(1) 式の意味を考えさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する％）
H25［１］(3)	$4x^2-9$ を因数分解しなさい。 $((2x+3)(2x-3))$	69.7%（96%／48%）	$(2x-3)^2$（3.3%），$(2x+3)^2$（0.8%）
H26［１］(6)	x^2-4y^2 を因数分解しなさい。 $((x+2y)(x-2y))$	60.8%（88%／21%）	$(x-2y)^2$（4.7%），$(x+2)(x-2)$（3.0%）
H26［１］(8)	二次方程式 $x^2-5=0$ を解きなさい。 $(x=\pm\sqrt{5})$	32.6%（67%／6%）	$\sqrt{5}$（22.0%），（0，5）（7.4%），5（3.0%）
H27［１］(8)	二次方程式 $x^2-9=0$ を解きなさい。 $(x=\pm 3)$	40.3%（62%／24%）	3（27.6%），0.9（3.2%），9（1.8%）
H30［１］(6)	（ア） $4x^2-9$ を因数分解しなさい。 （イ） 二次方程式 $4x^2-9=0$ を解きなさい。 （ア $(2x+3)(2x-3)$，イ $x=\pm\frac{3}{2}$）	（ア） 67.7%（93.1%／41.4%） （イ） 13.7%（24.1%／0.0%）	（ア） $(2x-3)^2$（4.5%），$4(x-3)(x+3)$（0.7%） （イ） $\frac{3}{2}$（21.6%），±3（5.5%）

H30［１］(6)(ア)より(イ)の正答率が 54.0 ポイント低い。因数分解について同じ問題と類題をH25 年度とH26 年度に出題しており，正答率はどちらも６割以上であった。二次方程式を解くH26 年度とH27 年度の問題の正答率はどちらも因数分解の問題より 20 ポイント以上低かった。このことから因数分解と方程式を解くことを結び付けられていないことが分かる。誤答例に±を付け忘れた形が多いのは，因数分解を利用せず $x^2=○^2$ と変形し，$x=○$ と答えてしまったと予想できる。

【今後の指導に向けて】

方程式はさまざまな分野に関係がありとても重要である。中学校では「x の一次の項がない二次方程式は，$x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$」と学んだ後に，一次の項がある二次方程式は因数分解すると学ぶ。そのため今回のような問題は因数分解をして解くことに慣れていない。しかし高等学校ではこの解き方しか知らないと二次不等式で①のような間違いをしてしまう。この間違いをしないために，因数分解を利用して方程式を解くことができるように次のように指導するとよい。

> ①　二次不等式 $4x^2-9\geqq 0$ を解け。
> $4x^2\geqq 9 \Rightarrow x^2\geqq\frac{9}{4} \Rightarrow x^2\geqq\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x\geqq\pm\frac{3}{2}$

$\boxed{例１}$　$2\times3=6$　$-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=4$　$0\times5=0$　$-\sqrt{3}\times0=0$　**←積が0になるときは必ず0をかけている！**

●×▲＝0 ならば ●＝0 または▲＝0

$\boxed{例２}$　$2x=0$

2 かける x が 0 になる。2 は 0 ではないから，かけて 0 になるためには x が 0 でなければならない。
（x の係数で両辺を割るのではなく，積を利用する）

$\boxed{例３}$　$x^2=2x \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$

x かける $(x-2)$ が 0 になる。　**←　●＝x で▲＝x−2 だ！**
どちらも文字を含むので 0 になる可能性があるから，かけて 0 になるにはどちらかが 0 になる。
$x=0$ または $x-2=0 \Rightarrow x=0$ または $x=2$

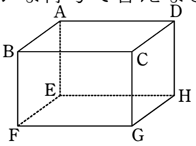
$\boxed{例１}$でかけて 0 になる場合，必ず 0 を因数にもつことが分かる。その性質を方程式の解法に使えることを確認する。$\boxed{例２}$は 2 が 0 でない定数であり x が変数である。そのため x だけしか 0 になるパターンがない。$\boxed{例３}$はどちらも文字があるので，0 となる可能性が二つある。解は $x=0$，2 であるが，これを「0 と 2」と言ってしまうと生徒が「and」と勘違いしてしまう恐れがあるので，「x は 0 または 2」と数式の意味が理解できるように発言するとよい。①の間違いは因数分解を利用できないだけでなく，$\pm\frac{3}{2}$ を「$+\frac{3}{2}$ または$-\frac{3}{2}$」と理解しておらず，一つの値と捉えてしまっていることも原因である。「かつ」と「または」を何となく理解しないようにするために，ふだんの授業から問題を解く方法だけでなく，意味を考えることができるようにしたい。

