(1) 共通因数の見つけ方を理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	無答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H25［１］(3)	$(x^2-1)^2-3(x^2-1)$ を因数分解しなさい。 $((x+1)(x-1)(x+2)(x-2))$	8.0%（12.0%／2.0%）	5.0%（0.0%／7.0%）	$(x^2-1)(x^2-4)$（51.4%），x^4-5x^2+4（12.9%）
H30［１］(3)	$ab+a-b-1$ を因数分解しなさい。 $((a-1)(b+1))$	45.4%（74.1%／23.8%）	27.4%（12.9%／42.9%）	$a(b+1)-b-1$（4.0%），$a(b+1)-(b+1)$（2.9%）

H25 年度の問題では，正答率が 8%に対して，$(x^2-1)(x^2-4)$ と答えた生徒が 51.4%いる。この問題から，複雑な式であっても共通因数である (x^2-1) でくくることはできたが，その後の因数分解ができていないということが分かる。H30 年度の問題では，無答率が 27.4%と［１］の中で一番高い。これは四つの項の全てに共通する因数が見つけられず，知っている公式も使えないことからどうしてよいか分からなくなっていると考えられる。誤答例の中には，a でくくることはできている生徒もいるが，$(b+1)$ でくくり因数分解を完成させることまでは至っていない。

【今後の指導に向けて】

因数分解の基本である「共通因数でくくる」ことについては，中学校で既習していることであるが，降べきの順に並べることや最低次数の文字でくくることに慣れていない。生徒にとっては「因数分解＝公式利用」という考えが強くあり，どうしても公式に頼りがちになってしまう。また，複雑な式の場合，式の一部分の共通因数を見つけるまでにとどまり，因数分解の完成形が何だったか見失ってしまうこともよくある。このような場合には，次の二つの指導が考えられる。

その１　因数分解のゴールが何なのか，目標を明らかにさせる

$ab-bc-ca+c^2$

$=ab-ca-bc+c^2$

$=a(b-c)-c(b-c)$

a について降べきの順にするぞ！

共通因数が見つかった！よし！完成だ！

○－△の形で終わっていいの？
$M=b-c$ とおいてみたら？

あっ！！

〈続き〉

$M=b-c$ とおくと

$a(b-c)-c(b-c)=aM-cM$

$=(a-c)M$

$=(a-c)(b-c)$

その２　公式を利用する問題でも，実は共通因数でくくっていることも認識させる

解法①

$x^2-5x-36$

$=x^2+\{4+(-9)\}x+4\times(-9)$

$=(x+4)(x-9)$

解法②

$x^2-5x-36$

$=x^2+\{4+(-9)\}x+4\times(-9)$

$=x^2-9x+4x-36$

$=x(x-9)+4(x-9)$

$=(x+4)(x-9)$

今まで公式に頼っていたけど，共通因数でくくってもできるんだ！！

(2) 約数の個数を正しく理解させたい

問題番号	問題（正答）	正答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する%）
H29［１］(9)	$N=1\times2\times3\times\cdots\times20$ とする。N は 3 で最大何回割り切れるか求めなさい。 (8)	14.7%（30.1%／5.6%）	6（24.8%），21（9.6%）
H30［１］(7)	$N=1\times2\times3\times\cdots\times12$ とする。N は 3 で最大何回割り切れるか求めなさい。 (5)	23.9%（49.0%／11.6%）	4（18.1%），10（13.3%）

H29 年度の問題について，誤答例の中で「6」と答えたのは，1 から 20 の数字に「3 の倍数は何個あるか」と考え，3，6，9，12，15，18 の 6 個と導いたのではないかと推測される。また，「21」と答えたのは，3 は 1 個，6 は 3＋3 だから 2 個，9 は 3＋3＋3 だから 3 個のように考え，1＋2＋3＋4＋5＋6＝21 で 21 回と導いたのではないかと推測される。H30 年度で類題を出題したところ，H29 年度の誤答と同様の傾向が見られた。

【今後の指導に向けて】

問題文の読み取りや捉え方に課題があり，「3 で割り切れるか」という問いに対して，かけ算なのか足し算なのか，というところに迷いが生じていると考えられる。指数関数などにも発展する内容であり，生徒に誤答例を紹介することで，何が間違っているかを考えさせる指導をするとよい。

