しい四角形を，長方形という」

「４つの辺がすべて等しい四角形を，ひし形という」

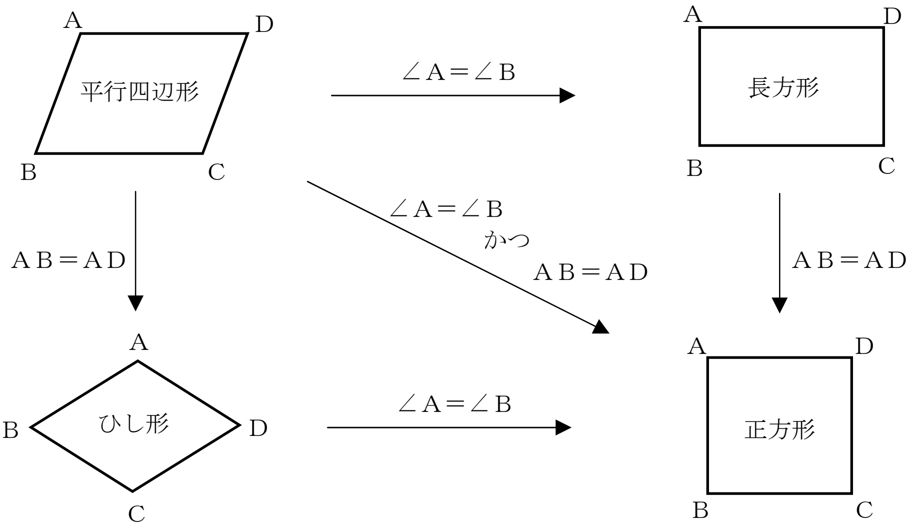
「４つの角がすべて等しく，４つの辺がすべて等しい四角形を，正方形という」

そして，これらの四角形の定義及び性質を表にまとめると次のようになる。

（◎：定義　○：性質）

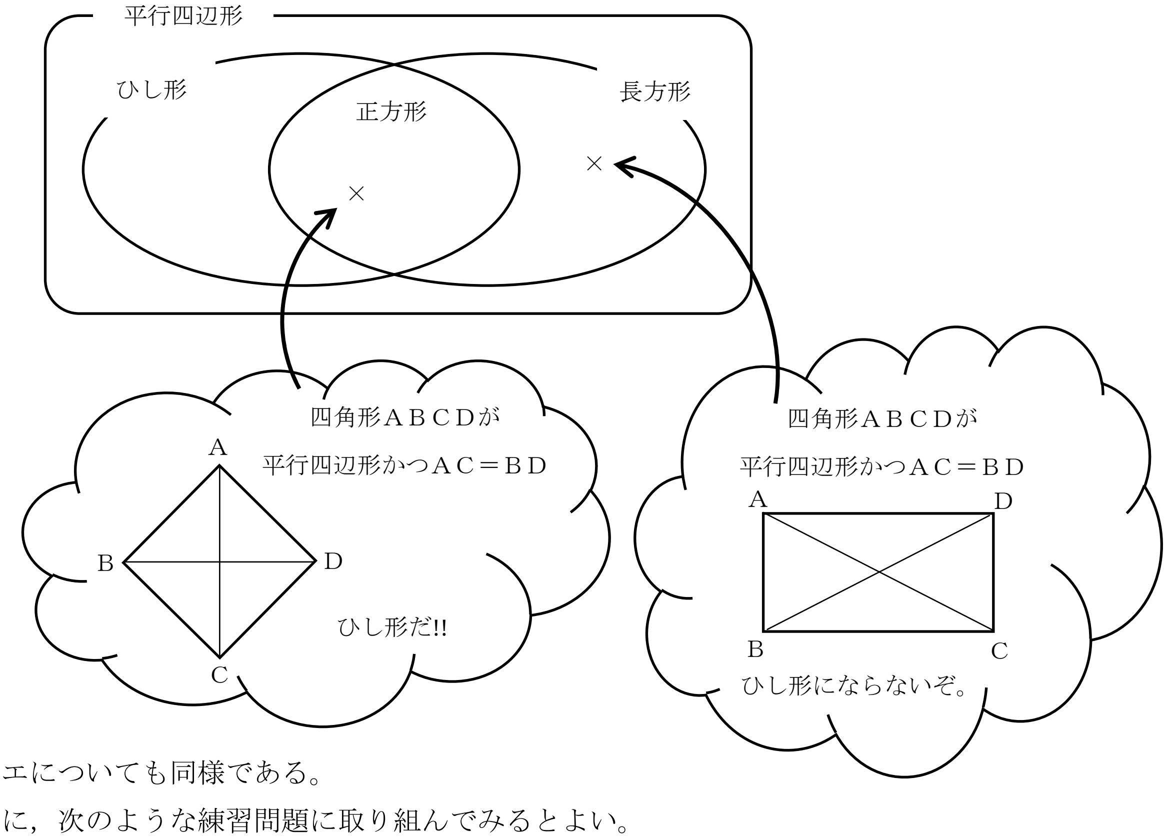
	定義及び性質	平行四辺形	長方形	ひし形	正方形
角	２組の向かい合う角がそれぞれ等しい	○	○	○	○
	４つの角がすべて等しい		◎		◎
辺	２組の向かい合う辺がそれぞれ平行である	◎	○	○	○
	２組の向かい合う辺がそれぞれ等しい	○	○	○	○
	４つの辺がすべて等しい			◎	◎
対角線	対角線がそれぞれの中点で交わる	○	○	○	○
	対角線の長さが等しい		○		○
	対角線が垂直に交わる			○	○

それぞれの四角形において，角の性質と辺の性質により，以下のような相互関係を考えることができる。



②　必要十分条件であるかどうかの確認

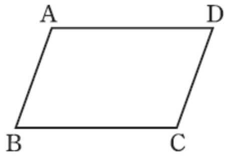
平行四辺形ABCDに選択肢イ「AC＝BD」を加えると，四角形ABCDは長方形であると言えるが，ひし形であるとは言えない。よって，選択肢イは不適である。



選択肢ア，エについても同様である。

確認のために，次のような練習問題に取り組んでみるとよい。

右の図の平行四辺形ABCDに
次の条件が加わると，どのような
四角形になるか答えよ。
（1）　∠A＝∠D
（2）　AC＝BD
（3）　AB＝AD
（4）　AB⊥BC



平成28年度高等学校入学者数学学力テスト　B

愛知県高等学校数学研究会

答えは別紙の解答欄に記入しなさい。
実施時期によっては，問題用紙も回収します。

科	組	番	氏	
受検番号		番	名	

〔1〕 次の問いに答えなさい。

(1) $-5^2+8\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ を計算しなさい。

(2) $\dfrac{11x-5y}{6}-2x+y$ を簡単にしなさい。

(3) 連立方程式 $\begin{cases}\dfrac{2x+y}{3}-\dfrac{x-y}{5}=1\\5x+4y=3\end{cases}$ を解きなさい。

(4) $16x^3y-9xy^3$ を因数分解しなさい。

(5) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}-(1-\sqrt{3})^2$ を計算しなさい。

(6) ある数に1を加えてから2乗し，さらに，その数を5倍したら，もとの数の2倍を2乗した数より11だけ小さくなった。

(ア) もとの数を x として，方程式をつくりなさい。

(イ) x の値を求めなさい。

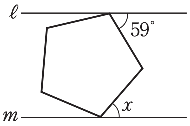
(7) $x=\sqrt{2}+1$，$y=\sqrt{2}-1$ のとき，$x^2+2xy+y^2$ の値を求めなさい。

(8) $\dfrac{2016}{n}$ が整数となるような，素数 n をすべて求めなさい。

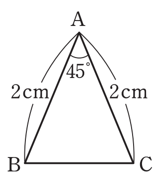
(9) 2点 $(-2,\ 1)$，$(8,\ p)$ を通る直線の傾きを p を用いて表しなさい。

(10) 2つの関数 $y=2x+6$ と $y=kx^2$ について，x の変域がともに $-3\leqq x\leqq a$ のとき，y の変域は $0\leqq y\leqq 18$ で一致する。このとき，a と k の値を求めなさい。

(11) 右の図のように，正五角形と $\ell /\!/ m$ の2直線がある。$\angle x$ の大きさを求めなさい。

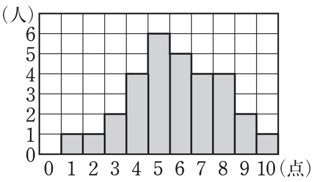


(12) 右の図は，AB＝AC＝2cm，∠A＝45°の二等辺三角形である。この三角形の面積を求めなさい。



〔2〕 次の問いに答えなさい。

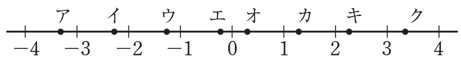
(1) あるクラスの生徒30人に10点満点の小テストを実施した。図は，その結果をヒストグラムに表したものである。このクラスの得点の中央値を求めなさい。



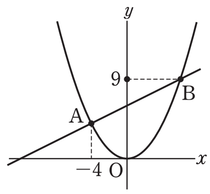
(2) 大小2つのさいころを同時に投げ，大きいさいころの出た目の数をa，小さいさいころの出た目の数を b とする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ が整数となる確率を求めなさい。

(3) $\dfrac{26}{111}$ を小数で表したとき，小数第30位の数を答えなさい。

(4) 数直線上の8つの点ア～クのうち，二次方程式 $x^2+2x-4=0$ の解を表しているものをすべて選び，そのかな符号を答えなさい。



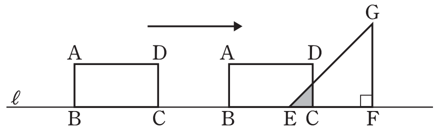
〔3〕 図のように，関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフ上に2点A，Bがある。点Aの x 座標は -4 であり，点Bの x 座標は正で，y 座標は9である。点Oを原点とするとき，次の問いに答えなさい。



(1) 2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

(2) 原点Oを通り，直線ABに平行な直線と，点Aを通り，直線OBに平行な直線との交点をCとする。点Cの座標を求めなさい。

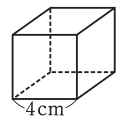
〔4〕 図のように，AB＝4cm，BC＝8cm の長方形ABCDと，EF＝8cm，FG＝8cm，∠F＝90°である直角二等辺三角形EFGがある。長方形ABCDは，直線 ℓ にそって矢印の向きに毎秒1cmの速さで動いていく。点Cが点Eの位置にきたときから x 秒後の2つの図形が重なった部分の面積を $y\text{cm}^2$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) $0\leqq x\leqq 4$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。