また，$\boxed{例３}$は両辺を０になる可能性のある変数 x で割ってはならないことも確認したい。この理解が曖昧だと数学Ⅱの三角関数の方程式で②のような間違いをしてしまう。両辺に同じ項があると，０ でない係数と同じように割ってしまうことがある。変数で割ってしまうと，正しい解を求められなくなることを簡単な方程式の段階から確認させたい。

$\boxed{例３}$　$x^2=2x$　両辺 x で割り
$x=2$　**← $x=0$ がでてこない！？**

②　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき方程式 $2\sin x\cos x = \sin x$ を解け。
両辺 $\sin x$ で割り　$2\cos x=1$　⇒　$\cos x=\frac{1}{2}$　⇒　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

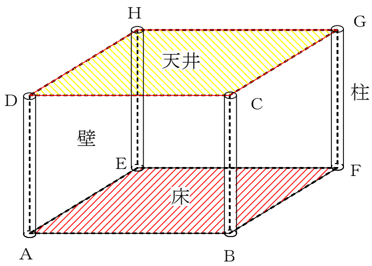
(2) 具体的に空間図形をイメージさせたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H30 ［１］ (13)	右の図での直方体について，直線ＢＣと垂直な平面の組であるものを，次のア～エの中から１つ選び，かな符号で答えなさい。 ア　ＡＢＣＤとＥＦＧＨ イ　ＡＢＣＤとＢＦＧＣ ウ　ＡＢＦＥとＤＣＧＨ エ　ＢＦＧＣとＡＥＨＤ  （ウ）	26.1% (27.6%／17.2%)	イ（51.5%）， ア（11.0%）， エ（ 8.6%）

「イ」と答えた割合が 51.5%と正答よりも 25.4 ポイント高かった。これは「直線ＢＣと垂直」という条件を考えずに選択肢の二つの平面が垂直な平面の組であるものを選んでしまったことと，直線と平面の位置関係を正しく理解していないためであると考える。

【今後の指導に向けて】

生徒は空間図形を頭の中で考えるのが苦手である。イメージできるように直方体を部屋に例えるとよい。図のように平面を床，天井，壁，辺を柱と捉えさせる。柱が床と天井と垂直なのは，ふだんの経験から想像しやすいので，今回の問題を次のように生徒と会話しながら理解させることができる。



先生：「問題の直方体を教室に例えてみよう。分かりやすくするために，４本の柱のうちの１本をＢＣとしてみると，床がＡＢＦＥで天井がＤＣＧＨになるね。」
先生：「それでは，直線ＢＣと垂直な平面の組はア～エのどれでしょう？」
太郎：「ＡＢＣＤとＢＦＧＣが垂直だからイです。」
先生：「“直線ＢＣと垂直”って条件を忘れてないかな？」
花子：「あ！」
先生：「直方体を部屋と考えてみよう。ＢＣを柱にすると残りの柱はどこか考えてみよう。」
花子：「教室を見ると柱は全部床からまっすぐになっているね。」
太郎：「同じ向きだから柱と柱は平行だね。この直方体ではＡＤ，ＥＨ，ＦＧが柱になるんだ。」
花子：「壁は柱と柱に挟まれているから垂直じゃないね。だからイはだめだったんだ！」
先生：「床と天井は柱とどんな関係かな？」
花子：「教室の壁を見ると長方形だから，天井と柱は垂直に交わっているね！」
太郎：「床も同じことが言えるね！」
花子：「柱に垂直なのは床と天井だからウのＡＢＦＥとＤＣＧＨが答えだね！」

床//天井（に含まれる辺）
床（天井）⊥壁，柱

このように，具体的に考えることで正解にたどり着くことができる。この考え方は，直線に対して平面の位置を考えるだけでなく，平面に対して直線や平面の位置がどうなっているか考えるのに適している。基準になる床を決めることで天井と壁が定まるので，平行か垂直かすぐに判断することができる。

また，高等学校ではねじれの位置にある２直線のなす角を定義しているが，中学校の内容では同一平面上にない２直線のなす角は考えない。そのため今回の問題でＢＣ⊥ＡＥと理解していない。中学校の学習内容に注意して指導するとよい。