H30［１］(7)の問題の分析

N の中に 3 の倍数の整数は，3，6，9，12 の 4 個

$3=3\times1$，$6=3\times2$，$9=3\times3$，$12=3\times4$

つまずく生徒の現状	分析
〈$9=3\times3$ が気付けていない生徒〉 3，6，9，12 が 3 の倍数で 4 個あるから，4 個。	このような生徒は，$9=3\times3$ と 1 つ 3 が重複していることが気付けていない。
〈倍数を和としてしまっている生徒〉 3＝3（1 個），6＝3＋3（2 個），9＝3＋3＋3（3 個）， 12＝3＋3＋3＋3（4 個）　合計 1＋2＋3＋4＝10 個。	このような生徒は，「12 は 3 で何回割れるか」と考えずに，「12 の中に何個 3 があるか」ととらえてしまって，「和」と「積」の概念が確立できていないと考えられる。

3 は 1 回，6 は 1 回，9 は 2 回，12 は 1 回，3 で割り切れるので，N は 3 で最大（1＋1＋2＋1＝）5 回割り切れる。

素因数分解で考えた場合

$N=1\times2\times3\times\cdots\times12$ を素因数分解すると，

$N=2^{\bigcirc}\times3^{\square}\times5^{\triangle}\times\cdots$ と表すことができ，

このうち，$3^{\square}$ の□の値が分かればよい。

3 の倍数について考えると，3，6，9，12

の 4 個であり，これらの積を考えると，

$3\times6\times9\times12=3\times2\cdot3\times3\cdot3\times2\cdot2\cdot3$

$=2^3\times3^5$

よって，3 で 5 回割り切れる。

指数関数などでの関連事項

指数法則

$\boxed{誤答}$ $2^2\times2^3=2^{2\times3}=2^6$

$\boxed{正答}$ $2^2\times2^3=2^{2+3}=2^5$

※$2^2\times2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)=2^5$ と指導したい。

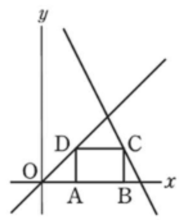
$\boxed{誤答}$ $(2^2)^3=2^{2+3}=2^5$

$\boxed{正答}$ $(2^2)^3=2^{2\times3}=2^6$

※$(2^2)^3=2^2\times2^2\times2^2=(2\times2)\times(2\times2)\times(2\times2)=2^6$

と指導したい。

⑶　座標平面上の点を文字で置かせたい

問題番号	問題（正答）
H30［３］	図のように，２点Ａ，Ｂは x 軸上にあり，Ａの x 座標はＢの x 座標より小さい。点Ｄは直線 $y=x$，点Ｃは直線 $y=-2x+6$ 上にある。このとき，次の問いに答えなさい。 (1)　２直線 $y=x$ と $y=-2x+6$ との交点の座標を求めなさい。　（　(2，2)　） (2)　四角形ＡＢＣＤが正方形になるとき，点Ｃの座標を求めなさい。 （ $\left(\frac{12}{5},\ \frac{6}{5}\right)$ ） 

問題番号	正答率（上位群／下位群）	無答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する％）
H30［３］	(1)　86.6％（99.3％／71.4％）	4.2％（0.0％／6.8％）	(4，4)（1.6％），(3，3)（1.0％），(6，6)（0.7％）
	(2)　18.6％（38.1％／0.7％）	28.7％（21.1％／36.7％）	$\left(\frac{5}{2},\ 1\right)$（6.8％），(2，1)（6.2％），(3，1)（4.1％）

⑴で座標平面上の２直線の交点の座標を求め，⑵でその２直線上の点と x 軸上の２点でできる四角形が正方形になるときの頂点の座標を求める問題を出題した。⑴の正答率は 86.6％とほとんどの生徒が理解していることが分かる。２直線の交点の座標を求めることに関しては，２直線の式を利用した連立方程式を解けばよいということが定着している。座標平面の性質を深く理解していなくても，計算のみで解答が可能である。

一方，⑵の正答率は 18.6％で，⑴と比較すると 70 ポイント近く低かった。また，⑵の無答率は，上位群・下位群ともに 20％を超えており，上位群・下位群関係なく解答につまずく傾向にある。問題の図に四角形ＡＢＣＤが与えられており，視覚的に座標を推測したと思われる誤答が多かった。