(2) $4\leqq x\leqq 8$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。

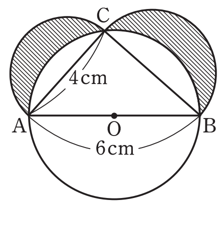
〔5〕 図のように，1辺の長さが4cmの立方体の箱がある。次の問いに答えなさい。ただし，円周率は π とする。



(1) この箱にぴったりはいる球の体積を求めなさい。

(2) この箱がぴったりはいる球の体積を求めなさい。

〔6〕 図のように，AB＝6cm を直径とする円Oの円周上に，AC＝4cm となるような点Cをとる。△ABCと重ならないように，辺AC，BCを直径とする半円をかいたとき，次の問いに答えなさい。



(1) △ABCの面積を求めなさい。

(2) 斜線部分の面積を求めなさい。

平成 28 年度　テスト $\boxed{\text{B}}$

番号	配点	正答	正答率	正答率 上位群	正答率 下位群	無答率	無答率 上位群	無答率 下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［１］(1)	4	7	69.1	84.8	55.6	0.0	0.0	0.0	30.9	－23(14.2)，57(5.1)
(2)	4	$\frac{-x+y}{6}$	41.7	49.7	24.5	0.1	0.0	0.0	58.2	$\frac{-x-11y}{6}$(32.1)，$-x+y$ (9.7)，$\frac{-x+11y}{6}$(1.6)
(3)	4	$x=-3$，$y=\frac{9}{2}$	58.6	78.1	43.0	4.4	0.0	8.6	37.0	$x=3$，$y=-3$(13.4)，$x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{4}{3}$(4.5)
(4)	4	$xy(4x+3y)(4x-3y)$	76.4	99.3	56.3	5.4	0.0	11.3	18.2	$xy(16x^2-9y^2)$(6.1)，$xy(4x-3y)^2$(1.1)
(5)	4	$4\sqrt{3}-4$	62.2	79.5	35.8	1.4	0.0	3.3	36.4	2(5.9)，－4(5.6)，4(4.3)
(6)	4	ア $5(x+1)^2=(2x)^2-11$	65.5	91.4	30.5	4.7	0.0	7.3	29.8	$5(x+1)^2=2x^2-11$ (12.6)，$5(x+1)^2=(2x)^2+11$(4.5)
	4	イ $x=-8$，-2	53.2	86.1	17.2	13.4	1.3	27.2	33.4	$\frac{-5\pm\sqrt{23}}{3}$(7.3)，$-5\pm\sqrt{31}$(4.2)
(7)	4	8	78.7	95.4	59.6	3.0	0.0	4.0	18.3	4(3.0)，6(2.2)，2(1.7)
(8)	4	$n=2$，3，7	32.8	47.0	19.9	11.9	1.3	21.2	55.3	1，2，3，7(8.6)，1，3，7(3.7)，2，3(3.4)
(9)	4	$\frac{p-1}{10}$	49.4	79.5	9.3	17.5	1.3	41.7	33.1	$\frac{1+p}{10}$(3.6)，$\frac{1-p}{10}$ (2.6)，$\frac{p}{10}$
(10)	4	$a=6$，$k=\frac{1}{2}$	57.0	86.8	20.5	16.7	1.3	37.7	26.3	$a=6$，$k=2$ (5.4)，$a=0$，$k=2$ (2.5)
(11)	4	$\angle x=49$ 度	69.4	87.4	37.7	1.8	0.7	4.0	28.8	59(15.0)，54(1.4)，13(1.3)
(12)	4	$\sqrt{2}$ cm²	30.1	57.0	3.3	30.2	18.5	47.0	39.7	$\sqrt{3}$(7.7)，2(6.0)，$2\sqrt{2}$(2.6)
［２］(1)	4	6	81.9	93.4	64.9	1.0	0.0	1.3	17.1	5(9.9)，5.5(3.2)
(2)	4	$\frac{7}{18}$	72.1	88.1	62.3	2.4	0.0	3.3	25.5	$\frac{13}{36}$(6.6)，$\frac{1}{4}$(2.6)，$\frac{5}{12}$(2.4)
(3)	4	4	63.4	86.1	55.0	8.0	3.3	9.9	28.6	3(8.3)，2(5.7)，0(2.2)
(4)	4	ア，カ	36.8	62.9	7.3	8.3	2.0	20.5	54.9	イ，キ(8.6)，ウ，カ(7.6)ウ，エ(3.4)，ア，ク(3.4)
［３］(1)	4	$y=\frac{1}{2}x+6$	73.9	96.7	41.1	7.9	0.0	17.9	18.2	$y=2x+12$(1.0)
(2)	4	$(-10,\ -5)$	43.6	86.1	2.6	24.8	1.3	53.6	31.6	$\left(-9,\ -\frac{9}{2}\right)$(2.1)，$\left(-5,\ -\frac{5}{2}\right)$
［４］(1)	4	$y=\frac{1}{2}x^2$	48.8	76.8	9.3	19.1	0.7	48.3	32.1	$y=2x$(13.0)，$y=\frac{1}{2}x$(2.9)
(2)	4	$y=4x-8$	22.4	46.4	0.0	30.8	7.3	66.9	46.8	$y=4x+8$(7.3)，$y=4x$(4.7)
［５］(1)	4	$\frac{32}{3}\pi$ cm³	56.7	84.8	18.5	9.2	0.7	20.5	34.1	$\frac{256}{3}\pi$(5.1)，$\frac{16}{3}\pi$(3.2)
(2)	4	$32\sqrt{3}\ \pi$ cm³	15.0	28.5	0.0	27.0	9.3	49.7	58.0	$\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$(11.3)，$\frac{256}{3}\pi$(5.7)
［６］(1)	4	$4\sqrt{5}$ cm²	59.9	89.4	23.8	9.9	0.0	23.8	30.2	9(6.5)，12(2.9)，10(2.4)
(2)	4	$4\sqrt{5}$ cm²	21.7	39.1	1.3	41.2	14.6	76.2	37.1	$\frac{15}{2}\pi+4\sqrt{5}$(1.2)，$-\frac{9}{2}\pi+4\sqrt{5}$

(1) 計算のプロセスを大事にさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H27［１］(3)	$\dfrac{9x-5}{6}-\dfrac{x+3}{2}$ を簡単にしなさい。 $\left(\dfrac{3x-7}{3}\right)$	63.1%（89.5%／35.3%）	$\dfrac{6x-14}{6}$ （13.1%）， $\dfrac{3x+2}{3}$ （ 4.0%）
H28［１］(2)	$\dfrac{11x-5y}{6}-2x+y$ を簡単にしなさい。 $\left(\dfrac{-x+y}{6}\right)$	41.7%（49.7%／24.5%）	$\dfrac{-x-11y}{6}$ （32.1%）， $-x+y$ （ 9.7%）

H27 年度と比較して，正答率が 20 ポイント以上低かった。また，上位群の正答率が５割を下回っている。主な誤答例から， $\dfrac{11x-5y}{6}-\dfrac{12x+6y}{6}$ というように誤って式変形をしてしまっていることが読み取れる。このように，「$2x+y$ を一つの固まりとして捉え，（　）があるときと同様の計算を行ってしまった」ことで，正答率が低かったと考えられる。

また，H28［１］(6)では，文章題から立式する問題を出題した。

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H28［１］(6)	ある数に１を加えてから２乗し，さらに，その数を５倍したら，もとの数の２倍を２乗した数より 11 だけ小さくなった。 （ア）　もとの数を x として，方程式をつくりなさい。 $(5(x+1)^2=(2x)^2-11)$	65.5%（91.4%／30.5%）	$5(x+1)^2=2x^2-11$ （12.6%）， $5(x+1)^2=(2x)^2+11$ （ 4.5%）， $5(x+1)^2=2x^2+11$ （ 3.5%）

主な誤答例では，「もとの数の２倍を２乗した数」という問題文から，「$2x^2$」と表現してしまっているものが 16%程度ある。しかし，そのような誤答の中には，(ｲ)の「 x の値を求めなさい」という問題には正答しているものもある。つまり，（　）がない状態であっても，「$2x^2$」を「$(2x)^2$」と見なして解答している生徒がいることが分かる。

【今後の指導に向けて】

（　）に関する計算や表現でつまずく生徒が多いという点は大きな課題であり，これは「計算のプロセスを大事にしない」ことが大きな原因である。板書によって解答を見せる場合にも「プロセスをきちんと見せる」ことが重要である。次のような指導法によって，生徒に「計算のプロセスの大切さ」に気付かせたい。

①　誤答を提示し，何が違うか答えさせる

$5(x+1)^2=2x^2-11$ $5(x^2+2x+1)=2x^2-11$ $5x^2+10x+5=4x^2-11$ $x^2+10x+16=0$ $(x+8)(x+2)=0$ $x=-8,\ -2$	発問　左の解答には，間違いがあります。 どこが，間違っているのでしょうか。 ➡計算のプロセスのどこが違うのか？？ ➡（　）のある　or　ない　に気付く！

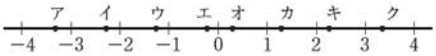
②　座席が隣同士の生徒と解答をチェックし合うペア学習

生徒は自分一人では，「この程度の解答でよいだろう」と考えてしまいがちである。他の人に見てもらうことで，「誰にでも伝わる」より確実な解答を書こうと意識する。グループで行うと授業時間が多くとられてしまうが，座席が隣同士でのペア学習ならば短時間で行うことができ，自らの解答を確実に記述することへの意識が高まると考える。

③　書画カメラを利用した学習

生徒が他の人の解答に触れる機会は多くない。他人の誤答や正答を直接見ることで，計算のプロセスの大切さに気付かせたい。生徒に板書させる方法もあるが，時間がかかってしまう。そこで，生徒がノートに記述した解答を書画カメラで撮影し，プロジェクタで投影する。このことで，短時間で誤答箇所や採点者の視点を説明することができる。

(2) 数の大きさへの理解を深めさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例(標本全体に対する%)
H27［1］(5)	二次方程式 $x^2+2x-4=0$ を解きなさい。 （$x=-1\pm\sqrt{5}$）	71.0%（94.8%／47.1%）	$\pm\sqrt{5}$ （3.6%）， $-1\pm2\sqrt{5}$ （1.8%）
H28［2］(4)	数直線上の８つの点ア～クのうち，二次方程式 $x^2+2x-4=0$ の解を表しているものをすべて選び，そのかな符号を答えなさい。 （ア，カ） 	36.8%（62.9%／7.3%）	イ，キ （8.6%）， ウ，カ （7.6%）， ウ，エ （3.4%）， ア，ク （3.4%）

