付　平成 29 年度高等学校数学標準学力検査の結果とその考察

１　検査の趣旨

当センターでは昭和 51 年から毎年，高等学校数学標準学力検査を実施してきた。今回も次の二つのねらいの下に学力検査を実施し，検査結果を分析・考察して，指導上の留意点を明らかにした。なお，過去の検査結果については，当該年度の当センター研究紀要別冊に掲載している。

⑴　入学者数学学力調査により把握した新入生の学力実態が，その後の高等学校での学習指導を通してどのように変容しているかを調べる。

⑵　基本事項についての理解と定着の程度を調査し，高等学校での指導に役立てる。

２　検査の実施及び処理

⑴　検査問題の種類と問題の構成

検査問題は，数学Ⅰ基本，数学Ⅰ＋Ａ，数学Ⅱの３種類である。どの検査問題も学習指導要領に示された内容を出題の基準とした。検査時間はいずれも 50 分である。

数学Ⅰ基本：　基本的な計算力，基礎事項の定着度を調べる問題を中心に構成した。

数学Ⅰ＋Ａ：　数学Ⅰ基本より高度の思考力・洞察力を要する数学Ⅰの問題に加え，数学Ａの内容も併せて構成した。

数学Ⅱ　　：　問題［１］は基本問題，問題［２］,［３］,［４］は標準問題である。

⑵　調査の対象と方法

各科目の授業が終了した学年を対象に,学校ごとに２月１日から３月31日までの間に適宜実施した。集計のための標本は各学校とも課程別，類型別に各々２学級分とし，集計用紙（２学級分の得点度数分布と，その10％の抽出者の解答をそのまま転記したもの）を４月20日までに回収した。

３　検査結果の概要

⑴　標本数・平均点・標準偏差　　表 12

ﾃｽﾄ 項目	数学 Ⅰ基本	数学 Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
標 本 数	2,417	7,461	8,197
平 均 点	50.4	51.2	39.6
標準偏差	23.2	23.5	27.0

⑵　得点分布（％）　　表 13

ﾃｽﾄ 得点	数学 Ⅰ基本	数学 Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
90 ～100	5.5	5.1	3.8
80 ～ 89	7.3	7.7	6.3
70 ～ 79	10.1	11.2	8.1
60 ～ 69	13.3	14.6	8.3
50 ～ 59	13.7	15.1	8.8
40 ～ 49	14.4	13.7	10.1
30 ～ 39	15.0	12.2	10.8
20 ～ 29	10.8	9.5	13.7
10 ～ 19	7.6	7.8	15.0
0 ～ 9	2.3	3.1	15.0

⑶　調査問題別平均点分布（校）　　表 14

ﾃｽﾄ 平均点	数学 Ⅰ基本	数学 Ⅰ＋Ａ	数学Ⅱ
80以上	1	4	1
75～80未満		3	3
70 ～ 75	1	7	8
65 ～ 70	1	5	4
60 ～ 65	8	15	5
55 ～ 60	3	10	12
50 ～ 55	8	10	14
45 ～ 50	1	11	7
40 ～ 45	9	6	14
35 ～ 40	3	12	7
30 ～ 35	2	9	9
25 ～ 30	4	6	13
20 ～ 25	5	4	15
15 ～ 20		4	12
15未満	1	1	24
計	47	107	148

4　数学Ⅰ（基本）の問題，結果及びその考察

平成２９年度　高等学校標準学力検査問題

数　学　Ⅰ　基　本

次の $\boxed{}$ の中にあてはまる数，式または記号を解答欄に記入せよ。

［１］　次の各問いに答えよ。

(1) $5xy^2 \times 3x^2y^2 = \boxed{}$ である。

(2) $\frac{11}{6}x - \frac{5}{6}y - 2x + y$ を簡単にすると $\boxed{}$ である。

(3) $(a+b+c)^2$ を展開すると $\boxed{}$ である。

(4) $9x^2 - 1$ を因数分解すると $\boxed{}$ である。

(5) $|-6| - |2| = \boxed{}$ である。

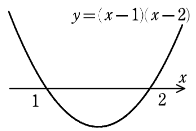
(6) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ の分母を有理化すると $\boxed{}$ である。

(7) １次不等式 $\frac{1}{2}x \geqq -5$ を満たす x の値の範囲は下のア～エの不等式のうち $\boxed{}$ である。

ア $x \geqq -\frac{5}{2}$　　イ $x \leqq -\frac{5}{2}$　　ウ $x \geqq -10$　　エ $x \leqq -10$

(8) ２次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の実数解の個数は $\boxed{}$ 個である。

(9) ２次不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。



(10) 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の２つの部分集合 $A = \{1, 4, 5\}$，$B = \{2, 4\}$ について，$\overline{A \cup B} = \{\boxed{}\}$ である。

(11) 次の文章の $\boxed{}$ にあてはまる語句を，下のア～エの中から最も適切なものを選び記号で答えよ。

「$x=2$ は $x^2=4$ であるための $\boxed{}$ 。」

ア：必要条件である

イ：十分条件である

ウ：必要十分条件である

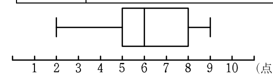
エ：必要条件でも十分条件でもない

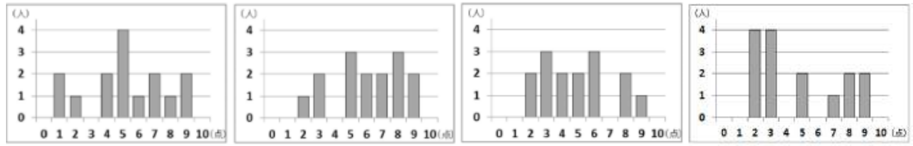
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	
(7)	
(8)	個
(9)	
(10)	{ }
(11)	

学年　　組　　番　氏名

(12) 右の図は，15 人の生徒に 10 点満点の数学のテストを実施し，その得点を箱ひげ図に表したものである。対応するヒストグラムは，下のア～エのうち $\boxed{}$ である。

(12)	





［２］　次の各問いに答えよ。

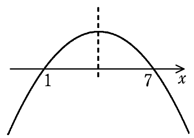
(1) ２次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 4$ において $f(5) = \boxed{}$ である。

