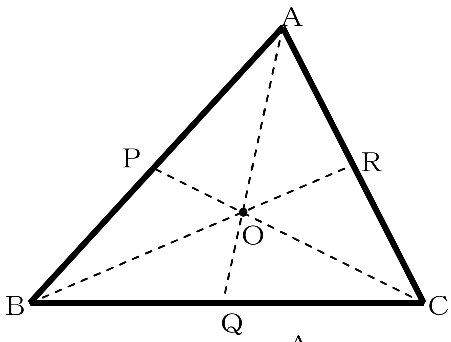
チェバの定理・メネラウスの定理

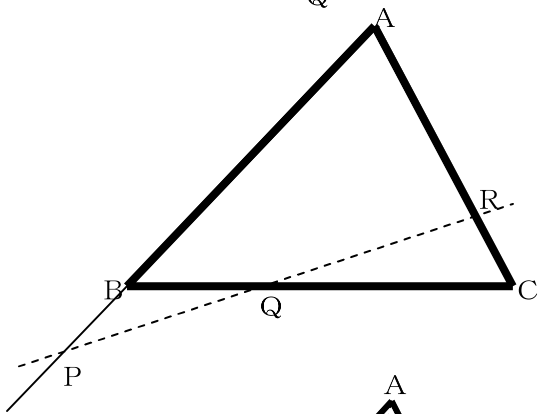
線分比を求める際に利用すると大変便利な２つの定理がチェバの定理とメネラウスの定理である。どちらの定理も使い方は単純で，覚えやすく，簡単に線分比を求められることから，知っておくと便利な定理であるが，頼りすぎると，ベクトルの学習や解析幾何（図形と式）の学習などにも影響が出るので，万能薬のように指導するのは控えた方がよい。



【チェバの定理】

△ＡＢＣの３つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃと，点Ｏを結んだ直線が，３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡまたはその延長と交わる点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒとする。このとき，次の式が成り立つ。

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$



【メネラウスの定理】

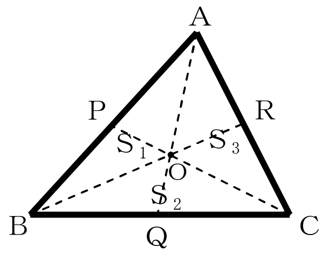
△ＡＢＣの３つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃと，一本の直線が，３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡまたはその延長と交わる点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒとする。このとき，次の式が成り立つ。

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

（証明）

ここでは，三角形の面積比を使って２つの定理を証明する方法を紹介する。

右図のように，$\triangle OAB=S_1$，$\triangle OBC=S_2$，$\triangle OCA=S_3$とする。

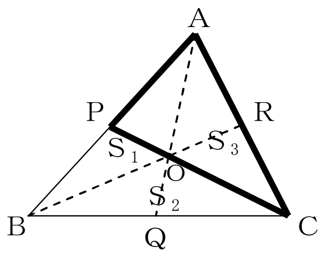


（チェバの定理の証明）

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1}{S_3}\cdot\frac{S_2}{S_1}=1$$

（メネラウスの定理の証明）

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PO}{OC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{S_3+S_2}{S_2}\cdot\frac{S_1}{S_2+S_3}\cdot\frac{S_2}{S_1}=1$$



【留意事項】

チェバの定理・メネラウスの定理のどちらにも共通することは，分数式の積が１になることと，その式の線分のとり方が，スタートの点から一筆書きで一周し，スタートした点でゴールになるということである。この，一筆書きで１周まわり，積が１になるということから，指導者によっては，『１周まわってワン』と印象付けている場合もある。

$\boxed{1}$　一周する三角形を意識させる。

図形の問題では，図の中に複数の三角形があるので，どの三角形を一周するかを意識させることが大切である。特にメネラウスの定理を使うときは，延長線上の点があり，混乱しがちなので，チェバの定理を使うとき以上に一周する三角形を意識させる必要がある。

$\boxed{2}$ 立式のポイント

式を変形すると分かるが，この式の立て方には自由度があり，簡単に立式できることが分かる。

◆ スタートする点はどの点からでもよい。

$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}=1$ を変形すると，

$\Rightarrow \dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}\cdot\dfrac{AP}{PB}=1$・・・点Ｂをスタートしたとして立てた式になる。

$\Rightarrow \dfrac{QC}{CR}\cdot\dfrac{RA}{AP}\cdot\dfrac{PB}{BQ}=1$・・・点Ｑをスタートしたとして立てた式になる。

このように，スタートする点は，どの頂点でも，どの分点でもよいことが分かる。しかし，機械的に立式するのではなく，線分比を意識させながら立式させたいので，頂点からスタートするように指導するほうがよい。