H27年度まで，解の公式を利用して解く二次方程式の問題を出題していたが，H28年度は無理数の大きさを判断することを加え出題した。「イ，キ」と選択した割合が8.6%であり，H27年度では$\pm\sqrt{5}$と解答した割合は3.6%である。無理数の大きさを判断することができなかった生徒が「イ，キ」の誤答の中に存在していると考えられる。また，H27年度の二次方程式で無答率が2.3%であるのに対し，この問題では無答率が8.3%と6ポイント上昇している。問題が複合的になることで，何をしてよいのか分からなくなる生徒がいることが推測できる。

H27年度標準学力検査の数学Ｉ基本の［１］(4) では，以下の問題が出題された。

$\left|\sqrt{3}-2\right| = \boxed{}$ である。　（$2-\sqrt{3}$）　正答率 15.4%

$\sqrt{3}-2$ と解答している割合が 13.3%，$\sqrt{3}+2$ と解答している割合が 11.8%であった。$\sqrt{3}$ の大きさや $\sqrt{3}-2$ で一つの数であることへの理解が不足している生徒がいることが，この結果からも分かる。

【今後の指導に向けて】

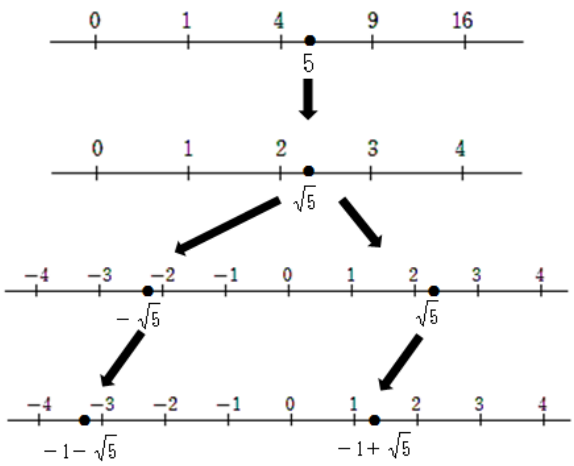
高校の段階では，数直線を利用し指導することが多い。苦手な生徒には，単純に数直線を利用し考えさせるだけでなく，下に示したように数を２乗した数直線を利用する方法も考えられる。

①　数の２乗の数直線を考える。

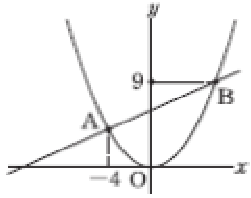
②　元の数で考える。

③　±をつけて考える。

④　最後に−1を加える。



(3) 平面座標と図形の関係をきちんと理解させたい

<table>
<tr><th>問題
番号</th><th colspan="3">問題（正答）</th></tr>
<tr><td rowspan="4">H28
［3］</td><td colspan="3">図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に２点A，Bがある。点Aの x 座標は－４であり，点Bの x 座標は正で，y 座標は９である。点Oを原点とするとき，次の問いに答えなさい。
(1)　２点A，Bを通る直線の式を求めなさい。　$\left(y=\frac{1}{2}x+6\right)$
(2)　原点Oを通り，直線ABに平行な直線と，点Aを通り，直線OBに平行な直線との交点をCとする。点Cの座標を求めなさい。　（－10，－5）

</td></tr>
<tr><td>正答率
（上位群／下位群）</td><td>無答率
（上位群／下位群）</td><td>主な誤答例 (標本全体に対する%)</td></tr>
<tr><td>(1)　73.9%
(96.7%／41.1%)</td><td>(1)　7.9%
(0.0%／17.9%)</td><td>$y=2x+12$（1.0%），$y=\frac{1}{2}x+2$（0.7%）</td></tr>
<tr><td>(2)　43.6%
(86.1%／2.6%)</td><td>(2)　24.8%
(1.3%／53.6%)</td><td>$\left(-9,\ -\frac{9}{2}\right)$（2.1%），$\left(-5,\ -\frac{5}{2}\right)$（1.3%），（－8，－4）（1.2%）</td></tr>
</table>

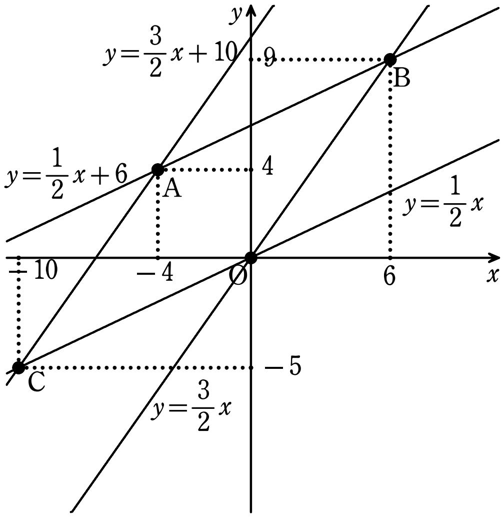
(2)は誤答例のどれもが直線 $y=\frac{1}{2}x$ 上の点であることから，求めるべき２直線の式のうち比較的容易なこちらの式は求められたものの，もう一方の $y=\frac{3}{2}x+10$ を正しく求められなかったと考えられる。なお，この問題はH28年度に出題したテスト $\boxed{\text{B}}$ の中で上位群と下位群の正答率の差が最も大きかったものであり，理解度に関し両者に大きな開きがあることを示している。

【今後の指導に向けて】

(2)の一般的な解法は，２直線の方程式を連立して点Cの座標を求めるというものである（代数的アプローチ）。また，四角形OBACが平行四辺形になることを利用して解くこともできる（幾何的アプローチ）。

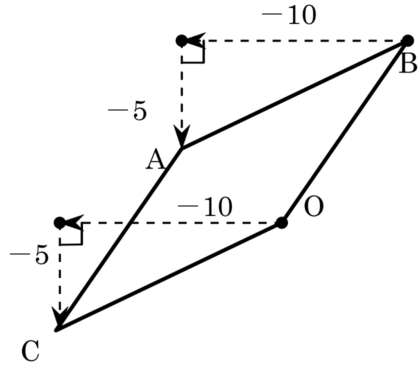
代数的アプローチ

$y=\frac{1}{2}x$ と $y=\frac{3}{2}x+10$ を連立して，点Cの座標を求める。



幾何的アプローチ

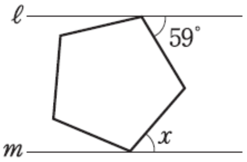
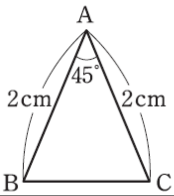
四角形OBACが平行四辺形であることを利用して，点Cの座標を求める。



四角形OBACは平行四辺形なので，BからAまでの移動方法とOからCまでの移動方法は，ともに x 軸方向に－10，y 軸方向に－５である。

図形的な特徴を捉えて解けば（幾何的アプローチ），比較的簡単に答えを導くことができる。よって機械的に連立方程式に持ち込んで解かせるだけでなく，グラフをかき，傾きや切片などを視覚的に理解させたい。特に下位群の生徒には複雑な計算をしなくてもよいということ，図形的に考察することで傾きの意味や２直線の平行の性質などを理解しやすくなるということを強調して指導したい。

(4) 補助線を引いたり，分割したりして多角的に図形を捉えさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H28 ［１］ (11)	右の図のように，正五角形と $l \parallel m$ の２直線がある。$\angle x$ の大きさを求めなさい。 （49°） 	69.4% （87.4%／37.7%）	59° （15.0%）， 54° （ 1.4%）， 13° （ 1.3%）， 46° （ 1.1%）
H28 ［１］ (12)	右の図は，ＡＢ＝ＡＣ＝2cm，∠Ａ＝45° の二等辺三角形である。この三角形の面積を求めなさい。 （$\sqrt{2}$） 	30.1% （57.0%／3.3%）	$\sqrt{3}$ （7.7%）， 2 （6.0%）， $2\sqrt{2}$ （2.6%）， 4 （2.6%）

H28［１］(11)では補助線を引き角度を求める問題を出題した。主な誤答例は 59° であるが，これは補助線を引かずに見た目で判断したか，平行な２直線における錯角の位置関係と勘違いしたのではないかと考えられる。

また，H28［１］(12)では頂角が 45° の二等辺三角形の面積を求める問題を出題した。H27 年度に半径５㎝の円に内接する正八角形の面積を求める問題を出題したところ，正答率は 7.8%であった。この問題は正八角形を８個の二等辺三角形に分割して解く問題で，H27 年度のテスト$\boxed{\text{B}}$の全問題中最も正答率が低かった。H28［１］(12)は，正八角形を８個に分割した二等辺三角形の１個の面積を求める問題で，正答率は 30.1%とH27 年度よりも上昇したが，H28 年度の［１］の中で正答率が最も低かった。このことから，補助線を引いて必要な値を求めることができていないということが分かる。

【今後の指導に向けて】

高校数学では三角比やベクトルを学ぶので，補助線を引いて問題を解くことは少ない。しかし，チェバの定理やメネラウスの定理などの証明をする際には，補助線を引いて考えることが有用である。また，多角形を幾つかの三角形に分けて面積を求める問題などもある。平行線や垂線に着目して補助線を引くことで，問題を簡潔にしたり，図を分割したりすることができるように指導したい。そのために授業や課題学習などにおいて各自で補助線を引く機会をつくりたい。

［補助線を利用したメネラウスの定理の証明①］

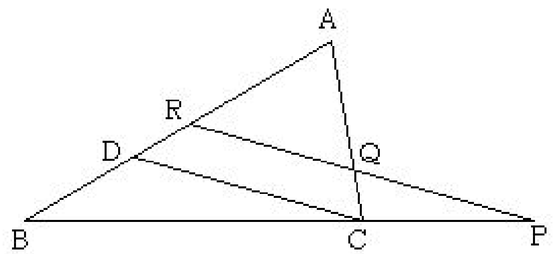
$\boxed{\text{証明}}$ 点Ｃを通り直線ＰＲに平行な直線を引き，その直線と辺ＡＢとの交点をＤとする。

ＰＲ∥ＣＤ より $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{BR}{RD}$

ＱＲ∥ＣＤ より $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{DR}{RA}$

よって

$\dfrac{BP}{PC}\times\dfrac{CQ}{QA}\times\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{BR}{RD}\times\dfrac{DR}{RA}\times\dfrac{AR}{RB}=1$ $\boxed{\text{終}}$