(2) ２次関数 $y = x^2 - 4x + 5$ を $y = (x-p)^2 + q$ の形に変形すると $y = \boxed{}$ である。

(3) 図は２次関数 $y = -(x-1)(x-7)$ のグラフである。この関数は $2 \leqq x \leqq 5$ において，

$x = \boxed{ア}$ で，最大値 9 をとり，

$x = \boxed{イ}$ で，最小値 5 をとる。



(1)		
(2)		
(3)	ア	
	イ	

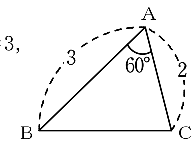
［３］　次の各問いに答えよ。

(1) A は鋭角とする。$\sin A = \frac{3}{5}$ のとき，$\cos A = \boxed{}$ である。

(2) 下の表を完成させよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

θ	ア	135°
$\sin\theta$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	0	イ

(3) $\triangle ABC$ において，$b=2$，$c=3$，$A=60°$ であるとき，辺 BC の長さ a は $\boxed{}$ である。

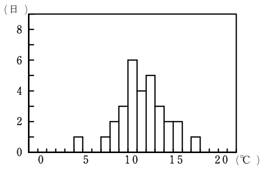
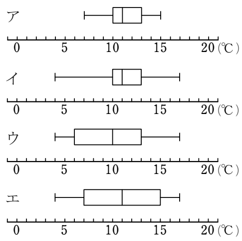
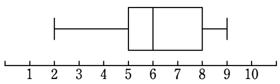
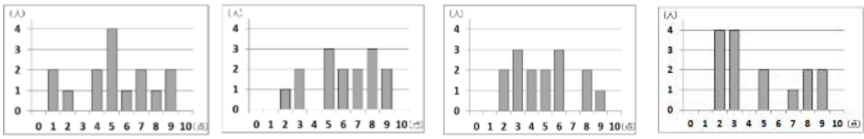


(1)		
(2)	ア	
	イ	
(3)		

平成 29 年度　数学Ⅰ基本

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	$15x^3y^4$	87.5	100.0	75.7	0.5	0.0	0.0	12.0	$15x^2y^4$(5.9)，$15x^3y^2$(1.1)，$15x^4y^4$(1.1)，$8x^3y^4$(0.8)
(2)	5	$-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}y$	46.3	59.5	21.6	8.2	2.7	13.5	45.5	$-x+y$(13.8)，$-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}y$(1.6)，$-\frac{1}{6}x-\frac{11}{6}y$(1.3)，$-\frac{1}{6}x+y$(1.1)
(3)	5	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	58.8	78.4	35.1	9.3	0.0	18.9	31.9	$a^2+b^2+c^2$(8.5)，$a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2$(4.5)
(4)	5	$(3x+1)(3x-1)$	73.1	97.3	43.2	11.7	2.7	24.3	15.2	$(3x-1)^2$(4.3)，$3x-1$(1.3)，$(3x)^2-1$(0.8)
(5)	5	4	39.9	56.8	24.3	8.0	2.7	10.8	52.1	-8(19.7)，-4(17.6)，8(6.4)，$\lvert -8\rvert$(1.9)
(6)	5	$\sqrt{5}+\sqrt{2}$	31.6	56.8	2.7	9.8	0.0	21.6	58.6	$\sqrt{3}$(10.6)，$\sqrt{5}-\sqrt{2}$(9.0)，$\sqrt{10}$(4.8)，$\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{3}$(3.7)
(7)	5	ウ	55.1	67.6	29.7	1.3	0.0	5.4	43.6	イ(17.2)，ア(14.3)，エ(12.1)
(8)	5	0	30.6	51.4	16.2	3.7	2.7	8.1	65.7	2(31.1)，1(25.0)，3(7.2)，4(1.1)
(9)	5	$x<1, 2<x$	25.3	51.4	8.1	21.3	8.1	32.4	53.4	$1<x<2$(10.1)，$1\leqq x\leqq 2$(7.7)，1, 2(5.9)，$x>1, x>2$(2.4)
(10)	5	$\{3, 6\}$	48.4	59.5	32.4	7.2	8.1	10.8	44.4	4(12.5)，1, 2, 4, 5(12.5)，1, 2, 5(5.6)，1, 2, 3, 5, 6(3.7)
(11)	5	イ	39.1	45.9	29.7	1.1	0.0	2.7	59.8	ア(34.9)，ウ(21.8)，エ(3.1)
(12)	5	イ	80.6	94.6	67.6	0.5	0.0	2.7	18.9	ウ(12.8)，エ(3.2)，ア(2.9)
［2］(1)	5	19	50.5	75.7	8.1	19.4	2.7	40.5	30.1	11(8.2)，2(2.4)，$5^2-2\times 5+4$(1.1)
(2)	5	$(x-2)^2+1$	36.4	81.1	0.0	24.7	0.0	45.9	38.9	$(x-2)^2+5$(11.2)，$(x-2)^2+9$(2.4)
(3)	5	ア　4	30.3	70.3	2.7	22.6	5.4	35.1	47.1	5(14.9)，2(8.0)，7(5.9)，1(5.1)
	5	イ　2	43.6	70.3	18.9	22.1	5.4	37.8	34.3	5(7.7)，1(6.4)，7(5.9)，-1と-7(1.6)
［3］(1)	5	$\frac{4}{5}$	39.1	78.4	13.5	20.2	2.7	32.4	40.7	$\frac{5}{3}$(5.1)，$\frac{4}{3}$(3.7)，$\frac{2}{5}$(2.9)，4(2.4)
(2)	5	ア　90°	66.0	89.2	40.5	5.9	0.0	16.2	28.1	0(9.8)，180(3.7)，120(2.4)，30(1.9)
	5	イ　$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	48.9	75.7	21.6	8.5	0.0	18.9	42.6	$\frac{1}{\sqrt{2}}$(13.6)，1(3.5)，$\frac{\sqrt{3}}{2}$(3.2)，$\frac{1}{2}$(2.9)
(3)	5	$\sqrt{7}$	21.8	37.8	5.4	22.6	2.7	21.6	55.6	4(6.9)，7(4.8)，$\sqrt{5}$(4.5)，5(4.5)，3(4.3)

箱ひげ図の利点・欠点を理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
H27 [1] (11)	下の図は，1日の平均気温30日分のヒストグラムである。対応する箱ひげ図は右のア～エのうち□である。 （イ）  	32.6%	エ（33.0%），ウ（25.4%），ア（3.6%）
H29 [1] (12)	右の図は，15人の生徒に10点満点の数学のテストを実施し，その得点を箱ひげ図に表したものである。対応するヒストグラムは，下のア～エのうち□である。 （イ）  ア イ ウ エ 	80.6%	ウ(12.8%)，エ（3.2%），ア（2.9%）

H27 年度，H29 年度の問題は共に，ヒストグラムと箱ひげ図の対応を読み取る問題である。H29 年度の問題は，正答率が８割を超えているのに対して，H27 年度の問題は，正答率がH29 年度よりも50 ポイント近く下回っている。H27 年度は，ヒストグラムのデータが集中している範囲（おおよそ7から 15）と同じような四分位範囲の箱ひげ図の選択肢（エ，ウ）を選んでしまい，正答率がH29 年度よりも低かったのではないかと推測される。５数要約や四分位範囲などの意味をきちんと捉えていないなど，生徒は箱ひげ図の理解が不十分であると考えられる。

