２元１次不定方程式の整数解

x，y を未知数とする方程式 $ax+by=c$ を二元一次方程式といい，解が無数にある方程式を不定方程式，方程式の解のうち，整数のものを整数解という。ここでは，二元一次不定方程式の解法について考察する。

最初に確認事項として以下の点を挙げておく。

【定理】不定方程式 $ax+by=c$ （a，b，c は整数）が整数解をもつための必要十分条件は，c が a と b の最大公約数の倍数となっていることである。

【定理の系】整数 a と b が，互いに素であるとき，不定方程式 $ax+by=1$ は，必ず整数解をもつ。

【具体的な指導法】

$\boxed{1}$ 不定方程式を満たす解を１つでも見つけることができれば，一般解を求めることができる。

（証明） $ax+by=c$ の特殊解を（x_0，y_0）とする。

$ax+by=c$ ･･･① $\qquad$ $ax_0+by_0=c$ ･･･②

①－② より，$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

よって，媒介変数 t を用いて，一般解は（x，y）＝（x_0+bt，y_0-at）と表せる。

それでは，この特殊解を求める方法について，具体的な例を用いて以下にまとめる。

［例題］ 等式 $24x+17y=1$ を満たす整数 x, y の組を１つ求めよ。

（解法１） ユークリッドの互除法を活用する。

ユークリッドの互除法により，

$24=17\times 1+7$ ･･･①

$17=7\times 2+3$ ･･･②

$7=3\times 2+1$ ･･･③

この結果を逆にたどっていく。

③より，

$1=7-3\times 2$ ･･･④

②より，$3=17-7\times 2$ とできるので，この結果を④に代入し，

$$\begin{aligned}1&=7-3\times 2\\&=7-(17-7\times 2)\times 2\\&=5\times 7-17\times 2 \quad \cdots⑤\end{aligned}$$

①より，$7=24-17\times 1$ とできるので，この結果を⑤に代入し，

$$\begin{aligned}1&=5\times(24-17\times 1)-17\times 2\\&=5\times 24-7\times 17\end{aligned}$$

以上の結果から，

$24\times 5+17\times(-7)=1$

となるので，$24x+17y=1$ を満たす特殊解として，

（x，y）＝（５，－７）

が得られる。

（解法２）　ユークリッドの互除法の筆算の結果を活用する。

ユークリッドの互除法を筆算で行う方法がある。次のような方法が知られている。

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 2 & & 2 & & 1 \\
3 & \big) 7 & & \big) 17 & & \big) 24 \\
 & 6 & & 14 & & 17 \\
\hline
 & 1 & & 3 & & 7
\end{array}
\qquad \text{または} \qquad
\begin{array}{r|c|c|l}
1 & 24 & 17 & 2 \\
 & 17 & 14 & \\
\cline{2-3}
2 & 7 & 3 & \\
 & 6 & & \\
\cline{2-2}
 & 1 & &
\end{array}
$$

ここで，最初のところの，24 を a，17 を b と置き換えて，同じ計算をしてみると，

$$
\begin{array}{rccc}
 & 2 & 2 & 1 \\
-2a+3b & \big)\ a\ \ -b & \big)\ b & \big)\ a \\
 & -4a+6b & 2a-2b & b \\
\hline
 & 5a\ -7b & -2a+3b & a-b
\end{array}
\qquad \text{または} \qquad
\begin{array}{r|c|c|l}
1 & a & b & 2 \\
 & b & 2a-2b & \\
\cline{2-3}
2 & a-b & -2a+3b & \\
 & -4a+6b & & \\
\cline{2-2}
 & 5a-7b & &
\end{array}
$$