［補助線を利用したメネラウスの定理の証明②］

$\boxed{証明}$　点Ａを通り直線ＢＰに平行な直線を引き，その直線と直線ＰＲとの交点をＤとする。

△ＲＡＤ∽△ＲＢＰであるから

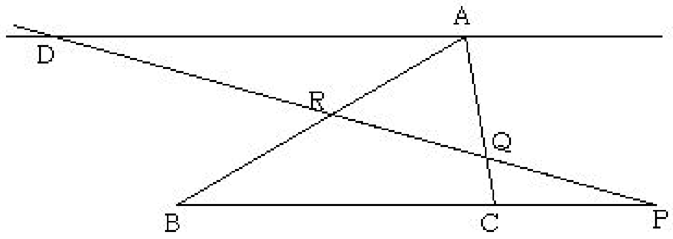
$$\frac{RA}{RB}=\frac{AD}{BP}$$

△ＱＣＰ∽△ＱＡＤであるから

$$\frac{QC}{QA}=\frac{CP}{AD}$$

よって

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{BP}{PC}\times\frac{CP}{AD}\times\frac{AD}{BP}=1$$ $\boxed{終}$



［補助線を利用したメネラウスの定理の証明③］

$\boxed{証明}$　直線ＰＲに対して点Ａ，Ｂ，Ｃから垂線を引き，その足をそれぞれＤ，Ｅ，Ｆとする。

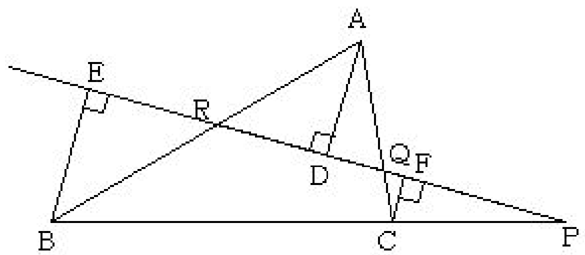
△ＲＡＤ∽△ＲＢＥであるから　$\frac{RA}{RB}=\frac{AD}{BE}$

ＢＥ // ＣＦ　より　$\frac{BP}{PC}=\frac{BE}{CF}$

△ＱＣＦ∽△ＱＡＤであるから　$\frac{QC}{QA}=\frac{CF}{AD}$

よって

$$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{BE}{CF}\times\frac{CF}{AD}\times\frac{AD}{BE}=1$$ $\boxed{終}$



［補助線を利用した正弦の加法定理の証明］

$\boxed{証明}$　まず，△ＡＢＣが鋭角三角形であるときを考える。

$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$ とする。また，点Ｃから辺ＡＢに下ろした垂線の足をＤとする。さらに，△ＡＢＣの外接円の半径をRとする。

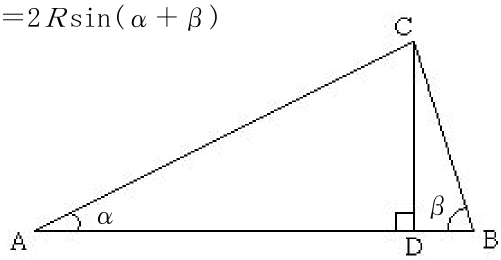
正弦定理より　$\frac{AB}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}=2R$　　よって　$AB=2R\sin(\alpha+\beta)$

さらに　$\frac{AC}{\sin\beta}=2R$　　よって　$AC=2R\sin\beta$

ゆえに　$AD=AC\cos\alpha=2R\sin\beta\cos\alpha$

同様に　$\frac{BC}{\sin\alpha}=2R$　　よって　$BC=2R\sin\alpha$

ゆえに　$BD=BC\cos\beta=2R\sin\alpha\cos\beta$



$AB=AD+BD$ より　$2R\sin(\alpha+\beta)=2R\sin\beta\cos\alpha+2R\sin\alpha\cos\beta$

両辺を$2R$で割ると　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

また，△ＡＢＣが直角三角形のときや鈍角三角形であるときも同様に証明することができる。　$\boxed{終}$

付　平成 27 年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

１　検査の趣旨

当センターでは昭和 51 年から毎年，高等学校数学標準学力検査を実施してきた。今回も次の二つのねらいの下に学力検査を実施し，検査結果を分析・考察して，指導上の留意点を明らかにした。なお，過去の検査結果については，当該年度の当センター研究紀要別冊に掲載している。

(1) 入学者数学学力調査により把握した新入生の学力実態が，その後の高等学校での学習指導を通してどのように変容しているかを調べる。

(2) 基本事項についての理解と定着の程度を調査し，高等学校での指導に役立てる。

２　検査の実施及び処理

(1) 検査問題の種類と問題の構成

検査問題は，数学Ⅰ基本，数学Ⅰ＋Ａ，数学Ⅱの３種類である。どの検査問題も学習指導要領に示された内容を出題の基準とした。検査時間はいずれも 50 分である。

数学Ⅰ基本：　基本的な計算力，基礎事項の定着度を調べる問題を中心に構成した。

数学Ⅰ＋Ａ：　数学Ⅰ基本より高度の思考力・洞察力を要する数学Ⅰの問題に加え，数学Ａの内容も併せて構成した。

数学Ⅱ　　：　問題［１］は基本問題，問題［２］，［３］，［４］は標準問題である。

(2) 調査の対象と方法

各科目の授業が終了した学年を対象に，学校ごとに２月１日から３月 31 日までの間に適宜実施した。集計のための標本は各学校とも課程別，類型別に各々２学級分とし，集計用紙（２学級分の得点度数分布と，その 10％の抽出者の解答をそのまま転記したもの）を４月 19 日までに回収した。

３　検査結果の概要

(1) 標本数・平均点・標準偏差　　表 12

テスト／項目	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
標本数	1,877	7,698	8,339
平均点	40.3	47.6	38.5
標準偏差	23.3	25.9	27.6

(2) 得点分布（％）　　表 13

テスト／得点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
90 ～100	2.2	5.9	5.0
80 ～ 89	4.4	8.5	5.8
70 ～ 79	7.0	9.8	6.7
60 ～ 69	8.5	10.0	8.0
50 ～ 59	11.1	11.6	8.6
40 ～ 49	13.5	12.3	9.3
30 ～ 39	15.2	13.1	10.7
20 ～ 29	16.8	11.7	12.5
10 ～ 19	13.8	10.5	16.3
0 ～ 9	7.5	6.5	17.1

(3) 調査問題別平均点分布（校）　　表 14

テスト／平均点	数学Ⅰ基本	数学Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
80以上		2	2
75～80未満		7	4
70 ～ 75		5	4
65 ～ 70	1	6	7
60 ～ 65	3	11	5
55 ～ 60	1	5	12
50 ～ 55	3	13	8
45 ～ 50		10	10
40 ～ 45	5	6	9
35 ～ 40	4	8	11
30 ～ 35	6	14	12
25 ～ 30	5	14	12
20 ～ 25	5	5	16
15 ～ 20	1	3	7
15未満	2	3	27
計	36	112	146

4　数学Ⅰ（基本）の問題，結果及びその考察

平成２７年度　高等学校標準学力検査問題

数　学　Ⅰ　基　本

学年　組　番　氏名

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数，式または記号を解答欄に記入せよ。

［１］　次の各問いに答えよ。

(1) $(-2x^2)^3 = \boxed{}$ である。

(2) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ を展開すると $\boxed{}$ である。

(3) $3x^2-20x+12$ を因数分解すると $(x-\boxed{ア})(3x-\boxed{イ})$ である。

(4) $\left|\sqrt{3}-2\right| = \boxed{}$ である。

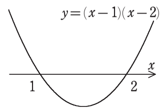
(5) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) = \boxed{ア}$ であり，

$\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$ の分母を有理化すると $\boxed{イ}$ である。

(6) １次不等式 $5x+7 \geqq 2x-5$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(7) ２次方程式 $x^2+3x+1=0$ を解くと $x=\boxed{}$ である。

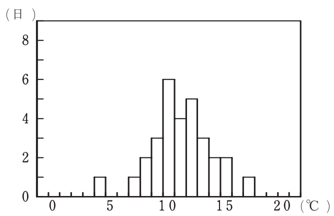
(8) ２次不等式 $(x-1)(x-2)<0$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。

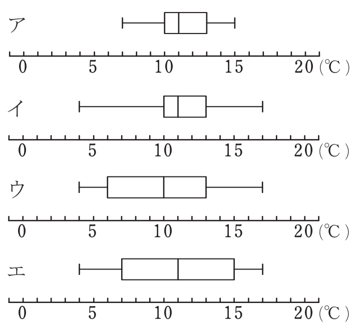


(9) 集合 $A=\{1, 7, 9\}$，$B=\{1, 3, 7\}$ について，集合 $A \cap B = \boxed{\{\quad\}}$ である。

(10) 命題「$x=2$ ならば $x^2=4$」の対偶は「$\boxed{ア}$ ならば $\boxed{イ}$」である。

(11) 下の図は１日の平均気温 30 日分のヒストグラムである。対応する箱ひげ図は，右のア～エのうち $\boxed{}$ である。





(1)	
(2)	
(3)	ア　｜　イ
(4)	
(5)	ア
	イ
(6)	
(7)	
(8)	
(9)	{　　}
(10)	ア　｜　イ
(11)	

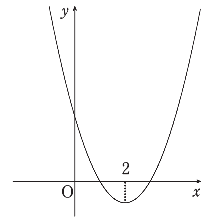
［２］　次の各問いに答えよ。

(1) x の２次方程式 $x^2+3x+m=0$ の判別式を D とすると，$D=\boxed{ア}$ だから，

２次関数 $y=x^2+3x+m$ のグラフと x 軸がただ１つの共有点を持つような m の値は $m=\boxed{イ}$ である。

(2) 図は２次関数 $y=(x-2)^2-1$ のグラフである。

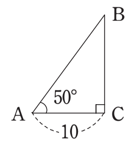
この関数の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値は $\boxed{ア}$，最小値は $\boxed{イ}$ である。



(1)	ア
	イ
(2)	ア
	イ

［３］　次の各問いに答えよ。

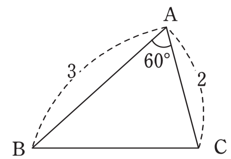
(1) $\sin 50^\circ = 0.77$，$\cos 50^\circ = 0.64$，$\tan 50^\circ = 1.19$ とする。図の直角三角形ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの長さは $\boxed{}$ である。



(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，

$\theta = \boxed{}$ である。

(3) 図の△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの長さは $\boxed{ア}$ である。また，△ＡＢＣの面積は $\boxed{イ}$ である。