【指導上の留意点】

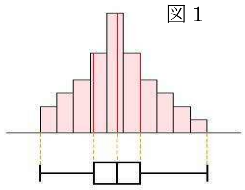


図１

５数要約（最小値，第１四分位数，中央値，第３四分位数，最大値）を理解させる。「データの散らばり具合い」を調べるために，データの個数を４等分する３つの値を考え，その値が「四分位数」であることを指導する。

さらに，５数要約を図で表したものが「箱ひげ図」であることを理解させる。データの個数を４等分しているので，箱とひげの部分にはそれぞれ，データの約 25%が入っていること，箱やひげが大きくなるほど「データの散らばり具合い」が大きくなり，データの分布の傾向を読み取れることを理解させる。図１のように，ヒストグラムと箱ひげ図の対応関係を指導し，箱ひげ図からも，大まかな分布の傾向を読み取ることができる利点があることも指導したい。

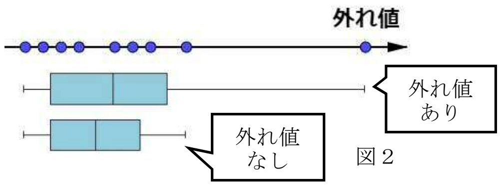


図２

また，箱ひげ図に欠点があることも指導したい。図２のように，外れ値があると，「ひげ」の部分が長くなり，分布の正確な傾向を読み取れなくなる。外れ値による誤差は，偽相関の話にも関連してくるので，外れ値の説明をしておくと，より理解が深まる。

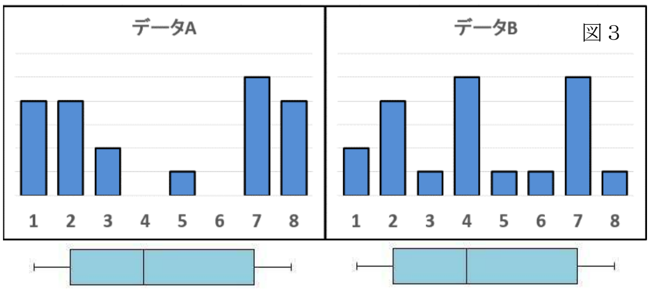


図３

図３のように，ヒストグラムは異なるが，箱ひげ図は変わらない例もある。箱ひげ図が同じでも，ヒストグラムや分散・標準偏差が異なる場合もあり得るので，一概にデータの散らばりの大小を比較できる訳ではないことも，注意したい。

平成２９年度　高等学校標準学力検査問題

数　　学　　Ⅰ＋A

学年　　組　　番　氏名

次の □ の中にあてはまる数，式，記号または言葉を解答欄に記入せよ。

［１］　次の各問いに答えよ。

(1) x^4+x^2-2 を因数分解すると □ である。

(2) ２次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解は $x=$ □ である。

(3) 不等式 $|x-2|<3$ を満たす x の値の範囲は □ である。

(4) Aさんは $\sqrt{3}$ が無理数であることの証明を以下のように書いた。正しい証明となるように □ にあてはまる最も適当な言葉または式を答えよ。

証明

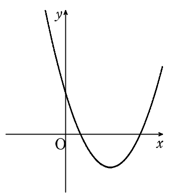
「$\sqrt{3}$ が無理数でない」すなわち「$\sqrt{3}$ が □ア である」と仮定すると，互いに素である自然数 m，n を用いて $\sqrt{3}=$ □イ とおける。

・・・・・（以下略）

(5) ２次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフが右の図で与えられているとき，a，b の値の符号の組み合わせとして正しいものは，下のア～エのうち □ である。

ア a：正　b：正　　イ a：正　b：負

ウ a：負　b：正　　エ a：負　b：負



(6) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において，$2\cos\theta+1=0$ を満たす θ の値は □ である。

(7) 次のデータは生徒６人の小テストの得点である。

６，７，２，３，７，５　（点）

小テストの得点の中央値を求めると □ 点である。

(8) 次のデータは生徒５人の小テストの得点と偏差である。

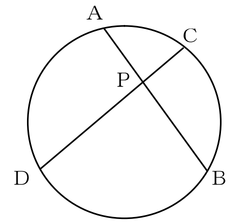
小テストの得点（x）	4	6	4	9	7
小テストの偏差（$x-\bar{x}$）	−2	0	−2	3	1

分散を求めると □ である。

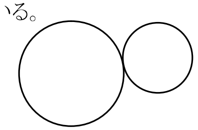
(9) 男子３人，女子３人が１列に並ぶ。男子と女子が交互に並ぶとき，その並び方は □ 通りである。

(10) $\sqrt{120n}$ が自然数になるような最小の自然数 n は □ である。

(11) 図のように，円の２つの弦AB，CDは点Pで交わっている。AP＝10，CP＝6，DP＝14 のとき，BPの長さを求めると □ である。



(12) 図のように，２つの円が外接している。この２つの円の共通接線の本数は □ 本である。



［２］　２次関数 $y=x^2-2ax+2a$ がある。

(1) このグラフの頂点の y 座標を a を用いて表すと □ である。

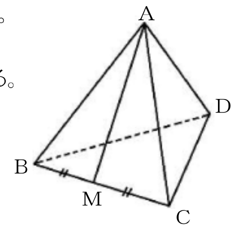
(2) このグラフが x 軸と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲は □ である。

［３］　１辺の長さが２の正四面体ABCDの辺BCの中点をMとするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 線分AMの長さは □ である。

(2) $\cos\angle$AMDの値は □ である。

(3) 三角形AMDの面積は □ である。



［４］　x 軸上を動く点Aがあり，最初は原点にある。１枚の硬貨を投げて，表が出たら正の方向に１だけ進み，裏が出たら負の方向に１だけ進む。硬貨を４回投げるとき，次の各問いに答えよ。

(1) ４回とも表である確率は □ である。

(2) ４回投げたとき，点Aが原点にある確率は □ である。

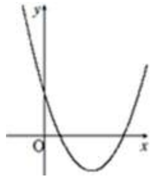
(3) ４回投げたとき，点Aの座標が２以下である確率は □ である。

解答欄	
［１］(1)	
(2)	
(3)	
(4)	ア　　イ
(5)	
(6)	
(7)	点
(8)	
(9)	
(10)	
(11)	
(12)	本
［２］(1)	
(2)	
［３］(1)	
(2)	
(3)	
［４］(1)	
(2)	
(3)	

