重複順列と二項定理

重複順列とは，「異なるn個のものから，重複を許して，r個を取り出して並べる順列」のことで，総数は，n^r である。

$$\overbrace{\underset{\substack{\text{選び方}\\ n\text{ 通り}}}{\underline{\ \bigcirc\ }},\ \underset{n\text{ 通り}}{\underline{\ \bigcirc\ }},\ \underset{n\text{ 通り}}{\underline{\ \bigcirc\ }},\ \underline{\ \bigcirc\ },\ \cdots\cdots\cdots,\ \underset{n\text{ 通り}}{\underline{\ \bigcirc\ }},\ \underset{n\text{ 通り}}{\underline{\ \bigcirc\ }},}^{r\text{ 個}}\quad = n\times n\times n\times\cdots\times n = n^r$$

重複順列に関する代表的な問題には，次のようなものがある。

問題１　１から５の整数から，重複を許して使ってできる４桁の整数は何個あるか。

$\boxed{\text{解答}}$　異なる５個のものから，重複を許して，４個を取り出して並べる重複順列

$5\times5\times5\times5=5^4$　　よって、625 個

問題１の整数に関する問題以外に，次の部屋わけの問題もよく出題されるが，生徒の中には，組み合わせを用いて解答する者がいる。重複順列を用いた解答と，組み合わせを用いた別解を紹介する。

問題２　４人を２つの部屋Ａ，Ｂに分けて入れる。空室になってもいいとき何通りの分け方があるか。

$\boxed{\text{解答}}$　４人を，Ａ，Ｂの２つの部屋に分ける。

人に注目して考えると，どの人にも，部屋の選び方には２通りあるので，

$2\times2\times2\times2=2^4$　　よって，16 通り

$\boxed{\text{別解}}$　Ａの部屋に注目して考えると，Ａに入る人数は，0人，1人，2人，3人，4人の場合が考えられる。

Ａに入る人数が0人の選び方は，${}_4C_0$ 通り，Ａに入る人数が1人の選び方は，${}_4C_1$ 通り，以下同様に考えると，人を，Ａ，Ｂの２つの部屋に分ける方法は

${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=1+4+6+4+1=16$　　よって，16 通り

問題２の部屋分けの問題は，注目するものによって２通りの解答が考えられる。

ここで，${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4$ についてもう少し考察する。この式は，二項定理

$$(a+b)^n={}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_na^0b^n$$

において，$a=1$，$b=1$，$n=4$ とした式なので，

${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=(1+1)^4$　　となる。よって，2^4 つまり16となる。

部屋わけの問題を，部屋に注目して解答すると，二項定理を用いて解答することになる。

問題３　４人を３つの部屋Ａ，Ｂ，Ｃに分けて入れる。空室になってもいいとき何通りの分け方があるか。

方針　人に注目して解答を作ると，$3^4=81$通りとすぐ答えが出るが，部屋に注目して解答を作成してみる。ただし，n 人を２つの部屋に分ける方法は2^n であることは，既知として解答する。

$\boxed{\text{解答}}$　Ａの部屋に注目して考えると，Ａに入る人数は，0人，1人，2人，3人，4人の場合が考えられる。

Ａに入る人数が0人の選び方は${}_4C_0$ 通り，残り4人をＢ，Ｃ，２つの部屋に入れる方法は2^4

Ａに入る人数が1人の選び方は${}_4C_1$ 通り，残り3人をＢ，Ｃ，２つの部屋に入れる方法は2^3

以下同様に考えると，${}_4C_0\cdot2^4+{}_4C_1\cdot2^3+{}_4C_2\cdot2^2+{}_4C_3\cdot2^1+{}_4C_4\cdot2^0$

ここで，${}_4C_0\cdot 2^4+{}_4C_1\cdot 2^3+{}_4C_2\cdot 2^2+{}_4C_3\cdot 2^1+{}_4C_4\cdot 2^0$ は，二項定理

$$(a+b)^n={}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_na^0b^n$$

において，$a=2$ ，$b=1$ ，$n=4$ とした式なので，

${}_4C_0\cdot 2^4+{}_4C_1\cdot 2^3+{}_4C_2\cdot 2^2+{}_4C_3\cdot 2^1+{}_4C_4\cdot 2^0=(2+1)^4$　となり，答えは81通り

分ける部屋の数が，多いときは，二項定理の使い方も一律ではない。

問題４　４人を５つの部屋Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅに分けて入れる。空室になってもいいとき何通りの分け方があるか。

方針　人に注目して解答を作ると，$5^4=625$ 通りとすぐ答えが出るが，部屋に注目して解答を作成してみる。ただし，n 人をm個($m<5$)の部屋に分ける方法はm^n であることは，既知として解答する。

解答１　Ａの部屋に注目して考えると，Ａに入る人数は，0人，1人，2人，3人，4人の場合が考えられる。

Ａに入る人数が0人の選び方は${}_4C_0$ 通り，残り4人を４つの部屋に入れる方法は4^4

Ａに入る人数が1人の選び方は${}_4C_1$ 通り，残り3人を４つの部屋に入れる方法は4^3

以下同様に考えると，${}_4C_0\cdot 4^4+{}_4C_1\cdot 4^3+{}_4C_2\cdot 4^2+{}_4C_3\cdot 4^1+{}_4C_4\cdot 4^0$

二項定理において，$a=4$ ，$b=1$ ，$n=4$ とした式なので，

${}_4C_0\cdot 4^4+{}_4C_1\cdot 4^3+{}_4C_2\cdot 4^2+{}_4C_3\cdot 4^1+{}_4C_4\cdot 4^0=(4+1)^4$　となり，答えは625 通り

解答２　先ほどの解答１では，Ａという１室のみに注目したが，ＡとＢの２室と残り３室に分けて，考えてもよい。イメージとしては，ＡとＢが新館のいい部屋で，残りの３室が本館の古い部屋

新館に入る人数が0人の選び方は${}_4C_0$ 通り，その0人を２室に入れる方法は2^0，残り4人を本館の３室に入れる方法は3^4　　よって、${}_4C_0\cdot 2^0\cdot 3^4$

新館に入る人数が1人の選び方は${}_4C_1$ 通り，その1人を２室に入れる方法は2^1，残り3人を本館の３室に入れる方法は3^3　　よって、${}_4C_1\cdot 2^1\cdot 3^3$

新館に入る人数が2人の選び方は${}_4C_2$ 通り，その2人を２室に入れる方法は2^2，残り2人を本館の３室に入れる方法は3^2　　よって、${}_4C_2\cdot 2^2\cdot 3^2$

以下同様に考えると，${}_4C_0\cdot 2^0\cdot 3^4+{}_4C_1\cdot 2^1\cdot 3^3+{}_4C_2\cdot 2^2\cdot 3^2+{}_4C_3\cdot 2^3\cdot 3^1+{}_4C_4\cdot 2^4\cdot 3^0$

二項定理において，$a=2$ ，$b=3$ ，$n=4$ とした式なので，

${}_4C_0\cdot 2^0\cdot 3^4+{}_4C_1\cdot 2^1\cdot 3^3+{}_4C_2\cdot 2^2\cdot 3^2+{}_4C_3\cdot 2^3\cdot 3^1+{}_4C_4\cdot 2^4\cdot 3^0=(2+3)^4$

となり，答えは、625 通り