(1)	
(2)	
(3)	ア
	イ

平成 27 年度　数学Ⅰ基本

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1](1)	5	$-8x^6$	62.7	81.5	37.0	2.9	0.0	3.7	34.4	$-8x^8$ (11.1)，$8x^6$ (3.2)
(2)	5	x^4-1	56.3	85.2	18.5	13.6	0.0	25.9	30.1	x^2-1 (2.5)，$(x^2-1)(x^2+1)$ (2.2)
(3)	5	ア　6	58.1	88.9	33.3	17.2	0.0	33.3	24.7	(ア，イ)の順で (−6，−2)(5.4)，(10，2)(4.3)
		イ　2	61.3	85.2	40.7	17.2	0.0	29.6	21.5	
(4)	5	$2-\sqrt{3}$	15.4	14.8	0.0	25.8	7.4	48.1	58.8	$\sqrt{3}-2$ (13.3)，$\sqrt{3}+2$ (11.8)
(5)	5	ア　4	73.1	100	59.3	9.3	0.0	18.5	17.6	6(2.9)，5−1(2.5)
	5	イ　$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	38.7	85.2	0.0	8.6	0.0	18.5	52.7	$\frac{\sqrt{5}}{6}$ (25.1)，$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (5.0)，$\frac{\sqrt{5}+1}{6}$ (3.6)
(6)	5	$x \geqq -4$	43.7	81.5	7.4	19.4	11.1	37.0	36.9	−4(8.6)，$x \leqq -4$ (7.2)，$x \geqq 4$ (2.9)
(7)	5	$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$	47.7	96.3	11.1	23.7	0.0	59.3	28.6	2(1.8)，$-\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (1.4)
(8)	5	$1<x<2$	42.3	70.4	7.4	23.7	3.7	44.4	34.0	$1 \leqq x \leqq 2$ (6.1)，$x=1，2$ (3.9)
(9)	5	{1, 7}	71.7	77.8	63.0	6.1	0.0	7.4	22.2	{1, 3, 7, 9}(7.9)，{3, 9}(5.0)，{7}(2.9)
(10)	5	ア　$x^2 \neq 4$	22.6	40.7	3.7	15.4	0.0	25.9	62.0	$x^2=4$ ならば $x=2$ (46.2)，$x=-2$ ならば $x^2=4$ (1.4)
		イ　$x \neq 2$	22.2	40.7	3.7	14.3	0.0	25.9	63.5	
(11)	5	イ	32.6	44.4	29.6	4.7	0.0	7.4	62.7	エ(33.0)，ウ(25.4)，ア(3.6)
[2](1)	5	ア　$9-4m$	19.7	37.0	3.7	35.8	7.4	63.0	44.5	0(4.7)，b^2-4ac (4.3)
	5	イ　$\frac{9}{4}$	18.6	51.9	3.7	39.8	11.1	63.0	41.6	3(5.4)，0(4.7)，2(3.6)
(2)	5	ア　8	33.7	66.7	18.5	14.3	0.0	33.3	52.0	3(19.0)，なし(11.1)
	5	イ　−1	52.3	74.1	40.7	14.3	0.0	33.3	33.4	0(14.7)，2(4.3)，8(1.8)
[3](1)	5	11.9	28.7	55.6	7.4	39.8	22.2	59.3	31.5	15(5.4)，12(4.3)，6.4(2.9)
(2)	5	30°，150°	28.3	37.0	7.4	13.6	3.7	22.2	58.1	30° (18.6)，30°，120° (17.2)
(3)	5	ア　$\sqrt{7}$	20.1	33.3	0.0	30.5	18.5	44.4	49.4	4(6.8)，3(5.7)，7(5.4)
	5	イ　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	24.4	48.1	0.0	40.5	22.2	55.6	35.1	3(4.3)，$\frac{3}{2}$ (2.2)，$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (1.8)

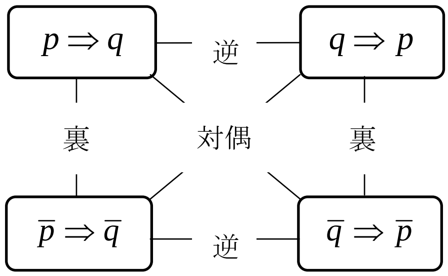
逆・裏・対偶の違いについて理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	無答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H27 ［１］ (10)	命題「 $x=2$ ならば $x^2=4$ 」の対偶は 「 ア ならば イ 」である。 （ア $x^2\neq4$，イ $x\neq2$ ）	ア　22.6% (40.7%／ 3.7%) イ　22.2% (40.7%／ 3.7%)	ア　15.4% (0.0%／25.9%) イ　14.3% (0.0%／25.9%)	$x^2=4$ ならば $x=2$ (46.2%)， $x=-2$ ならば $x^2=4$ (1.4%)

平成 24 年度の学習指導要領の改訂で数学Ａから数学Ｉに指導内容が変更された集合と命題の分野から，ある命題の対偶を答える問題を初めて出題した。ア，イともに正答であったのは 22.2%で，無答であったのは 14.3%であった。最も多かった誤答の割合が正答の割合より 20 ポイント以上高くなっていることから，逆と対偶の違いを理解していないことが分かる。

【指導上の留意点】

逆に関しては，中学２年生のときに学習している。また，生徒は言葉からなんとなく順番を入れ替えればよいと気付く。しかし，裏や対偶に関しては言葉から何を表しているのか分からないため,今回のように対偶のみ問われると逆と勘違いしてしまう。



指導する際は図を使って，命題とその逆・裏・対偶の関係を説明するだけではなく，生徒に身近な例を示すなど丁寧に逆・裏・対偶を指導していかなければならない。

例１：命題「容疑者Ａが犯人ならば，犯行時刻に犯行現場にいた」（真）
逆「犯行時刻に犯行現場にいたならば，容疑者Ａは犯人である」（偽）
（たまたま犯行時刻に犯行現場にいただけかもしれないから）
裏「容疑者Ａが犯人でないならば，犯行時刻に犯行現場にいない」（偽）
（犯人でなくても，犯行時刻に犯行現場にいたかもしれないから）
対偶「犯行時刻に犯行現場にいなければ，容疑者Ａは犯人ではない」（真）

また，日常生活で逆という言葉は否定の意味を表すこともあるので，その点も注意して指導していかなければならない。

そして，逆・裏・対偶を学習した後にも，例えば，背理法の内容で対偶を復習するなど，繰り返し学習することで定着させていく必要がある。

例２：背理法の内容で対偶を復習する。

『アリバイは背理法を使っている』

① 容疑者Ａが犯人であると仮定する。
② 犯人であるならば，犯行時刻に犯行現場にいたはずである。
③ 容疑者Ａが犯行時刻に，犯行現場から遠く離れた場所にいたことが証明された。
④ 犯行時刻に２箇所にいたことになり，矛盾する。
⑤ 容疑者Ａは犯人ではないと結論が得られる。

『アリバイは対偶も使っている』

容疑者Ａが犯人ではないことを証明するために，例１の命題の対偶が真であることに基づいて，犯行時刻に犯行現場にいなかったことを証明できれば，容疑者Ａが犯人でないことが証明できる。

平成２７年度　高等学校標準学力検査問題

数　　学　　Ⅰ＋A

□　学年　□　組　□　番　氏名　□

次の □ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［1］　次の各問いに答えよ。

(1) $(x-y)^2-x+y$ を因数分解すると □ である。

(2) ２次方程式 $3x^2-2x-1=0$ の解は $x=$ □ である。

(3) 不等式 $5x-6 \leqq x+1 < 2x$ を満たす x の値の範囲は □ である。

(4) ２次関数 $y=x^2-6x+a$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わるとき，定数 a の値の範囲は □ である。

(5) 放物線 $y=2(x-1)^2+1$ を原点に関して対称移動させたグラフを表す放物線の方程式は $y=$ □ である。

(6) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において，$\tan\theta=2$ のとき，$\cos\theta=$ □ である。

(7) △ＡＢＣにおいて，$\angle A=30^\circ$，外接円の半径が２のとき，辺ＢＣの長さは □ である。

(8) 次のデータは，生徒５人の小テストの得点である。

４，６，４，９，７

分散を求めると，□ である。

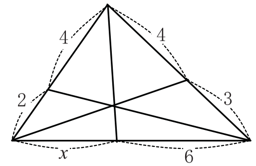
(9) 2016 の正の約数は □ 個である。

(10) 10 人の中から，部長，副部長，会計を１人ずつ合計３人を選ぶとき，その選び方は □ 通りである。

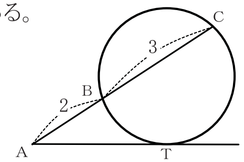
(11) ７個の数字 １，２，３，４，５，６，７から異なる３個の数字を並べてできる３桁の奇数は □ 個である。

(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	
(7)	
(8)	
(9)	
(10)	
(11)	

(12) 図において，x の値は □ である。



(13) 図の直線ＡＴは円の接線である。ＡＢ＝2，ＢＣ＝3 のとき，ＡＴ＝ □ である。



(12)	
(13)	

［2］　２次関数 $y=x^2-2x+3$ $(-2 \leqq x \leqq a)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) $a=0$ のとき，y の最小値は □ である。

(2) $a>1$ のとき，y の最小値は □ である。

(1)	
(2)	

［3］　辺の長さがＡＢ＝4，ＢＣ＝3，ＣＡ＝2 の△ＡＢＣにおいて，∠Ａの二等分線が辺ＢＣと交わる点をＤとするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 線分ＢＤの長さは □ である。

(2) $\cos B$ の値は □ である。

(3) 線分ＡＤの長さは □ である。

(1)	
(2)	
(3)	

［4］　Ａ，Ｂ２つのチームがバレーボールの試合を行う。先に３セットを取ったチームを勝利とし，Ａチームが１つのセットを取る確率は $\dfrac{2}{3}$ とする。次の各問いに答えよ。

(1) 第３セット目でＡチームが勝利する確率は □ である。

(2) 第５セット目でＡチームが勝利する確率は □ である。

(1)	
(2)	