平成 29 年度　数学Ⅰ＋A

番号	配点	正答	正答率	正答率 上位群	正答率 下位群	無答率	無答率 上位群	無答率 下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
[1] (1)	5	$(x+1)(x-1)(x^2+2)$	42.2	71.1	6.2	3.8	0.0	7.2	54.0	$(x^2-1)(x^2+2)$(37.6)，$(x^2+1)(x^2-2)$(1.2)
(2)	5	$x=2\pm\sqrt{3}$	82.7	94.8	69.1	4.3	0.0	7.2	13.0	$4\pm\sqrt{3}$(0.9)，$-2\pm\sqrt{3}$(0.7)，4(0.7)，$\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$(0.7)
(3)	5	$-1<x<5$	48.1	88.7	10.3	6.8	1.0	17.5	45.1	$x<5$(8.3)，$1<x<5$(4.7)，$x<1$(2.7)，$x<-1, 5<x$(2.2)
(4)	5	ア　有理数 イ　$\frac{n}{m}$ $\left(\frac{m}{n}\text{も可}\right)$	27.8	63.9	4.1	5.6	0.0	9.3	66.6	実数(0.9)，素数(0.9)，無理数(0.8)，自然数(0.8) mn(19.6)，$m+n$(4.5)，$\sqrt{mn}$(3.0)，3(1.2)
(5)	5	ウ	37.5	52.6	27.8	0.4	0.0	0.0	62.1	イ(25.7)，エ(18.4)，ア(18.0)
(6)	5	120°	55.0	81.4	25.8	12.1	1.0	25.8	32.9	60(4.0)，150(3.5)，120 と 240(2.9)，90(2.8)
(7)	5	5.5	88.8	97.9	85.6	0.1	0.0	0.0	11.1	5(5.1)，2.5(2.1)，6.5(0.7)，6(0.7)
(8)	5	3.6	28.9	40.2	12.4	18.1	10.3	24.7	53.0	5(7.3)，18(6.3)，6(5.7)，0(4.5)
(9)	5	72	32.1	50.5	11.3	4.5	1.0	10.3	63.4	36(23.4)，144(8.5)，24(5.2)，12(5.0)
(10)	5	30	80.2	99.0	58.8	5.0	0.0	9.3	14.8	15(4.6)，3(1.6)，2(1.0)，5(1.0)
(11)	5	$\frac{42}{5}$	54.8	80.4	23.7	7.2	2.1	16.5	38.0	$\frac{10}{3}$(13.8)，12(7.5)，23(1.9)，2(1.1)
(12)	5	3	67.6	88.7	44.3	1.8	0.0	5.2	30.6	1(11.5)，2(10.4)，4(4.4)，5(3.4)
[2] (1)	5	$-a^2+2a$	50.2	86.6	5.2	20.6	0.0	49.5	29.2	$2a$(6.2)，$(a, -a^2+2a)$(6.1)，2(1.1)，a(0.8)
(2)	5	$0<a<2$	28.9	61.9	0.0	29.1	2.1	58.8	42.0	$a<2$(7.2)，$0<a$(4.5)，$a<0$(2.9)，$a<0, 2<a$(2.8)
[3] (1)	5	$\sqrt{3}$	78.2	100.0	51.5	7.6	0.0	16.5	14.2	2(4.1)，$\sqrt{5}$(2.5)，3(1.1)，$2\sqrt{3}$(1.0)，4(1.0)
(2)	5	$\frac{1}{3}$	25.6	64.9	1.0	19.9	3.1	37.1	54.5	1(10.4)，60(9.9)，$\frac{1}{2}$(7.4)，45(3.0)
(3)	5	$\sqrt{2}$	24.4	45.4	1.0	26.2	6.2	59.8	49.4	2(4.9)，$\frac{3\sqrt{3}}{4}$(4.9)，$\frac{3}{2}$(8.8)，$\sqrt{3}$(3.4)
[4] (1)	5	$\frac{1}{16}$	80.2	99.0	60.8	5.1	0.0	9.3	14.7	$\frac{1}{8}$(3.8)，$\frac{1}{2}$(1.5)，$\frac{1}{4}$(1.1)，$\frac{1}{6}$(0.5)
(2)	5	$\frac{3}{8}$	52.5	79.4	16.5	11.1	1.0	22.7	36.4	$\frac{1}{4}$(11.0)，$\frac{1}{16}$(7.4)，$\frac{1}{2}$(3.2)，$\frac{1}{8}$(2.9)
(3)	5	$\frac{15}{16}$	35.1	56.7	12.4	16.3	4.1	30.9	48.6	$\frac{11}{16}$(11.4)，$\frac{7}{8}$(5.7)，$\frac{5}{16}$(4.2)，$\frac{1}{4}$(3.8)

(1)　２次関数の各項の係数の図形的意味を正しく理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）
H29 ［１］ (5)	２次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフが右の図で与えられているとき，a，b の値の符号の組み合わせとして正しいものは，下のア～エのうち ☐ である。 ア　a：正　b：正　　イ　a：正　b：負 ウ　a：負　b：正　　エ　a：負　b：負  （ウ）	37.5% (52.6%／27.8%) 主な誤答例 (標本全体に対する%) イ (25.5%), エ (18.3%), ア (17.9%)

２次関数の各項の係数がもつ意味を考察する問題である。誤答例では「a：正　b：負」であるイを選んだ解答が一番多く 25.5%である。このグラフは頂点が第４象限にあるため，a を頂点の x 座標，b を頂点の y 座標と考えてしまった誤答ではないかと推測される。また，イとエを選択した誤答は合計 43.8%である。基本事項である「b がグラフの y 切片である」ことを理解できていないことが分かる。

【指導上の留意点】

２次関数の各項の係数の意味を理解させるためには，生徒自らグラフの意味を考えさせるような体験型の授業が効果的である。そのような授業例を提案する。

◎授業例◎　２次関数の各項の係数がもつ意味を生徒自らまとめることにより理解させる。具体例から係数とグラフの関係を考察し，それを一般化する作業を考えさせる。加えて，ICT を利用して生徒自らグラフ表示ソフトを使ってグラフを動かすことで，自らの考察の確認を行う。

ステップ①　具体例から係数の意味を考える

次の２次関数のグラフを比較してグラフの違いをまとめてみよう。

(1) $y=x^2$ と $y=2x^2$　　(2) $y=x^2+x$ と $y=x^2-x$　　(3) $y=x^2+2x+1$ と $y=x^2+2x-1$

ステップ②　文字がもつ意味をまとめる

ステップ①をもとに，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ の各項の係数がもつ意味についてまとめてみよう。

ステップ③　ICT を用いて係数の意味を確認する

下の図１は２次関数 $y=ax^2+bx+c$ についてコンピュータのグラフ表示ソフト（GRAPES）を利用して描いたものである。２次関数の各項の係数の値とグラフの動きの関係を考察してみよう。

