(1) 「$\sqrt{9}=3$ 」と「３の平方根」の違いを理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率	主な誤答例（標本全体に対する%）
H29 ［１］(5)	$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-\dfrac{12}{\sqrt{6}}$ を計算しなさい。 (5)	83.4%	$5-2\sqrt{6}$（3.7%）， 11（1.6%）
H29 ［１］(7)	二次方程式 $5x^2-7x+2=0$ を解きなさい。 $\left(x=\dfrac{2}{5},\ 1\right)$	82.6%	$x=\dfrac{7\pm\sqrt{9}}{10}$ （5.3%）
H29 ［１］(8)	不等式 $4<\sqrt{2n+1}<5$ を満たす自然数 n をすべて求めなさい。 ($n=8, 9, 10, 11$)	78.4%	8, 9, 10, 11, 12（2.3%）， 8, 9, 10（0.8%）, 9, 10, 11(0.8%)， 1, 2(0.8%)
H29 ［２］(1)	次のア～オのうち，正しい内容を表しているものをすべて選び，かな符号で答えなさい。 ア ３の平方根が $\sqrt{3}$ である。 イ $\sqrt{(-3)^2}$ は３に等しい。 ウ $\sqrt{9}$ は±3 に等しい。 エ $\sqrt{3}$ は２よりも大きい。 オ 絶対値が $\sqrt{3}$ より小さい整数は３個ある。 （イ，オ）	25.6%	イ，ウ （25.7%）， イ，ウ，オ（13.1%）， ウ，オ （5.8%）， ア，イ，ウ （5.5%）

上記の４問は，いずれも平方根に関する問題である。［１］(5)，(7)，(8)は，正答率がどれも 80%程度あり，テスト$\boxed{\text{B}}$の中で比較的高く，平方根の計算の技能は十分に習得されていると考えられる。

しかし，［２］(1)は平方根の定義や性質に関する問題であるが，他の３問と比較して正答率が 50 ポイント以上低い。これについて，どのかな符号を選択したかを調べた結果が，下の表である。

ア	19.1%	イ（正しい内容）	84.1%	ウ	60.3%	エ	8.0%	オ（正しい内容）	50.2%

ウを選択した生徒が全体の 60.3%であることから，「９の平方根のうち正の数を $\sqrt{9}$ と表す」ということが身に付いていない生徒が多いと考えられる。また，主な誤答例から，イとウを両方選んだ誤答が全体の 40 ポイント以上あったことが分かる。これは「$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$ 」と「$\sqrt{9}=\pm3$ 」の両方を正しいとしていることになる。以上のことから，平方根の定義についての理解に課題があると考える。

【今後の指導に向けて】

平方根は，高等学校のさまざまな分野で使われる数である。また，その知識は，立方根や累乗根へ拡張され，その際には，平方根の定義の理解が不可欠である。

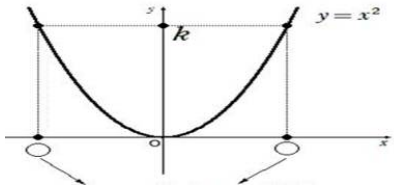
「$\sqrt{9}=\pm3$」としてしまう原因は，以下の２点が考えられる。

原因１「平方根という言葉と根号（$\sqrt{\ }$）が混乱している」

原因２「$\sqrt{a^2}=|a|=\pm a$ と誤って理解をしている」

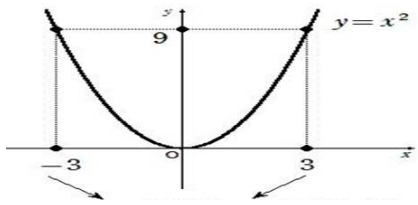
この２点を解決するために，次のような点を注意・強調し生徒の理解を深めていきたい。

原因１「平方根という言葉と根号（$\sqrt{\ }$）が混乱している」ことを解決するために…
以下の２段階を，グラフ等を使って視覚的に指導するとよい。
＜$y=x^2$ のグラフを使った指導法＞
段階１：平方根は二つ存在する。



