同じものを含む順列の求め方

同じものを含む順列の問題で，“区別がつかない”ということを計算にどのように反映させたらいいか理解できない生徒がいる。順列を利用して求める方法と組合せを利用して求める方法があるが，どちらにしても公式を暗記させて機械的に求めさせるのではなく，そのように求める理由を意識させて計算させると定着を図ることができる。

【指導上の留意点】

１　順列を利用して解く方法

番号１，２，３が付いた区別ができる玉３個の並べ方と区別のつかない玉３個の並べ方との違いを説明し，区別がつかない場合の順列を求めるときにはどうすればいいのかをまとめる。

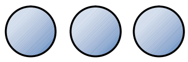
(1) 番号１，２，３が付いた玉３個を横一列に並べる方法をすべて書きなさい。

［解］

①②③，①③②，②①③，②③①，③①②，③②①

(2) がつくものの並べ方と区別がつかないものの並べ方区別にはどのような関係があるかを答えなさい。

［解］区別がつかない３つの玉の並べ方は１通りである。



区別がつくものの並べ方は，区別のつかないものの並べ方に対し，番号の付け方，つまり，玉の数の階乗倍になっている。

(導入問題)

(1) a が３つ，b，c，d，e が各１つある。これらの文字を１列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。

［解］３つの a を，区別がつく a_1，a_2，a_3 とすると，１列に並べる方法は，７！となる。

しかし，区別がつかない３つの a を，a_1，a_2，a_3 とすることにより，３！通り重複していることになるから，

$$\frac{7!}{3!}=840$$ **通り**

(2) a が３つ，b が２つ，c，d が各１つある。これらの文字を１列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。

［解］３つの a を，区別がつく a_1，a_2，a_3，２つの b を，区別がつく b_1，b_2 とすると，１列に並べる方法は，７！となる。

しかし，区別がつかない３つの a を，a_1，a_2，a_3 とすることにより，３！通り重複し，区別がつかない２つの b を，b_1，b_2 とすることにより，２！通り重複していることになるから，

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$$ **通り**

２　組合せを利用して解く方法

区別のつかないものを置く場所を，組合せを利用して先に決定し，その後，区別がつくものを残ったところに並べる。

(導入問題)

(1) a が３つ，b，c，d，e が各１つある。これらの文字を１列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。

［解］

７つの文字を並べるので，右のように７つの場所を作る。

最初に，a を置く３箇所を決定する。７つの場所から３つの場所を選ぶ組合せなので，${}_7\mathrm{C}_3$通り。残った文字を，残りの箇所に並べる方法は，４！ 通り。よって，

${}_7\mathrm{C}_3\times 4!=840$ 通り

(2) a が３つ，b が２つ，c，d が各１つある。これらの文字を１列に並べる方法は何通りあるか求めなさい。

［解］

７つの文字を並べるので，右のように７つの場所を作る。

最初に，a を置く３箇所を決定する。７つの場所から３つの場所を選ぶ組合せなので，${}_7\mathrm{C}_3$通り。

次に，b を置く２箇所を決定する。残りの５つの場所から２つの場所を選ぶ組合せなので，${}_4\mathrm{C}_2$通り。残った文字を，残りの箇所に並べる方法は，２！ 通り。よって，

${}_7\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 2!=420$ 通り

【具体的な指導】

（例）赤玉３個，白玉４個を横１列に並べる方法は何通りか。

（解１）赤玉３個と白玉４個が区別できるとすると，７!通りの並べ方がある。

しかし，赤３個，白４個は区別が付かないから，赤玉に関して３！ 通り，白玉に関して４！ 通り重複しているから，並べる方法は

$$\frac{7!}{3!\cdot 4!}=35 \text{ 通り}$$

（解２）

左７箇所のうち３箇所選んで赤３個を入れる入れ方と同じ。

$${}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35 \text{ 通り}$$