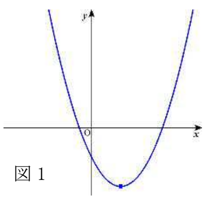


図１

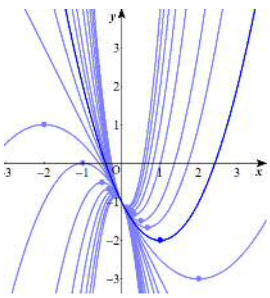
導入　関数 $y=ax^2+bx+c$ を定義し，a，b，c の値をそれぞれ変化させることにより図１に近い形を作り，そのときの a，b，c の正負を確認してみよう。

本題　a，b，c のうち一つの値のみ変化させたとき，グラフがどのように変化するか予想し，それを確かめてみよう。また，頂点がどのような動きをするのか考察してみよう。

参考（実際に GRAPES で作成した図）

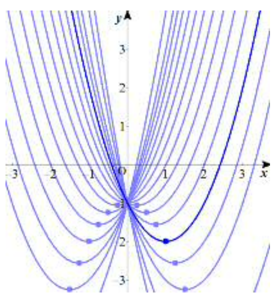
(1) a の値のみ変化させる。

頂点の軌跡は直線



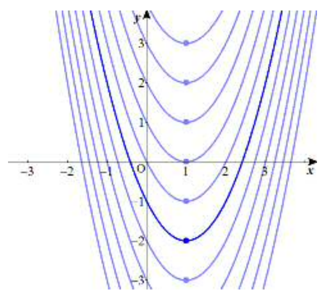
(2) b の値のみ変化させる。

頂点の軌跡は放物線



(3) c の値のみ変化させる。

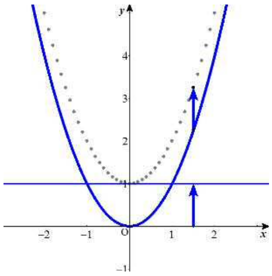
頂点の軌跡は y 軸に平行な直線



◎コラム◎

関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは三つの関数 $y=ax^2$，$y=bx$，$y=c$ の和になっていることに着目し，各項の係数がもつ意味を考えさせる。グラフを重ねる説明のために，ICT を使うと効果的である。

（1）$y=ax^2$ に $y=c$ を重ねる。



$+c$ により

$c>0$ の場合，

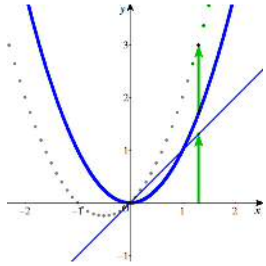
頂点は y 軸方向の正の向きに，

$c<0$ の場合

頂点は y 軸方向の負の向きに

それぞれ移動する。

（2）$y=ax^2$ に $y=bx$ を重ねる。



$+bx$ により

$b>0$ の場合，

頂点は第３象限に，

$b<0$ の場合，

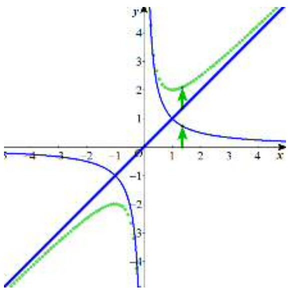
頂点は第４象限に

それぞれ移動する。

発展（数学Ⅲへの応用）

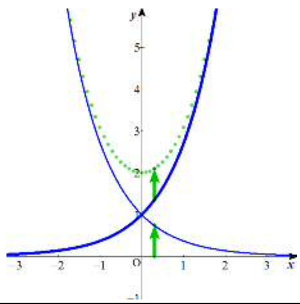
数学Ⅲの微分法で出題される以下の関数は，関数の和に着目して説明すると効果的である。また，この方法で説明すると漸近線のイメージに結び付けることもできる。

（1）$y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフ



この例では漸近線が y 軸と $y=x$ であることが直感的に理解できる。

（2）$y=e^x+e^{-x}$ のグラフ



（2）具体例を考えながら『「もれなく」かつ「重複なく」数える』ことを意識させたい

問題番号	問題（正答）	正答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
H29 ［１］(9)	男子３人，女子３人が１列に並ぶ。男子と女子が交互に並ぶとき，その並び方は□通りである。　(72)	32.1%	36（23.4%）， 144（8.5%）

誤答例では 36 通りと解答したものが一番多く，これは $3!\times3!=36$ として「男女男女男女」または「女男女男女男」の一方のみしか考えられなかったと推測される。次に多い 144 通りについては，男（女）を先に並べておいて，後からその間と両端に女（男）を並べるとして考えた $3!\times{}_4\mathrm{P}_3=144$ であると推測される。いずれにしても，具体例を挙げることによる確認が不十分であることが分かる。

【指導上の留意点】

場合の数や確率が苦手な生徒は，丸暗記した公式を闇雲に利用してしまうことが多い。この分野の基本は『「もれなく」かつ「重複なく」数える』ことである。問題に対する具体例（イメージモデル）の作成に時間をかけ，そこからうまく処理するためにはどの公式を使うべきなのかをじっくりと考えさせたい。そのためには，公式の本来もつ意味をきちんと理解させ，さまざまな事象に活用できるように指導する必要がある。

・公式を導くときに，具体例を書かせ，なぜそのような数式になるかを理解させる

①　（順列を習った後に）組合せの公式を導く。

例題　A，B，C，Dの４人がいる。次の問いに答えよ。

(1)　４人のうち３人を一列に並べる並び方は何通りか。

$_4\mathrm{P}_3=24$ 通り

(2)　４人のうちから３人を選ぶ選び方は何通りか。

数え上げれば，ＡＢＣ，ＡＢＤ，ＡＣＤ，ＢＣＤの４通り

(3) なぜ４通りになるのか，理由を(1)の結果を使って説明してみよう。　…**生徒に考えさせ説明させる！**

(1)の 24 通りのうち，Ａ，Ｂ，Ｃを選んだとすると，その並び方は，

ＡＢＣ，ＡＣＢ，ＢＡＣ，ＢＣＡ，ＣＡＢ，ＣＢＡの６（３！）通り　…**必ず書かせる！**

他のＡＢＤ，ＡＣＤ，ＢＣＤについても同じように６通りの並び方があり，それらは全て同じ選び方になるので，重複している６通りで 24 通りを割って，24／６＝４通り（**公式：$_nC_r = {_nP_r} / r!$**）

②　円順列の公式を導く。

例題　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４人を円卓のテーブルに座らせるとき，何通りの座り方があるか。

４人を一列に並べた場合，24 通りの並べ方がある。この 24 通りのうち，円卓のテーブルに並べた場合，

```
  Ａ        Ｂ        Ｃ        Ｄ
Ｄ○Ｂ    Ａ○Ｃ    Ｂ○Ｄ    Ｃ○Ａ
  Ｃ        Ｄ        Ａ        Ｂ
```
…**必ず書かせる！**