となる。この結果から，　$5a-7b=1$　であることが分かる。

よって，a と b を 24 と 17 に戻すと，

　　24×５＋17×(−7)＝１

となることから，特殊解として

　　$(x,\ y)$ ＝（５，－７）

が得られる。

実際に，a に 24，b に 17 を代入してみると，
５×24－７×17 ＝ 120－119 ＝ 1
となり，計算が正しいことが分かる。

（解法３）　小さい方の係数でくくり，係数を小さくして，特殊解を探しやすくする。

$24x+17y=1$ を変形して

　　$17(x+y)+7x=1$

係数 24 と 17 のうち，小さい方の 17 でまとめる。
そして，まとめた方を他の文字に置き換える。

ここで，

　　$x+y=a$　（a は整数）…①

とおくと，上の式は，

　　$17a+7x=1$

この式を変形して，

　　$7(2a+x)+3a=1$

係数 17 と７のうち，小さい方の７でまとめる。
そして，まとめた方を他の文字に置き換える。

ここで，

　　$2a+x=b$　（b は整数）…②

とおくと，上の式は

　　$7b+3a=1$

この式を満たす整数解を探して，

　　$(a,\ b)$ ＝（－２，１）

この結果を，②に代入すると，$x=5$

①に代入して，$y=-7$

以上より，$24x+17y=1$ を満たす特殊解として，

　　$(x,\ y)$ ＝（５，－７）

が得られる。

（解法４）　連立方程式の掃き出し法のように，係数の列から特殊解を求める。

連立方程式の掃き出し法は，左辺の係数行列に右辺の定数ベクトルを合わせた，拡大係数行列を用いて，連立方程式の解を求める方法である。操作としては，

(1)　１つの行を定数倍してもよい。

(2)　１つの行を定数倍したものを他の行に加えることができる。

(3)　２つの行を入れ替えてもよい。

の基本変形を行って求める。この操作と同じような操作をして１次不定方程式の特殊解を求めることができる。

	x	y	$24x+17y$
(例)	2	−1	31

右のような表を書いて求めるのだが，手順を説明する前に，表の作り方と可能な操作の説明をする。

表の作り方は簡単で，例えば，$x=2$，$y=-1$ ならば，$24x+17y=31$ となるので，その結果を記入する。次に操作方法を説明する。

(1)　１つの行を定数倍してもよい。

例えば，先ほどの例を２倍して $x=4$，$y=-2$ としてみる。$24x+17y$ の欄は 62 となる。この計算が合っているかは，実際に代入して確認してもいいし，証明も容易である。

	x	y	$24x+17y$
(例)	2	−1	31
２倍	4	−２	62

(2)　１つの行を定数倍したものを他の行に加えることができる。

例えば，先ほどの例と，２倍したものを加えてみる。$x=6$，$y=-3$ となり，$24x+17y$ は 93 となる。この計算が合っているかは，実際に代入して確認してもいいし，証明も容易である。

	x	y	$24x+17y$
(例)	2	−1	31
２倍	4	−２	62
和	6	−３	93

以上の操作を繰り返して，$24x+17y$ が“１”となるような x と y を求めればよい。

<作業１>　$x=1$，$y=0$ のときと，$x=0$，$y=1$ のときを記入し，①，②とする。

<作業２>　足したり，引いたり，あるいは定数倍したりして，$24x+17y$ の欄の数字を小さくし，最終的に１にする。

③＝①－②

④＝③×５－②×２

	x	y	$24x+17y$
①	1	0	24
②	0	1	17
③	1	−１	7
④	5	−７	1

以上の結果から，$24x+17y=1$ を満たす x と y として，$x=5$，$y=-7$ が得られる。

（演習問題）　等式　$34x+29y=3$　を満たす整数 x, y の組を１つ求めよ。

（解説）　$x=1$，$y=0$ のときと，$x=0$，$y=1$ のときを記入し，①，②とする。

今回は，右辺が３となるように計算する。

③＝①－②

④＝③×６－②

⑤＝③×３

	x	y	$34x+29y$
①	1	0	34
②	0	1	29
③	1	−１	5
④	6	−７	1
⑤	18	−21	3

以上の結果から，$34x+29y=3$ を満たす x と y として，$x=18$，$y=-21$ が得られる。

（解法５）　合同式を利用する。

$24x+17y=1$　…①より，

$24x \equiv 1 \pmod{17}$

$24x \equiv 7x \pmod{17}$ より，上の式は

$7x \equiv 1 \pmod{17}$

よって

$7x = 17k+1$ （k はある整数）　…②

とおくと，

$17k \equiv -1 \pmod{7}$

$17k \equiv 3k \pmod{7}$ より，上の式は

$3k \equiv -1 \pmod{7}$

よって，

$3k = 7l-1$ （l はある整数）　…③

とおく。

③で，$l=1$ とすれば $k=2$ となる。

②より，$x=5$

①より，$y=-7$

以上より，$24x+17y=1$ を満たす特殊解として，

（x，y）＝（５，－７）

が得られる。

$\boxed{2}$　整数になるための条件を利用すると，一般解を求めることができる。先の例を用いて解法を紹介する。

（例題）　等式　$24x+17y=1$　を満たす整数 x, y を１つ求めよ。

$24x+17y=1$ を変形して，$y=\dfrac{1-24x}{17}=-x+\dfrac{1-7x}{17}$　　…①

ここで，x と y が整数なので，$1-7x$ は 17 の倍数である。

そこで，$1-7x=17k$　（k は整数）　と置き，変形して，$x=-2k+\dfrac{1-3k}{7}$　　…②

ここで，x と k が整数なので，$1-3k$ は７の倍数である。

そこで，$1-3k=7l$　（l は整数）　と置き，変形して，$k=-2l+\dfrac{1-l}{3}$　　…③

ここで，k と l が整数なので，$1-l$ は３の倍数である。

そこで，$1-l=3m$　（m は整数）　と置き，変形すると，$l=-3m+1$

この結果を，③に代入すると，$k=7m-2$

この結果を，②に代入すると，$x=-17m+5$

この結果を，①に代入すると，$y=24m-7$