また，メネラウスの定理の外分比の部分の立式(延長線上の点の処理)を苦手とする生徒が多いことから，指導者によっては，『最初の一歩を大きく踏み出す』と言いながら，最初に外分比の部分から立式するように指導する場合もある。

◆ 時計周りでも，反時計周りでもよい。

$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}=1$ は点Ａから反時計回りに１周した式であるが，変形すると，

$\Rightarrow \dfrac{AR}{RC}\cdot\dfrac{CQ}{QB}\cdot\dfrac{BP}{PA}=1$・・・点Ａから時計回りに１周した式になる。

◆ 分子から立式しても，分母から立式してもよい。

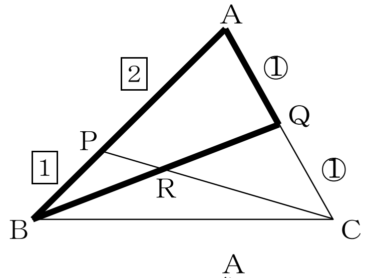
$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}=1$ は数値を分子から当てはめているが，変形すると，

$\Rightarrow \dfrac{PB}{AP}\cdot\dfrac{QC}{BQ}\cdot\dfrac{RA}{CR}=1$・・・数値を分母から当てはめた式になる。

以上のように，立式には自由度があるので，説明する際に，このことに触れておくと，生徒が安心して使うことができる。

（例１）△ＡＢＣにおいて，ＡＢを２：１に内分する点をＰ，ＡＣの中点をＱ，ＣＰとＢＱの交点をＲとするとき，次の問いに答えよ。

(1) ＢＲ：ＲＱを求めよ。

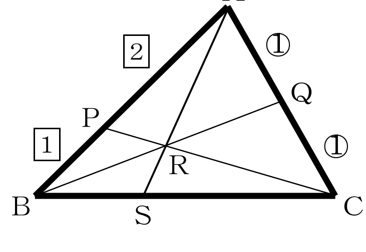


△ＡＢＱにメネラウスの定理を適用し，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RQ}\cdot\frac{QC}{CA}=1$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{BR}{RQ}\cdot\frac{1}{2}=1$$ よって，ＢＲ：ＲＱ＝１：１

(2) 直線ＡＲとＢＣとの交点をＳとし，ＢＳ：ＳＣを求めよ。



△ＡＢＣにチェバの定理を適用し，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BS}{SC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{BS}{SC}\cdot\frac{1}{1}=1$$ よって，ＢＳ：ＳＣ＝１：２

$\boxed{3}$　チェバの定理の逆，メネラウスの定理の逆

（チェバの定理の逆）

△ＡＢＣの３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡ上に点Ｐ，Ｑ，Ｒがある。このとき，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

ならば，ＡＱ，ＢＲ，ＣＰは１点で交わる。

（メネラウスの定理の逆）

△ＡＢＣの３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡまたはその延長上にそれぞれ点Ｐ，Ｑ，Ｒがある。このとき，

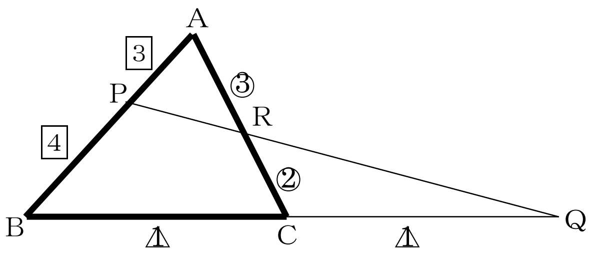
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

ならば，３点Ｐ，Ｑ，Ｒは同一直線上にある。

（例２）△ＡＢＣにおいて，ＡＢを３：４に内分する点をＰ，ＢＣを２：１に外分する点をＱ，ＣＡを２:３に内分する点をＲとするとき，３点Ｐ，Ｑ，Ｒは同一直線上にあることを証明せよ。

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}=1$$

よって，メネラウスの定理の逆より，
３点Ｐ，Ｑ，Ｒは同一直線上にある。

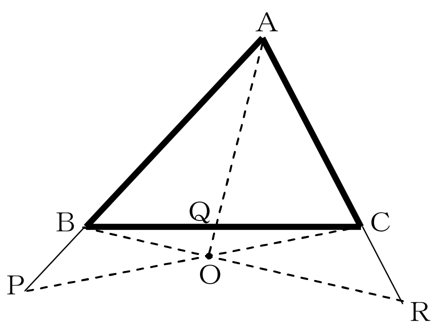


$\boxed{4}$　発展

【チェバの定理】

△ＡＢＣに対し，点Ｏが△ＡＢＣの外部にあっても，次の式が成り立つ。

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$



【メネラウスの定理】

△ＡＢＣに対し，直線が△ＡＢＣの外部にあっても，次の式が成り立つ。

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$