の４通り（ＡＢＣＤ，ＢＣＤＡ，ＣＤＡＢ，ＤＡＢＣ）は同じ座り方になり，その他の並び方についても同じことが言えるので，重複している４通りで 24 通りを割って，24／４＝６通り（**公式：$n!/n = (n-1)!$**）

問題を解く際には単に解法のパターンを覚えるのではなく，必ず具体例による視覚化を徹底させ，工夫した計算方法の有用性を実感させたい。下の問題は，生徒が解けそうでなかなか解けない問題である。全く手がつかないという生徒はほとんどいないが，さまざまな誤答例が出てくることが予想される。じっくりと時間をかけて予習させた後，グループ学習などを通じてお互いのもれや重複を指摘し合えれば，『「もれなく」かつ「重複なく」数える』ことを意識するきっかけになるのではないかと考える。生徒が出した誤答をすぐに否定するのではなく，考えた過程を褒めつつ，それぞれの解法を比較させ，粘り強く，正しい解法へ導いていくとよい。

<u>問題</u>

Ｔ，Ｏ，Ｕ，Ｇ，Ｏ，Ｕ，Ｃ，Ｈ，Ｏ，Ｕの 10 文字を１列に並べる。どの同じ文字も隣り合わないような順列の総数を求めよ。

<u>解法</u>

（ア）Ｏが隣り合わない場合（Ｕはどのような状態でもよい）

まずＵ，Ｕ，Ｕ，Ｔ，Ｇ，Ｃ，Ｈを並べるのが $\frac{7!}{2!}$（通り）で，その間と両端の８箇所にＯを入れるのが $_8C_3$（通り）

よって $\frac{7!}{3!} \times {_8C_3} = 47040$（通り）

（イ）Ｕだけが隣り合う場合（どのＯも隣り合わない）

まずＵＵ，Ｕ，Ｔ，Ｃ，Ｇ，Ｈを並べるのが 6!（通り）で，その間と両端の７箇所にＯを入れるのが $_7C_3$（通り）

よって $6! \times {_7C_3} = 25200$（通り）……①

(イ)はUが二つだけ隣り合う場合とUが三つ隣り合うものをまとめて計算できた！我ながらスマート！
あとは(ア)から(イ)を差し引いて，47040-25200=21840 だ！

なかなか工夫できたね。たしかに UUOU, UOUU を含む順列もモレなく全て計算できているね。
でも具体例を書き出してごらん。“重複”はないかな？

UUOTGCHOUO, OTUOUUOCGH, HUUOUOTCOG, OTOUUUOCGH, , HUUUOTOCOG, …………

他には OTOUUUOCGH, HUUUOTOCOG とか……どこかで見たような？

あれ？それぞれ OTOUUUOCGH, HUUUOTOCOG と重複してる！具体例を考えないと危険ですね！

①ではＵＵＵ，ＵＵＵを含むものが重複しているので，これを解消するためにＵＵＵを含むものを引けばよい。

ＵＵＵ，Ｔ，Ｃ，Ｇ，Ｈを並べるのが 5!（通り）で，その間と両端の６箇所にＯを入れるのが $_6C_3$（通り）

よって $5! \times {_6C_3} = 2400$（通り）……②

①－②より 25200－2400＝22800（通り）

（ア）から（イ）を引けばよいので 47040－22800＝24240（通り）

	ＯＯＯ	ＯＯ，Ｏ	（ウ）Ｏ，Ｏ，Ｏ
ＵＵＵ			（エ）
ＵＵ，Ｕ			
Ｕ，Ｕ，Ｕ			★ここを求めたい

場合分けには，左のような表を用いるとよい

ただし

ＯＯＯ………Ｏが三つ隣り合っているもの

ＯＯ，Ｏ……Ｏが二つだけ隣り合っているもの

Ｏ，Ｏ，Ｏ…どのＯも隣り合っていないもの

ＵＵＵ………Ｕが三つ隣り合っているもの

ＵＵ，Ｕ……Ｕが二つだけ隣り合っているもの

Ｕ，Ｕ，Ｕ…どのＵも隣り合っていないもの

平成２９年度　高等学校標準学力検査問題

数　学　Ⅱ

学年 $\boxed{\quad}$ 組 $\boxed{\quad}$ 番 $\boxed{\quad}$ 氏名 $\boxed{\quad}$

次の $\boxed{\quad}$ の中にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

［１］　次の各問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ を計算すると $\boxed{\quad}$ である。

(2)　$(1+i)^3$ を計算すると $\boxed{\quad}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(3)　整式 x^3-3x+4 を整式 $x-3$ で割った余りは，$\boxed{\quad}$ である。

(4)　整式 x^3-4x^2+x+6 を因数分解すると $\boxed{\quad}$ である。

(5)　２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の２つの解が $1+i$，$1-i$ であるとき，$a=$ $\boxed{ア}$ ，$b=$ $\boxed{イ}$ である。

(6)　２点Ａ(3，2)，Ｂ(1，0)に対して，線分ＡＢを 1：3 に外分する点の座標は $\boxed{(\quad,\quad)}$ である。

(7)　２点Ａ(0，0)，Ｂ(6，0)について，ＡＰ＝２ＢＰを満たす点Ｐの軌跡は，中心 $\boxed{(\quad,\quad)}$ ，半径４の円である。

(8)　$\cos 75^\circ$ の値は $\boxed{\quad}$ である。

(9)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x$ を $r\sin(x+\alpha)$ の形に変形すると $\boxed{\quad}$ である。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(10)　方程式 $2^x=5$ を解くと $x=$ $\boxed{\quad}$ である。

(11)　不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x \geqq 4$ を解くと $\boxed{\quad}$ である。

(12)　関数 $f(x)=\int_2^x (t-2)(t-3)\,dt$ は，$x=$ $\boxed{ア}$ のとき，極大値 $\boxed{イ}$ をとる。

(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	ア　　イ
(6)	(　　,　　)
(7)	(　　,　　)
(8)	
(9)	
(10)	
(11)	
(12)	ア　　イ

［２］　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2\leqq 4 \\ y\geqq -\sqrt{3}x+2 \end{cases}$ の表す領域を D とする。次の各問いに答えよ。

(1)　円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=-\sqrt{3}x+2$ の交点の座標は $\boxed{(\quad,\quad)}$ と $\boxed{(\quad,\quad)}$ である。

(2)　領域 D の面積を求めると $\boxed{\quad}$ である。ただし，円周率は π とする。

(1)	(　　,　　) (　　,　　)
(2)	

［３］　関数 $y=2\sin\theta+\cos 2\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ について，$\sin\theta=x$ として，次の各問いに答えよ。

(1)　x のとりうる値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

(2)　y を x の式で表すと $y=$ $\boxed{\quad}$ である。

(3)　y が最大となるのは $\theta=$ $\boxed{\quad}$ のときである。

(1)	
(2)	
(3)	