番号	配点	正答	正答率	上位群 正答率 下位群	無答率	上位群 無答率 下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1](1)	5	$(x-y)(x-y-1)$	41.3	82.5 9.3	19.1	4.1 24.7	39.6	$x^2-2xy+y^2-x+y$ (16.2), $-(x-y)^3$ (2.8)
(2)	5	$-\frac{1}{3}$, 1	70.6	83.5 58.8	2.1	0.0 3.1	27.3	$(3x+1)(x-1)$ (8.5), 1 (2.8)
(3)	5	$1<x\leqq\frac{7}{4}$	60.2	91.8 25.8	10.3	0.0 17.5	29.5	$5x-7\leqq x<2x-1$ (5.7), $x\leqq\frac{7}{4}$ (1.5)
(4)	5	$a<9$	45.4	82.5 2.1	24.3	1.0 56.7	30.3	$a>9$ (5.6), $a\leqq9$ (2.8), $a=9$ (1.5)
(5)	5	$-2(x+1)^2-1$	32.6	59.8 12.4	16.7	2.1 30.9	50.7	$2(x+1)^2-1$ (11.7), $-2(x-1)^2-1$ (8.0)
(6)	5	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	37.2	61.9 13.4	12.3	0.0 32.0	50.5	$\frac{1}{2}$ (7.2), $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (6.3), $\frac{1}{3}$ (3.5)
(7)	5	2	46.9	79.4 13.4	18.8	1.0 35.1	34.3	4 (7.6), 8 (4.9), 1 (4.1)
(8)	5	$\frac{18}{5}$	23.0	36.1 11.3	13.3	8.2 18.6	63.7	6 (15.2), 5 (13.2), 18 (5.6)
(9)	5	36	37.4	72.2 11.3	14.9	2.1 23.7	47.7	8 (3.2), 1008 (2.6), 23 (2.5)
(10)	5	720	43.9	58.8 19.6	2.6	0.0 5.2	53.5	120 (41.5), 30 (1.0)
(11)	5	120	39.2	58.8 10.3	7.7	2.1 10.3	53.1	210 (8.4), 35 (6.3), 60 (4.2)
(12)	5	4	72.6	93.8 50.5	5.1	0.0 11.3	22.3	3 (8.4), $\frac{36}{7}$ (4.6), 5 (1.9)
(13)	5	$\sqrt{10}$	45.2	81.4 11.3	9.3	4.1 21.6	45.5	3 (10.2), $\sqrt{6}$ (9.2), 4 (3.7)
[2](1)	5	3	74.5	95.9 50.5	10.3	0.0 19.6	15.2	2 (5.4), 0 (1.5), 1 (1.4)
(2)	5	2	54.9	90.7 16.5	17.4	0.0 37.1	27.7	3 (10.8), 0 (2.5), a^2-2a+3 (2.1)
[3](1)	5	2	63.1	93.8 22.7	13.3	0.0 30.9	23.6	1.5 (14.3), 1 (2.4)
(2)	5	$\frac{7}{8}$	46.6	83.5 8.2	21.0	1.0 42.3	32.4	$\frac{3}{4}$ (7.5), $\frac{1}{2}$ (6.5)
(3)	5	$\sqrt{6}$	26.0	57.7 0.0	30.9	5.2 59.8	43.1	3 (6.3), $2\sqrt{3}$ (4.7), 2 (4.1)
[4](1)	5	$\frac{8}{27}$	69.4	90.7 52.6	9.3	0.0 9.3	21.3	$\frac{2}{3}$ (4.7), $\frac{1}{3}$ (2.1), $\frac{2}{9}$ (2.1)
(2)	5	$\frac{16}{81}$	19.8	45.4 0.0	14.9	0.0 25.8	65.3	$\frac{8}{243}$ (20.9), $\frac{32}{243}$ (7.1), $\frac{80}{243}$ (6.5)

(1)　２次関数のグラフと x 軸の位置関係を考えるときに判別式を使う理由を理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群） 無答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H27 ［１］ (4)	２次関数 $y=x^2-6x+a$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わるとき，定数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。 （$a<9$）	45.4% (82.5%／2.1%) 24.3% (1.0%／56.7%)	$a>9$　(5.6%), $a\leqq 9$　(2.8%), $a=9$　(1.5%)

下位群は上位群に比べて，正答率が非常に低く，無答率も非常に高い。逆に上位群の数値を見ると，８割近くの正答率であることから，上位群にはある程度の定着をしている。したがって，下位群への定着に重点をおくことが必要であると考える。

また，今回取り上げた問題に関しては，判別式を利用せず平方完成し，頂点の y 座標に着目して解くことも可能である。H27 年度の数学Ⅰ基本においては，判別式に関する問題を出題している。

問題番号	問題（正答）	正答率 無答率
H27 Ⅰ基本 ［２］ (1)	x の２次方程式 $x^2+3x+m=0$ の判別式を D とすると，$D=$ $\boxed{\text{ア}}$ だから，２次関数 $y=x^2+3x+m$ のグラフと x 軸がただ１つの共有点を持つような m の値は $m=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。 （ア $9-4m$，イ $\frac{9}{4}$）	正答率 ア 19.7%　イ 18.6% 無答率 ア 35.8%　イ 39.8%

この問題に関して，アは不正解だがイは正解である生徒が全体の 4.7%いた。この中には平方完成を利用して解いている生徒もいると考えられる。しかし，今回の数学Ⅰ＋Ａ［１］(4)のように x の係数が偶数であれば平方完成しやすいが，奇数になると平方完成を利用することが困難になる。

以上のことを踏まえると，下位群の生徒にとって，解の個数や共有点の個数を求める際の計算に関しては，判別式を活用できるように指導することが必要と考える。

【指導上の留意点】

この問題を解くに当たっては，上記のように２とおりの解法が考えられるが，今回は下位群への判別式の定着ということに関して指導上の留意点を述べる。

下位群の多くの生徒は，今回の問題を，２次方程式 $x^2-6x+a=0$ …※ の判別式を使って範囲を求めればよいという判断ができていない。すなわち，※の方程式を解けば，グラフと x 軸の共有点の x 座標が求められることを理解していない。この要因としては以下の２点の理解が不足しているからだと考えられる。

> ①　x 軸は方程式 $y=0$ で表されること。
> ②　判別式と解の公式の関連性，及び判別式で何が判別できるかということ。

以上２点の理解を深めるためには，中学校の復習も含めて授業を展開していくとよい。

「①　x 軸は方程式 $y=0$ で表されること」の理解を深める。

> 例１　１次関数 $y=3x+4$ のグラフと x 軸との共有点の座標を求めなさい。
>
> （解答）　x 軸は方程式 $y=0$ で表されるので，連立方程式 $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=0 \end{cases}$ を解けばよい。
>
> $3x+4=0$ より $x=-\frac{4}{3}$　　　よって $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

> 例２　２次関数 $y=x^2-4x+2$ のグラフと x 軸との共有点の座標を求めなさい。
>
> （解答）　x 軸は方程式 $y=0$ で表されるので，連立方程式 $\begin{cases} y=x^2-4x+2 \\ y=0 \end{cases}$ を解けばよい。

$x^2-4x+2=0$　より　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$　よって（$2+\sqrt{2}$，0），（$2-\sqrt{2}$，0）

「②　判別式と解の公式の関連性，及び判別式で何が判別できるかということ」の理解を深める。

例３　次の２次方程式の解を，解の公式を用いて求めなさい。

(1) $x^2-4x+2=0$　　(2)　$x^2-4x+4=0$　　(3) $x^2-4x+6=0$

（解答）(1)　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

(2)　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{0}}{2}=2$

(3)　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-8}}{2}$ より実数解なし

例４　例３の２次方程式の実数解の個数を調べる方法を考えなさい。

（解答）　(1)２個　(2)１個　(3)０個となる理由は『$\sqrt{\ }$ の中身』が正か負か０かで決まる。

このように誘導しながら，判別式 $D=b^2-4ac$ は解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の『$\sqrt{\ }$ の中身』であることを再認識させることが大切である。①，②の理解を深めた上で，以下のような問題を解くとよい。

例５　２次関数 $y=x^2-4x+2$ のグラフと x 軸との共有点の個数を求めなさい。

（解答）　x 軸は方程式 $y=0$ で表されるので，

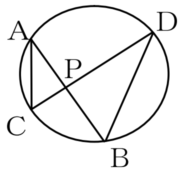
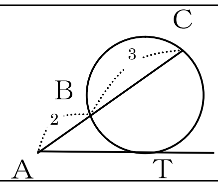
連立方程式 $\begin{cases} y=x^2-4x+2 \\ y=0 \end{cases}$ の実数解の個数を求めればよい。

２次方程式 $x^2-4x+2=0$ の判別式を D とすると，

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot2=16-8=8>0$ よって $x^2-4x+2=0$ は実数解を２個もつので，

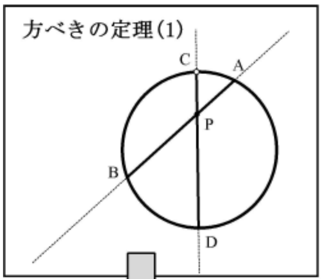
２次関数 $y=x^2-4x+2$ のグラフと x 軸との共有点の個数は２個である。

(2) 方べきの定理の使い方・考え方を理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H26［1］(13)	図のように，円周上の点A，B，C，Dについて，線分ABと線分CDは点Pで交わっている。PA＝3，PC＝2，PD＝8 のとき，PB＝□ である。$\left(\dfrac{16}{3}\right)$ 	66.8%（93.5%／46.2%）	3（4.8%），$\dfrac{3}{4}$（4.6%），12（4.3%）
H27［1］(13)	図の直線ATは円の接線である。AB＝2，BC＝3のとき，AT＝□ である。（$\sqrt{10}$） 	45.2%（81.4%／11.3%）	3（10.2%），$\sqrt{6}$（9.2%），4（3.7%）

方べきの定理は，円と交わる（接する）２直線について，「２直線の交点と，２直線と円との交点（接点）に関する定理」である。H27年度の問題はH26年度と比較すると，正答率が21.6ポイント下がっている。主な誤答例から判断すると，方べきの定理の式（AB・AC＝AT^2）に与えられた長さを単純に当てはめて計算した結果，$\sqrt{6}$ などの値を答えていると予想できる。方べきの定理は，相似な三角形の辺の比を利用した線分の対応関係を表しているという根本的な意味を理解していない生徒がいることが分かる。

【指導上の留意点】

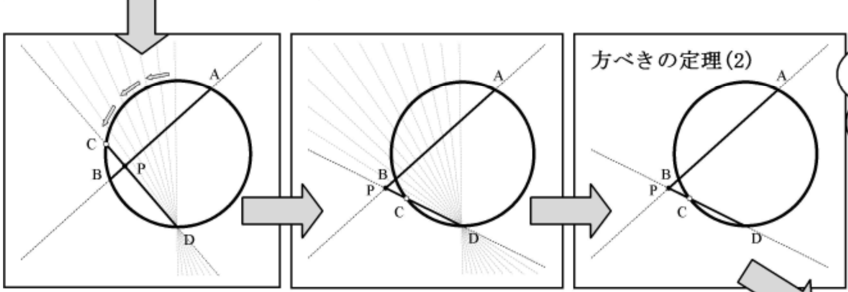


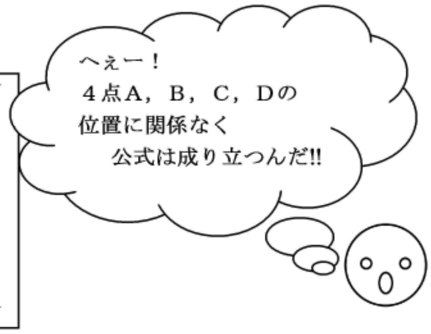
方べきの定理を視覚的に理解するため，グラフ作成ソフト等を用いて，図のように準備する。（例　ＧＲＡＰＥＳにて作成，下の手順参照）