【今後の指導に向けて】

中学校では，座標平面上の点の座標を文字で置くことに慣れていない。高等学校では，求めたい座標を文字で置くことは，関数の応用，図形と方程式，接線の方程式，媒介変数表示などで頻繁に利用される。問題を解く上で，座標の設定は初動のポイントになってくるので，きちんと理解させてから計算へとつなげていきたい。

<u>文字のおき方についての指導</u>

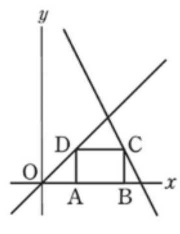
今回の問題を解説する際には，次のような指導をするとよい。

手順１　点Ａ(a ，０) としたとき，点Ｂ，Ｃ，Ｄを a を用いて表してみよう。

手順２　点Ｂ(b ，０) としたとき，点Ｂ，Ｃ，Ｄを a を用いて表してみよう。

手順３　点Ａ(a ，０)，点Ｂ(b ，０) としたときはどうか。

このように，一つの点だけを文字において指導するのではなく，さまざまな点を文字においた場合を考えさせる。そうすることで，座標を文字でおくということに慣れさせるとともに，自信を付けさせる。



また，次のような問題を解くときも，座標を文字でおくことについて丁寧に指導するとよい。

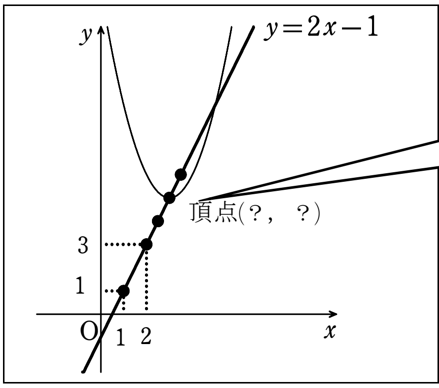
問題　放物線 $y=x^2$ を平行移動した曲線で，点 (4，6) を通り，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

上記の問題について，『頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある　⇒　頂点の座標は $(p,\ 2p-1)$ と置ける』を理解させるとき，以下の手順で確認していく。

手順①　問題文で，頂点の座標が直接示されていないので，頂点の座標が必要であることを確認する。
（放物線の方程式は，頂点とその他の通る１点で求めることができる。）

手順②　問題文で，「頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある」と示されていることを確認する。

手順③　グラフを用いて，頂点の存在範囲を確認する。



直線 $y=2x-1$ 上のどこかに頂点がある！！！

手順④　直線上の点を，具体的な数値で表す。

$x=1$　のとき　$y=2\times1-1=1$　→　点（1，1）
$x=2$　のとき　$y=2\times2-1=3$　→　点（2，3）
$x=3$　のとき　$y=2\times3-1=5$　→　点（3，5）
⋮

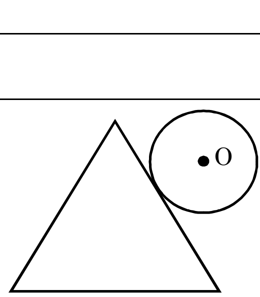
x 座標が分かれば，関数 $y=2x-1$ を利用して，y 座標が定まる！！！

手順⑤　直線上にある頂点の x 座標を p と置いたときの y 座標を，p を用いて表す。

$x=\mathbf{1}$　のとき　$y=2\times\mathbf{1}-1=$ 1　→　頂点（1，1）
$x=\mathbf{2}$　のとき　$y=2\times\mathbf{2}-1=$ 3　→　頂点（2，3）
$x=\mathbf{3}$　のとき　$y=2\times\mathbf{3}-1=$ 5　→　頂点（3，5）
⋮
$x=\boldsymbol{p}$　のとき　$y=2\times\boldsymbol{p}-1=$ $2p-1$　→　頂点（p，$2p-1$）