［４］　関数 $f(x)=x^2-x-2$ について，$y=f(x)$ のグラフ上に点Ａ(1，−2)をとる。次の各問いに答えよ。

(1)　点Ａにおける接線 l_1 の方程式は $\boxed{\quad}$ である。

(2)　点Ａを通り，(1)で求めた接線 l_1 に垂直な直線 l_2 の方程式は，$\boxed{\quad}$ である。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と(2)で求めた直線 l_2 で囲まれた部分の面積は，$\boxed{\quad}$ である。

(1)	
(2)	
(3)	

平成 29 年度　数学Ⅱ

番号	配点	正答	正答率	上位群	下位群	無答率	上位群	下位群	誤答率	主な誤答例（標本全体に対する％）
［1］(1)	5	$\frac{1}{x-1}$	75.9	95.7	61.7	2.5	0.0	3.5	21.6	$\frac{x+1}{x^2-1}$(3.8)，$\frac{2}{x+1}$(2.9)，$\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$(1.2)，$x+1$(0.9)
(2)	5	$-2+2i$	65.3	88.7	33.0	3.6	0.0	5.2	31.1	i^3+3i^2+3i+1(5.0)，0(2.9)，i^3+3i-2(2.6)
(3)	5	22	71.5	82.6	53.0	2.9	0.0	0.9	25.6	4(4.8)，－14(3.3)，－32(2.4)，14(1.9)
(4)	5	$(x+1)(x-2)(x-3)$	61.3	90.4	25.2	19.2	0.9	40.0	19.5	$(x+1)(x^2-5x+6)$(3.5)，$(x-2)(x^2-2x-3)$(1.6)
(5)	5	$a=-2, b=2$	48.4	87.0	3.5	23.4	0.0	51.3	28.2	$a=2, b=2$(1.8)，$a=2, b=-2$(1.0)，$a=2, b=0$(0.9)，$a=-2, b=0$(0.7)
(6)	5	(4, 3)	42.5	61.7	15.7	10.8	3.5	17.4	46.7	$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$(4.4)，(7, 6)(3.1)，$\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$(1.8)，(－3, －4)(1.7)
(7)	5	(8, 0)	27.4	46.1	2.6	31.1	20.9	47.0	41.5	(12, 0)(5.9)，(4, 0)(5.1)，(3, 0)(4.2)，(2, 0)(3.7)
(8)	5	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	35.3	62.6	11.3	15.1	5.2	14.8	49.6	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$(12.6)，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$(4.0)，$\frac{5}{12}\pi$(2.0)，$\frac{5}{12}$(1.7)
(9)	5	$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	40.7	79.1	4.3	34.2	7.8	61.7	25.1	$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$(7.4)，$2\sin\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$(1.0)
(10)	5	$x=\log_2 5$	43.5	85.2	5.2	20.3	5.2	27.0	36.2	$\frac{5}{2}$(17.0)，5(2.3)，32(1.9)
(11)	5	$0<x\leqq\frac{1}{16}$	6.1	12.2	0.9	17.7	1.7	28.7	76.2	$x\leqq\frac{1}{16}$(20.2)，$x\geqq\frac{1}{16}$(12.6)，$x\leqq-2$(7.2)，$x\geqq-2$(5.4)
(12)	5	$x=2$ のとき極大値 0	21.3	31.3	9.6	29.0	11.3	36.5	49.7	$x=\frac{5}{2}$ のとき$-\frac{1}{4}$(2.6)，$x=3$ のとき $\frac{1}{6}$(2.5)
［2］(1)	5	(0, 2), $(\sqrt{3}, -1)$	52.6	90.4	3.5	17.6	0.0	37.4	29.8	$(\sqrt{3}, 1)$(8.4)，(2, 0)(1.7)，(0, －2)(0.9)，(0, 0)(0.6)
(2)	5	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	5.5	6.1	0.0	67.3	51.3	85.2	27.2	4π(1.5)，$\frac{\sqrt{3}}{2}$(1.2)，$2\sqrt{3}$(0.7)
［3］(1)	5	$0\leqq x\leqq 1$	40.4	73.0	6.1	30.5	0.0	61.7	29.1	$-1\leqq x\leqq 1$(13.4)，$0\leqq x\leqq 2\pi$(1.2)
(2)	5	$y=-2x^2+2x+1$	35.4	74.8	1.7	35.8	0.9	63.5	28.8	$y=-x^2+2x+1$(4.9)，$y=2x^2+2x-1$(2.2)
(3)	5	$\theta=\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$	19.4	52.2	0.0	42.5	1.7	73.0	38.1	$\frac{1}{2}\pi$(10.7)，$\frac{1}{6}\pi$(6.5)，90°(2.9)，π(2.8)
［4］(1)	5	$y=x-3$	48.3	92.2	9.6	25.8	1.7	47.8	25.9	$2x-1$(3.9)，$2x^2-3x-1$(3.2)，$2x-4$(3.0)，$-2x$(1.3)
(2)	5	$y=-x-1$	41.6	92.2	0.9	36.9	1.7	73.9	21.5	$-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$(2.2)，$-x-3$(1.6)，$-x+3$(1.1)，$-2x$(1.0)
(3)	5	$\frac{4}{3}$	26.7	59.1	0.0	55.5	6.1	88.7	17.8	2(2.3)，$\frac{2}{3}$(1.5)，$\frac{8}{3}$(1.0)，4(0.8)

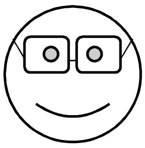
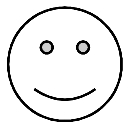
(1) 解と係数の関係を理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群） 無答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する％）
H29 ［１］ (5)	２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の２つの解が $1+i$，$1-i$ であるとき，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$ である。 （ア －2，イ 2）	48.4％ (87.0％／3.5％) 23.4％ (0.0％／51.3％)	ア 2，イ 2 (1.8％)， ア 2，イ －2 (1.0％)， ア 2，イ 0 (1.0％)， ア －2，イ 0 (1.0％)

解と係数の関係を用いて，解から２次方程式の係数を求める問題である。本問は問［１］の中で上位群と下位群の正答率の差が最も大きく，無答率は上位群が 0.0％に対して下位群は 50％以上であった。特に下位群で，解と係数の関係についての理解が不足していることが分かる。

【指導上の留意点】

正解した生徒の中にも，後に示す別の方法で解答した生徒もいると考えられるが，解と係数の関係を用いることで煩雑な計算を軽減することができる場合が多いので，きちんと活用できるように指導したい。その際「係数」⇒「解」だけではなく，本問のように「解」⇒「係数」の関係も練習を積み，「解」⇔「係数」の両方向で活用できるようにさせたい。本問の分析から特に下位群での理解不足が顕著であるので，なかなか理解の進まない生徒には以下のような誘導により，２次方程式を解く具体例から解と係数の関係の理解を深めさせるとよい。