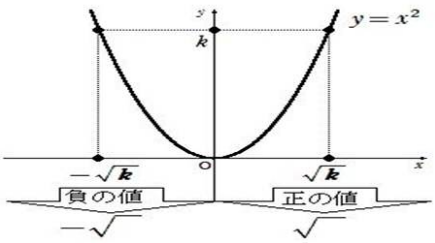
この二つの値が k の平方根

例

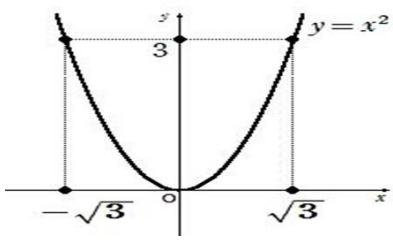


この二つの値が９の平方根

段階２：二つある平方根のうちの正の数であるもの（$\sqrt{\ }$）を，負の数であるものを（$-\sqrt{\ }$）とする。



例



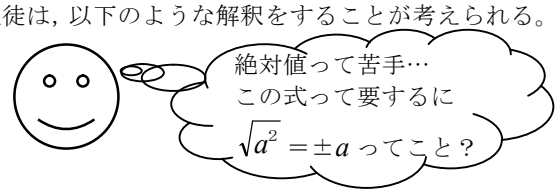
原因２「$\sqrt{a^2}=|a|=\pm a$ と誤って理解をしている」ことを解決するために…

教科書等での記述 $\sqrt{a^2}=|a|$ を取り扱う際に，絶対値の苦手な生徒は，以下のような解釈をすることが考えられる。

$a>0$ のとき，$\sqrt{a^2}=a$

$a<0$ のとき，$\sqrt{a^2}=-a$

まとめると → $\sqrt{a^2}=|a|$



このように，絶対値の苦手意識から誤った理解「$\sqrt{9}=\pm 3$」につながっている可能性がある。絶対値の指導と共に，「場合分けをして外す」という指導を丁寧に行うことが大切である。

上記の２点をしっかり解決すると，以下の誤答を防ぐことができる。

例１　２重根号 $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$ を外す。

誤答 $\sqrt{9-2\sqrt{20}}=2-\sqrt{5}$

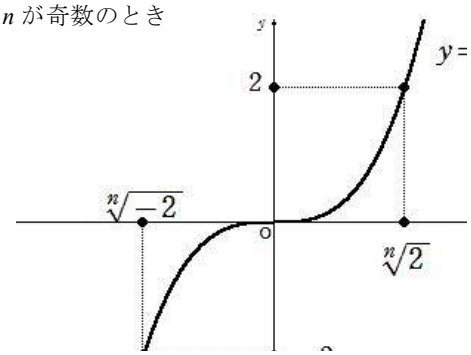
例２　$\sqrt{(3-\pi)^2}+\sqrt{(\pi-4)^2}$ を簡単にする。

誤答 $\sqrt{(3-\pi)^2}+\sqrt{(\pi-4)^2}=(3-\pi)+(\pi-4)=-1$

生徒の理解が不十分になる分野なので，形式的な計算方法だけの指導ではなく，定義や性質についても繰り返し確認しながら指導することが大切である。

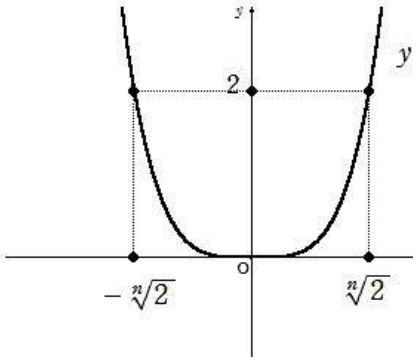
◎コラム◎　～$\sqrt[n]{a}$ の正負をグラフで理解しよう～

(ⅰ) n が奇数のとき



・a の値の範囲は実数すべて
・a に負の値を入れたら，$\sqrt[n]{a}$ の値は負
（例）$\sqrt[n]{-2}<0$

(ⅱ) n が偶数のとき



・a の値の範囲は 0 以上の実数
・$\sqrt[n]{a}$ の値は必ず負にはならない
（例）$\sqrt[n]{2}>0$

(2) 具体例で考えさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H29［１］(10)	関数 $y=\dfrac{2}{x}$ について，正の数 x の値が 20%減少すると，y の値は何%変化するか求めなさい。解答欄では，増加・減少のどちらかに○をつけて表しなさい。　(25%　増加)	21.6% (43.4%／3.5%)	20%　増加（19.9%）， 10%　増加（ 7.0%）， 10%　減少（ 6.0%）

H29［１］(10)は，正答率が 21.6%でテスト$\boxed{\text{B}}$の関数分野の問題の中で最も低かった。最も多かった誤答は「20%　増加」であるが，これは x が減少するので逆に y は増加することまでは考えたが，問題文にある「20%」をそのまま答えてしまったと考えられる。これは，具体的な数値が与えられないときに，どのように対応したらよいか分からず，解法の糸口がつかめないことが原因であると考える。

【今後の指導に向けて】

解法パターンが明確な問題には対応できるが，解法の糸口がつかめない問題に対して，どう手を付けてよいか分からない。このような生徒に対しては，まずは，具体的な数値を代入することで，解法のきっかけをつくらせるというような指導が有効である。