①同一円周上に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを用意する。

②直線ＡＢ，直線ＣＤを用意する。③２直線の交点をＰとする。

３点Ａ，Ｂ，Ｄを固定し，Ｃを反時計回りにＤに近づけると下図のように変化する。

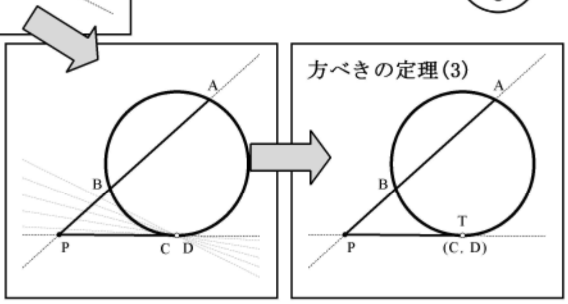




図の方べきの定理(1)(2)(3)は，△ＰＡＣ∽△ＰＤＢであることから，同一視することができ，

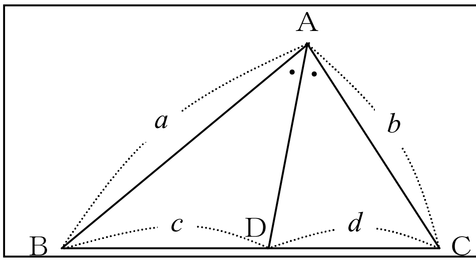
ＰＡ・ＰＢ＝ＰＣ・ＰＤ

が得られる。なお，(3)においては，Ｃ，ＤをＴと見なすことにより，ＰＡ・ＰＢ＝ＰＴ^2 を得る。



また，方べきの定理を使う際には，２直線の交点Ｐを強調し，常に交点Ｐからの長さを考えることを理解させたい。

◎コラム◎　～角の二等分線に関する公式～

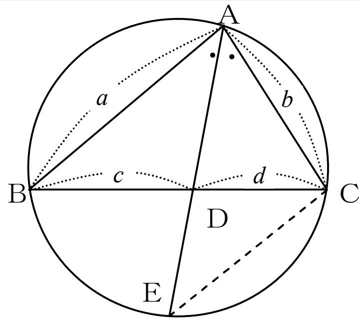


線分ＡＤを∠Ａの二等分線とする。
長さ a，b，c，d を左図のように定めるとき，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{ab-cd}$$

が成り立つ。

証明　△ＡＢＣの外接円と直線ＡＤとの交点のうち，Ａでない点をＥとする。
方べきの定理より　ＤＡ・ＤＥ＝ＤＢ・ＤＣ
ＡＤ・（ＡＥ－ＡＤ）＝ＢＤ・ＣＤ　　ＡＤ・ＡＥ－ＡＤ^2＝ＢＤ・ＣＤ　…①
円周角の定理より，∠ＡＢＣ＝∠ＡＥＣ
よって，△ＡＢＤ∽△ＡＥＣ　より
ＡＢ：ＡＥ＝ＡＤ：ＡＣ　　　　ＡＤ・ＡＥ＝ＡＢ・ＡＣ　…②
①，②より，ＡＤ^2＝ＡＢ・ＡＣ－ＢＤ・ＣＤ
すなわち　ＡＤ＝$\sqrt{ab-cd}$　終



この公式は以下の問題において活用できる。

問題番号	問題（正答）
H27 ［３］	辺の長さがＡＢ＝4，ＢＣ＝3，ＣＡ＝2 の△ＡＢＣにおいて，∠Ａの二等分線が辺ＢＣと交わる点をＤとするとき，次の各問いに答えよ。 (1) 線分ＢＤの長さは □ である。(2)　　(2) $\cos B$ の値は □ である。$\left(\dfrac{7}{8}\right)$ (3) 線分ＡＤの長さは □ である。($\sqrt{6}$)

(1)は角の二等分線の性質（数学Ａ），(2)(3)は余弦定理（数学Ⅰ）を利用する問題であるが，(3)については，(1)が解ければ上記公式を使用し，ＡＤ＝$\sqrt{4\cdot2-2\cdot1}=\sqrt{6}$ が得られる。

平成２７年度　高等学校標準学力検査問題

数　学　Ⅱ

学年	組	番	氏名

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数，式または記号を解答欄に記入せよ。

［１］　次の各問いに答えよ。

(1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x}\times\dfrac{x}{x+2}$ を計算すると $\boxed{}$ である。

(2) $i^2-i^3+i^4+\dfrac{2}{i}$ を計算すると $\boxed{}$ である。
ただし，i は虚数単位とする。

(3) ３次方程式 $x^3-3x+2=0$ の解は
$x=$ $\boxed{}$ である。

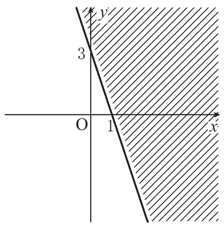
(4) ２次方程式 $x^2+5x-3=0$ の２つの解を α，β とするとき，$(\alpha+1)(\beta+1)=$ $\boxed{}$ である。

(5) $(x-1)^8$ の展開式における x^5 の係数は
$\boxed{}$ である。

(6) $x>0$ のとき，$x+\dfrac{2}{x}$ の最小値は $\boxed{}$ である。

(7) t がすべての実数値をとって変化するとき，
放物線 $y=(x-2t)^2+4t^2-6t$ の頂点Ｐの軌跡は
放物線 $y=$ $\boxed{}$ である。

(8) 図の斜線部分（ただし，境界線を含まない）を表す不等式は
$\boxed{}$ である。



(9) $\cos(-\theta)=$ $\boxed{}$ である。
$\boxed{}$ に当てはまるものを下の①～⑥から選べ。

① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$

④ $\cos\theta$　⑤ $-\cos\theta$　⑥ $\dfrac{1}{\cos\theta}$

(10) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta<-\dfrac{1}{2}$ を満たす θ
の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(11) $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\cos\theta=$ $\boxed{ア}$ で
あり，$\sin2\theta=$ $\boxed{イ}$ である。

(12) 不等式 $\log_{\frac{1}{3}}x>2$ を満たす x の値の範囲は
$\boxed{}$ である。

(13) 関数 $f(x)=ax^3+bx^2$ が $x=2$ で極大値４をとる
とき，$a=$ $\boxed{ア}$，$b=$ $\boxed{イ}$ である。

(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	
(7)	
(8)	
(9)	
(10)	
(11)	ア　イ
(12)	
(13)	ア　イ

［２］　直線 $x+2y-5=0$ を l とし，原点を中心とする半径３の円を C とする。直線 l と円 C が異なる２点Ｐ，Ｑで交わっている。次の各問いに答えよ。

(1) 原点と直線 l の距離は $\boxed{}$ である。

(2) 線分ＰＱの長さは $\boxed{}$ である。

(1)	
(2)	

［３］　関数 $y=2^{2x}-8\cdot2^x+10$ $(0\leqq x\leqq3)$ について，$2^x=t$ として，次の各問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲は $\boxed{}$ である。

(2) y の最小値は $\boxed{}$ である。

(1)	
(2)	

［４］　関数 $f(x)=x^2+x-2$ について，$y=f(x)$ のグラフ上に点Ａ $(-1,\ -2)$ をとる。次の各問いに答えよ。

(1) 点Ａにおける接線 l_1 の方程式は $\boxed{}$ である。

(2) 点Ａを通り，接線 l_1 に垂直な直線 l_2 の方程式は
$\boxed{}$ である。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と直線 l_2 で囲まれた部分の面積は
$\boxed{}$ である。

(1)	
(2)	
(3)	

番号	配点	正　答	正答率	上位群 下位群	無答率	上位群 下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	$\frac{x-2}{x-1}$	83.2	96.5 80.0	1.0	0.0 0.0	15.8	$\frac{x+2}{x-1}$(1.5)，$\frac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}$(1.2)
(2)	5	$-i$	17.8	28.7 5.2	10.8	5.2 17.4	71.4	$\frac{1}{i}$(20.7)，$i+\frac{2}{i}$(8.5)，1(7.0)
(3)	5	-2，1	53.2	79.1 33.9	10.9	0.9 20.0	35.9	1(6.7)，1,2(5.7)， $(x+2)(x-1)^2$(5.1)
(4)	5	-7	50.6	76.5 23.5	15.9	1.7 33.0	33.5	8(2.8)，9(2.7)，$\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$(2.5)
(5)	5	-56	39.1	60.9 24.3	16.1	5.2 20.0	44.8	56(9.9)，-8(3.0)，-1(2.5)
(6)	5	$2\sqrt{2}$	22.3	39.1 0.0	17.7	8.7 23.5	60.0	3(30.7)，2(7.5)，1(4.3)
(7)	5	x^2-3x	13.7	20.9 0.9	53.6	30.4 78.3	32.7	$4t^2-6t$ (4.3)， $x^2+8t^2-4tx-6t$(2.7)
(8)	5	$y>-3x+3$	45.7	70.4 15.7	12.2	1.7 19.1	42.1	$y\geqq-3x+3$(5.4)，$y<-3x+$ 3(5.3)
(9)	5	④	38.2	60.0 11.3	2.3	0.0 4.3	59.5	① (16.3)，⑤(14.3)，③(9.5)
(10)	5	$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$	50.1	79.1 18.3	12.7	1.7 28.7	37.2	$\frac{7}{6}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$(2.6)，$\frac{4}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$(1.8)
(11)	5	ア　$\frac{\sqrt{5}}{3}$	65.7	95.7 36.5	13.7	0.9 26.1	20.6	$\frac{1}{3}$(2.2)，$\frac{1}{2}$(1.7)
		イ　$\frac{4\sqrt{5}}{9}$	43.9	80.9 3.5	25.0	4.3 46.1	31.1	$\frac{4}{3}$(6.3)，$\frac{4}{9}$(2.6)
(12)	5	$0<x<\frac{1}{9}$	13.9	25.2 3.5	24.3	7.0 47.0	61.8	$x<\frac{1}{9}$(20.9)，$\frac{1}{9}<x$(19.7)
(13)	5	ア　-1	50.3	88.7 10.4	16.4	2.6 27.0	33.3	(ア，イ)の順で (1，-1)(6.3)，(1，-2)(3.5)
		イ　3	48.8	88.7 7.0	16.4	2.6 27.0	34.8	
［2］(1)	5	$\sqrt{5}$	39.7	73.0 7.0	30.0	5.2 53.9	30.3	$\frac{5}{2}$(4.3)，5(2.7)，1(2.7)
(2)	5	4	21.7	39.1 3.5	54.7	27.0 80.9	23.6	2(1.8)，6(1.5)，5(1.4)
［3］(1)	5	$1\leqq t\leqq 8$	47.6	86.1 3.5	24.7	0.0 50.4	27.7	$4-\sqrt{6}\leqq t\leqq 4+\sqrt{6}$(3.5)， $0\leqq t\leqq 8$(2.8)
(2)	5	-6	43.5	79.1 3.5	26.3	2.6 58.3	30.2	3(5.0)，2(3.2)，10(2.3)， -5(2.3)
［4］(1)	5	$y=-x-3$	42.3	87.8 6.1	28.2	1.7 58.3	29.5	$y=2x+1$(4.0)，$y=2x$(3.1)
(2)	5	$y=x-1$	38.8	85.2 0.9	40.2	3.5 78.3	21.0	$y=x-3$(1.7)，$y=-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$(1.7)
(3)	5	$\frac{4}{3}$	28.3	58.3 0.9	54.6	13.9 93.0	17.1	2(1.5)，4(1.2)