２次方程式 $(x-3)(x-5)=0$ の解は何かな？

$x=3$，5 です。

正解。
では，$x=1$，2 を解にもつ２次方程式を言えるかな？

$(x-1)(x-2)=0$ だから $x^2-3x+2=0$ です。

では $2x^2-16x+30=0$ の解は何かな？

$2x^2-16x+30=0 \Leftrightarrow 2(x-3)(x-5)=0$
だから $x=3$，5 です。あ！さっきと一緒だ！

その通り。ではもう１度聞くけど
$x=1$，2 を解にもつ２次方程式を言えるかな？

a を実数として $a(x-1)(x-2)=0$
だから $ax^2-3ax+2a=0$ です。

大正解！
では $x=\alpha$，β を解にもつ２次方程式を言えるかな？

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ だから
$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$ です。

では２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が $x=\alpha$，β を解にもつとき，a，b，c，α，β の関係を言ってみよう。

$ax^2+bx+c=0$ と $ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$ の係数を比較して $b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$ です。

そうだね。$b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$ を変形すると解と係数の関係の公式が得られるんだよ。公式だけではなく
解 $x=\alpha$，$\beta \Leftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ という対応を理解しよう。

また，係数が全て実数である２次方程式の複素数の解が与えられた場合，実数の解が与えられるよりも情報が多くなることも意識させたい。今回の問題では例えば解として $1+i$ のみ与えられても係数を断定できる。解法としては以下の３パターンが考えられる。特に①は複素数の分野で基本的な内容であるので，本問をこの方法で解いた生徒も多かったかも知れないが，②，③も重要な考え方であるので，授業では，一つの解法を考えるだけにとどまらず，別解を考えさせる場面を設定するとよい。

① $x=1+i$ を方程式に代入して，実部と虚部の係数を比較する。
② 共役な複素数 $x=1-i$ も解であることから今回の問題と同様に考える。
③ $x=1+i$ から $x-1=i$ と変形し，両辺を２乗して $x^2-2x+1=-1 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$ より，与方程式の左辺は x^2-2x+2 を因数にもつことを利用する。

(2) 底及び真数の意味を理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H26 ［１］ (10)	不等式 $\log_2 x<3$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。 $(0<x<8)$	26.0% (50.0%／7.0%)	$x<8$ (36.0%), $x<3$ (1.8%)
H27 ［１］ (12)	不等式 $\log_{\frac{1}{3}} x>2$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。 $\left(0<x<\frac{1}{9}\right)$	13.9% (25.2%／3.5%)	$x<\frac{1}{9}$ (20.9%), $x>\frac{1}{9}$ (19.7%)
H29 ［１］ (11)	不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 4$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。 $\left(0<x\leqq\frac{1}{16}\right)$	6.1% (12.2%／0.9%)	$x\leqq\frac{1}{16}$ (20.2%), $x\geqq\frac{1}{16}$ (12.6%)

H26 年度は底の値が整数，H27 年度は底の値が分数，H29 年度は底の値が分数に加えて等号付き不等号の問題となっている。底の値，不等号の向きなどの変化に対応できなかったためか，正答率は減少している。また，上記の３題の一番多い誤答に共通している原因に真数条件を忘れていることが挙げられる。そのため，底や真数の意味をきちんと理解させ，真数条件を確認することの必要性を認識させたい。

【指導上の留意点】

真数条件を忘れてしまう原因として，真数条件の必要性と真数が０より大きい理由を理解していないことが考えられる。真数条件は底が正の値ということから導き出されるので，底の定義に戻って指導することで，真数条件の必要性と０より大きい理由を理解させたい（アプローチ①）。

さらに，グラフを用いて視覚的に捉えさせることで，真数条件についての理解を深めることができる（アプローチ②）。また，底が０と１の間の値の場合，最後の答えの不等号の向きが変わることもグラフを用いることで視覚的に捉えることができる。グラフを補足的に活用して，解答をする上での注意点を認識させたい。

アプローチ①《なぜ指数関数の定義で，底 a が $a>0$，$a\neq1$ でなければならないかを理解させ，真数条件につなげる》

$y=a^x$ について $a<0$ を考える

例えば $y=(-2)^x$ とする

$x=\frac{1}{2}$を代入して

$y=(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$

よって，$a<0$ のとき，実数の範囲で定めることができない。

つまり，指数関数を定義するには

底が正であるという制約がつく。

$a>0$ のとき

例えば $y=2^x$ とすると

x は実数なので

y は常に 0 より大きくなる（$2^x>0$ である）

また，$y=2^x \Leftrightarrow x=\log_2 y$

右辺の $\boxed{y\text{が真数}}$ であるので

よって，**真数 y は常に 0 より大きい。**

※ ただし，$y=a^x$ について $a=1$ のとき，任意の x について $y=1^x=1$ となる。

$x=\log_1 1$ より　対数の性質 $\log_a a=1$ に矛盾　よって，$a\neq1$ と定義する必要がある。

アプローチ②《グラフを用いて真数が 0 より大きい理由を視覚的に捉える》

$y=\log_a x$ について $a>0$，$a\neq1$，$x<0$ を考える

例えば $y=\log_2 x$ とする

$\boxed{\text{真数 } x}$ に-4 を代入して

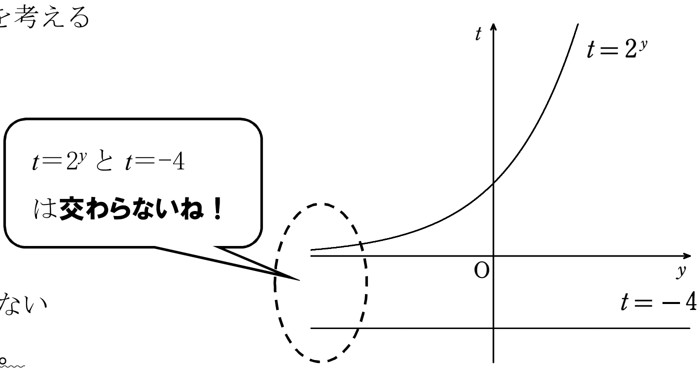
$y=\log_2(-4) \Leftrightarrow 2^y=-4$

$t=2^y$ とすると

y は実数なので $2^y>0$ である

つまり，$2^y=-4$ をみたす y は存在しない

よって，**真数 x は常に 0 より大きい。**



$\boxed{\text{例題}}$ 不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x>3$ を解きなさい。

1．$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ と $y=3$ の交点を求める。

方程式$\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$ より

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x=\frac{1}{8} \qquad \therefore\left(\frac{1}{8},\ 3\right)$$

2．$y=3$ より大きい方（上側）を強調させる。

3．グラフから答えを確認する。