この問題では，反比例の x が１倍，２倍，３倍になると y が $\frac{1}{1}$ 倍，$\frac{1}{2}$ 倍，$\frac{1}{3}$ 倍になるという性質から，x が $\frac{8}{10}$ 倍になっているので，y は $\frac{10}{8}$ 倍になると分かればよいが，それに気が付かない場合は，文字に具体的な数値を代入することで考えやすくなることを実感させる。

具体例	一般化
x を１として考えると $y=\frac{2}{1}=2$ 元の y の値は２ x の値が 20%減少するとき $x=1\times0.8=0.8$ $y=\frac{2}{0.8}=2.5$ x の値が変化したときの y の値は 2.5 y の値が 2 から 2.5 に変化しているので $2\times\square=2.5$ $\square=1.25$ よって 25%増加したことが分かる	x を a とすると $y=\frac{2}{a}$ 元の y の値は $\frac{2}{a}$ x の値が 20%減少するとき $x=a\times0.8=0.8\ a$ $y=\frac{2}{0.8a}=\frac{2.5}{a}$ x の値が変化したときの y の値は $\frac{2.5}{a}$ y の値が $\frac{2}{a}$ から $\frac{2.5}{a}$ に変化しているので $\frac{2}{a}\times\square=\frac{2.5}{a}$ $\square=1.25$ よって 25%増加したことが分かる

具体例の解法は x が１のときしか確認できていないので不十分である。しかし，このやり方は文字がないので計算しやすい。一般化して確認しても，同じく 25%増加であることが分かる。このように具体的な数値を代入して考えることで答えを推測・確認できることを生徒に実感させ，解法の糸口がつかめない問題をただ見て考えるのではなく，手を動かしながら考えることができるようにさせたい。

他にも数字を代入することで推測や公式の確認ができることを指導したい。以下に例を挙げる。

・指数法則 $a^m\times a^n$ は，a^{m+n} か $a^{m\times n}$ かどっち？

$m=2$，$n=3$ を代入して確認する

$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^5$

←2＋3＝5 だから和だ！

・余弦定理の $2bc\cos A$ の前の符号は，＋か－かどっち？

１辺の長さが１の正三角形を考えてみる

＋のとき　$1^2+1^2+2\cdot1\cdot1\cos60^\circ=3$

←1にならない！

－のとき　$1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos60^\circ=1$

←1になった！符号は－が正しい！

・$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$ この変形でよかったかな？

$n=1$ を代入して確認する

$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

←$\frac{1}{3}$にするために$\frac{1}{2}$倍しないといけない！

・$a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$ の一般項って何？

$n=1$ を代入する　$a_2=2a_1=4$　$a_2=4$

$n=2$ を代入する　$2a_3=3a_2=12$　$a_3=6$

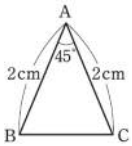
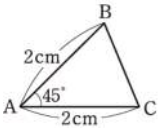
$n=3$ を代入する　$3a_4=4a_3=24$　$a_4=8$

$n=4$ を代入する　$4a_5=5a_4=40$　$a_5=10$

2，4，6，8，10，・・・

←等差数列かな？

(3) 多面的に図形を捉えさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H28［1］(12)	右の図は，AB＝AC＝2 cm，∠A＝45°の二等辺三角形である。この三角形の面積を求めなさい。（$\sqrt{2}$ cm²） 	30.1%（57.0%／3.3%）	$\sqrt{3}$（7.7%），2（6.0%），$2\sqrt{2}$（2.6%）
H29［1］(13)	右の図は，AB＝AC＝2 cm，∠A＝45°の二等辺三角形である。この三角形の面積を求めなさい。（$\sqrt{2}$ cm²） 	52.2%（88.8%／16.1%）	$2\sqrt{2}$（5.9%），2（4.4%），$\sqrt{3}$（3.7%）

H28年度とH29年度で二等辺三角形の面積を求める問題を出題した。H29年度はH28年度と比べ，補助線を引くことに気付きやすいように図形の提示方法を変更したところ，正答率は52.2%となり，22.1ポイント上がった。問題を解く上で，図形の読み取り方が重要になると推測できる。

【今後の指導に向けて】

図形の問題を解く上で，図形の捉え方は正解にたどり着くために大変重要である。また，教材の提示方法や発問の仕方の工夫により，生徒の思考力や判断力を身に付けさせることが可能となる。解法パターンを身に付けさせるだけの指導ではなく，どのように考えたか，どのように判断したかという問いかけを行うことが重要である。