(1) 相加平均と相乗平均の大小関係の使い方を定着させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H27 ［1］ (6)	$x>0$ のとき，$x+\dfrac{2}{x}$ の最小値は $\boxed{}$ である。　（$2\sqrt{2}$）	22.3%（39.1%／0.0%）	3（30.7%），2（7.5%），1（4.3%）

相加平均と相乗平均の大小関係を使って解く問題であるが，７割以上の者が不正解であった。誤答の中では，３が最も多く，解答している割合は 30.7%であり，これは x に１または２を代入したときの値である。このことから，単に x に整数値を代入して最小値を調べるなど，相加平均と相乗平均の大小関係を使わないで解いた者がいることが分かる。相加平均と相乗平均の大小関係についての理解を深め，どのような場合に使えるか正しく判断できるように指導したい。

【指導上の留意点】

相加平均と相乗平均の大小関係を表す式は $a>0$，$b>0$ のとき $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ であるが，両辺に２をかけた $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ という形で利用することが多い。

相加平均と相乗平均の大小関係を使うかどうかは，問題に誘導がなく，さまざまな形の式になっていることが多いので，一見しただけでは判断しにくい。そのため，以下の条件を満たすときに相加平均と相乗平均の大小関係を使うことが多いことを理解させる。

（上記の問題では）
① **文字の条件が正である** → $x>0$ より，$\dfrac{2}{x}>0$ ⇒「**両方とも正だ！**」
② **二つの式が和の形で表されている** → $x+\dfrac{2}{x}$ ⇒「**和の形になっている！**」
③ **二つの式をかけると簡単になる（定数になる）** → $x\times\dfrac{2}{x}=2$ ⇒「**かけたら簡単になった！**」

これらの条件を満たすことを確認しながら解くことで，解法に気付きやすくなる。

$\boxed{例}$ $t=2^x+2^{-x}$ （ x は実数）とするとき，t の値の範囲を求めよ。
① **文字の条件が正である** → $2^x>0$，$2^{-x}>0$ ⇒「**両方とも正だ！**」
② **二つの式が和の形で表されている** → 2^x+2^{-x} ⇒「**和の形になっている！**」
③ **二つの式をかけると簡単になる（定数になる）** → $2^x\times2^{-x}=2^0=1$ ⇒「**かけたら簡単になった！**」

（解）相加平均と相乗平均の大小関係より，$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ よって，$t\geqq 2$

また，等号成立条件も併せて確認したい。相加平均と相乗平均の大小関係から不等式が求められたとしても，等号成立条件を求めなければ最小値を求められるわけではないことを理解させたい。そのために，次のような例を使って理解させるとよい。

クラス 40 人が 80 点以上合格の試験を受け，その結果 40 人全員が試験に合格した。
このとき，クラスの最低点は 80 点であると言えるか。

この例では 40 人とも 80 点以上であることは分かるが，最低点が分からない。そのため，最小値を調べるには「以上」という条件だけでは足りないことが分かる。この例から最小値が実際に存在することを等号成立条件を用いて確認する必要があることが分かる。

相加平均と相乗平均の大小関係を利用する問題で，等号成立条件を用いて確認する必要のある問題を以下に紹介する。

$\boxed{\text{問題}}$　$a>0$，$b>0$ のとき $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

> $\boxed{\text{正答}}$　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$
>
> ここで $ab>0$，$\dfrac{1}{ab}>0$ であるから相加平均と相乗平均の大小関係より，
>
> $ab+\dfrac{4}{ab}+5\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}+5=9$
>
> 等号が成り立つのは $ab=\dfrac{4}{ab}$ かつ $a>0$，$b>0$ より $ab=2$
>
> 以上より $ab=2$ のとき最小値 9 をとる。

> $\boxed{\text{誤答}}$　$a+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{b}}=2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ かつ $b+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{b\cdot\dfrac{4}{a}}=4\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ より辺々かけて
>
> $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 4\sqrt{\dfrac{b}{a}}=8$ よって最小値 8 をとる。

これは不等式としては成立している。等号成立条件を考えると，$a=\dfrac{1}{b}$ かつ $b=\dfrac{4}{a}$ であるが，これを同時に満たす a，b は存在しない。そのため最小値が 8 となることはない。等号成立条件を確認することで間違いに気付くことができる。

最後に，相乗平均は対数をとると，対数の相加平均になるという特徴がある。

> $\boxed{\text{例}}$　相乗平均を x とする。$l>0$，$m>0$，$n>0$
>
> $\log_a x=\log_a\sqrt{mn}\quad\Rightarrow\quad\log_a x=\dfrac{1}{2}\log_a mn\quad\Rightarrow\quad\log_a x=\dfrac{\log_a m+\log_a n}{2}$
>
> $\log_a x=\log_a\sqrt[3]{lmn}\quad\Rightarrow\quad\log_a x=\dfrac{1}{3}\log_a lmn\quad\Rightarrow\quad\log_a x=\dfrac{\log_a l+\log_a m+\log_a n}{3}$

厳密には曲線の凹凸（数学Ⅲ）の知識が必要であるが，この特徴を使い相加平均と相乗平均の大小関係を証明することもできる。

> $\boxed{\text{証明}}$　$f(x)=\log_2 x$ のグラフの上に２点Ａ（a，$\log_2 a$），Ｂ（b，$\log_2 b$）をとる。
>
> $f(x)=\log_2 x$ のグラフは上に凸であるから，線分ＡＢの中点（$\dfrac{a+b}{2}$，$\dfrac{\log_2 a+\log_2 b}{2}$）はグラフの下側にあるから，$x=\dfrac{a+b}{2}$ におけるグラフと中点の y 座標を比較すると，
>
> $\log_2\dfrac{a+b}{2}\geqq\dfrac{\log_2 a+\log_2 b}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\log_2\dfrac{a+b}{2}\geqq\log_2\sqrt{ab}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　$\boxed{\text{終}}$

(2) 三角関数の性質について理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H27 ［１］ (9)	$\cos(-\theta)=$ $\boxed{}$ である。 $\boxed{}$ に当てはまるものを下の①～⑥から選べ。 ① $\sin\theta$　② $-\sin\theta$　③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$ ④ $\cos\theta$　⑤ $-\cos\theta$　⑥ $\dfrac{1}{\cos\theta}$ （④ $\cos\theta$ ）	38.2% (60.0%／ 11.3%)	① $\sin\theta$ (16.3%), ⑤ $-\cos\theta$ (14.3%), ③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$ (9.5%)

新出問題で，基本的な三角関数の性質を問うものであるが，全体の正答率が４割を下回っており，上位群についても６割の正答率である。主な誤答は，①$\sin\theta$ と解答している割合が 16.3%，⑤$-\cos\theta$ と

解答している割合が 14.3％であった。「（公式を誤って覚えていて）ただ $\sin\theta$ に変える」「$(-\theta)$の部分に“－”が付いているから $\cos\theta$ の前に“－”を付ける」など，式の意味をあまり考えず安易に解答していることが考えられる。単に公式を暗記させるのではなく，さまざまな方法で導くことにより，三角関数の性質をより深く理解させたい。

【指導上の留意点】

三角関数の性質は，単に公式を暗記するのではなく，単位円を用いて視覚的に理解させたい。また，その後に学習する加法定理を用いて導くことで，より理解を深めさせたい。

① 単位円を活用する

右図のように，単位円上に点Ｐ $(a,\ b)$ をとると，$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ となる。

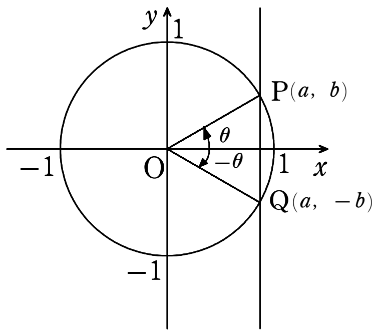
点Ｑは点Ｐと x 軸に関して対称であるから，点Ｑ $(a,\ -b)$ となる。

ここで，点Ｐと点Ｑの x 座標が a となり同じなので，

$\cos(-\theta)=\cos\theta$ が成り立つ。

同様に，点Ｐの y 座標が b，点Ｑの y 座標が $-b$ なので，

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ が成り立つ。



② 加法定理を活用する

「$-\theta$」の場合

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$ より，

$\cos(-\theta)=\cos(0-\theta)=\cos0\cos\theta+\sin0\sin\theta=1\cdot\cos\theta+0\cdot\sin\theta=\cos\theta$ が成り立つ。

同様に，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ より，

$$\sin(-\theta)=\sin(0-\theta)=\sin0\cos\theta-\cos0\sin\theta=0\cdot\cos\theta-1\cdot\sin\theta=-\sin\theta$$

$\tan\theta$ は，$\tan\dfrac{\pi}{2}$ などが定義されていないので，加法定理ではなく $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いる。

$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$ が成り立つ。

同様にして，

「$\pi-\theta$」の場合

$\cos(\pi-\theta)=\cos\pi\cos\theta+\sin\pi\sin\theta=(-1)\cdot\cos\theta+0\cdot\sin\theta=-\cos\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\pi\cos\theta-\cos\pi\sin\theta=0\cdot\cos\theta-(-1)\cdot\sin\theta=\sin\theta$

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

「$\dfrac{\pi}{2}-\theta$」の場合

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2}\sin\theta=1\cdot\cos\theta-0\cdot\sin\theta=\cos\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$