頂点の座標を，文字 p を用いて置くことができた！！！

(4)　図形の運動をイメージさせたい

問題番号	問題　（正答）		
H30［５］	図のように，１辺の長さが 3cm の正三角形があり，この周りにそって半径 1cm の円がちょうど１周したとき，次の問いに答えなさい。ただし，円周率は π とする。 (1)　円Ｏの中心の移動距離を求めなさい。　（$9+2\pi$ cm） (2)　円Ｏが通過した部分の面積を求めなさい。　（$18+4\pi$ cm^2）  		
	正答率（上位群／下位群）	無答率（上位群／下位群）	主な誤答例（標本全体に対する％）
	(1)　9.5%（16.3%／1.4%）	10.2%（5.4%／15.6%）	15 cm　(19.0%)， 9 cm　(9.1%)， 12 cm　(9.0%)
	(2)　6.0%（12.9%／0.0%）	33.4%（26.5%／42.9%）	$\frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^2　(3.3%)， $9+\pi$ cm^2　(3.1%)

図形の運動について正確にイメージできるかを問う問題であった。本問の(2)は，テストＢの問題中最も正答率が低く，全体でも 6.0%，下位群は 0.0%であった。また無答率も全体が 33.4%，下位群が 42.9%という結果であり，他の問題と比較すると高い無答率であった。このことから，生徒は図形の運動をイメージすることが苦手であることがうかがえる。

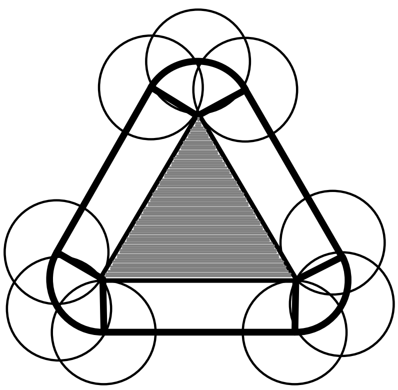
(1)の誤答で最も多かった「15cm」は，円の中心が１辺の長さ 5cm の正三角形を描くと勘違いしたものと予想される。(2)では，この正三角形の面積を求めた誤答が一番多かった。

【今後の指導に向けて】

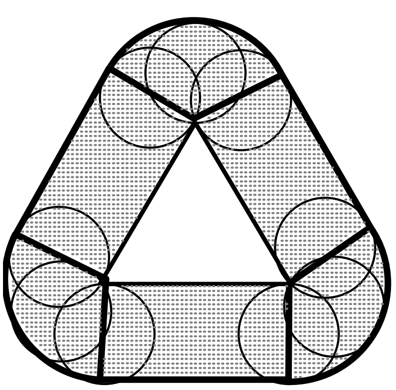
この問題を解くカギは，円が正三角形の頂点付近でどのように動くかを把握することにある。具体的には(1)では円Ｏの中心が半径 1cm, 中心角 120° の扇形の弧を描き, (2)では円Ｏの外縁が半径 2cm, 中心角 120° の扇形の弧を描くことである。しかし，このことを想像だけで理解するのは難しい。実際に模型を作って確認するか，ICT を用いて図形をかき，図形の動きを見せることで，視覚的に捉えることができるよう指導したい。これまでの図形に関する学習は，主に紙あるいは黒板などの媒体を用いていたが，それらで表現できる対象は平面的かつ静的になりがちだった。しかし，バーチャルリアリティ等，コンピュータを利用した画像が日常生活に浸透している時代にあって，図形についての立体的あるいは動的な理解は，“新しいリテラシー”として必要とされるものと言える。

ICT を活用して，視覚的に捉えさせる

(1)　円Ｏの中心の，運動の軌跡



(2)　円Ｏの，運動の軌跡

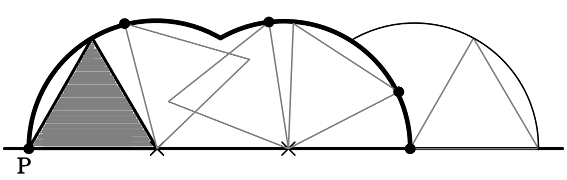


例題　１辺の長さが 3cm の正三角形を，直線上をすべらないように１回転させたとき，次の問いに答えなさい。ただし円周率は π とする。

(1)　正三角形の１つの頂点の移動距離を求めなさい。

(2)　正三角形が通過した部分の面積を求めなさい。

(1) 太線は頂点Ｐの軌跡



(2) 色がついた部分は正三角形の通過領域