ここでは，空間図形における多面的に図形を捉える例を紹介する。

① １辺の長さが a の正四面体の体積を求める

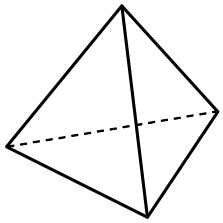
・頂点Ａから△ＢＣＤに垂線ＡＨを下ろすと，△ＡＢＨ，△ＡＣＨ，△ＡＤＨは合同である　【図１】

・ＢＨ＝ＣＨ＝ＤＨより，点Ｈは△ＢＣＤの外心なので，正弦定理により　$BH=\frac{a}{\sqrt{3}}$　【図２】

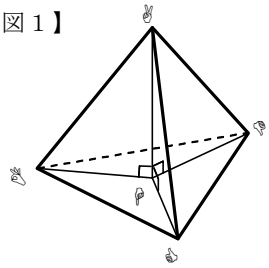
・△ＡＢＨは直角三角形であるから，三平方の定理より　$AH=\frac{\sqrt{6}}{3}a$　【図１】

・正四面体の体積 V は，$V=\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin 60^\circ\times\frac{\sqrt{6}}{3}a\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

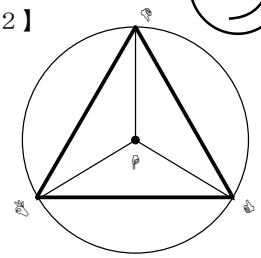
点Ａから点Ｈを見下ろすと



【図１】



【図２】



② １辺の長さが a の正八面体の体積を求める

・正八面体を正六面体のなかに埋め込む（正八面体の頂点が正六面体の各面の対角線の交点）【図１】

・求める体積は，正四角錐Ａ－ＢＣＤＥの２倍

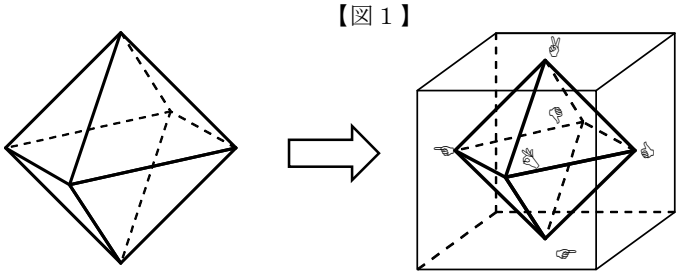
・正四角錐Ａ－ＢＣＤＥの高さは，正六面体の１辺の長さの $\frac{1}{2}$ 倍

・平面ＢＣＤＥで正六面体を切ったときの断面を考えると，四角形ＢＣＤＥは正方形で，１辺の長さは a 【図２】

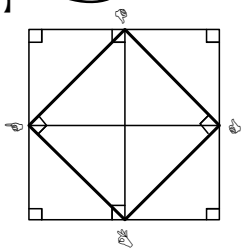
・正六面体の１辺の長さは，a の $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right)$ 倍 【図２】

・正八面体の体積 V は，$V=a\times a\times\left(a\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

【図１】



【図２】



③ 高さ h，底面の半径 a，母線の長さ l の円錐に内接する球の体積を求める

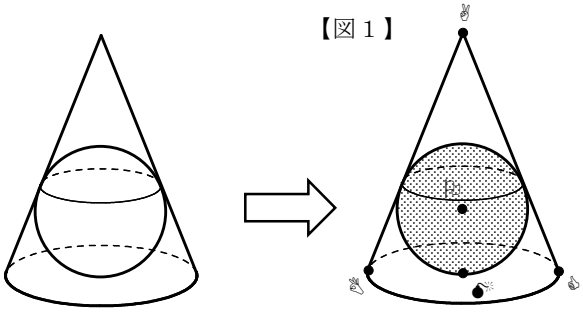
・円錐の頂点Ａと底面の中心Ｍを通る平面で切った図形の切り口は，二等辺三角形に円が内接した図形になる【図１】【図２】

・球の半径 r は，二等辺三角形の面積と三角形に内接する円の性質より求めることができる

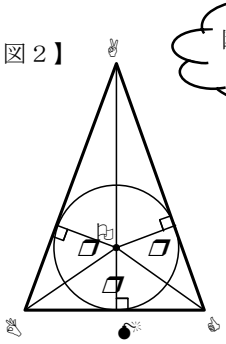
$2a\times h\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}r\ (l+l+2a)$ より $r=\frac{ah}{a+l}$

・球の体積 V は，$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{ah}{a+l}\right)^3$

【図１】



【図２】



生徒の実態に応じて，生徒同士での協議の場面を設けたり，一斉型の授業形態であっても段階的に生徒の考えを引き出すような発問をしたりすることで，思考力や判断力を身に付けさせることが大切である。