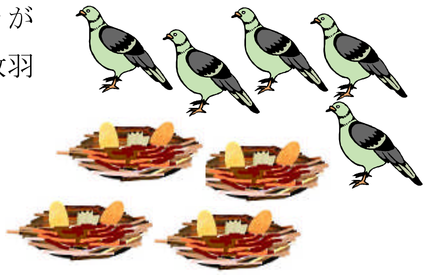
鳩の巣原理について（部屋割り論法）



鳩の数と巣の数が同じとき，どの鳩も平等に一つの巣に入ることができる。しかし，鳩の数が，巣の数を上回るとき，一つの巣に複数羽の鳩を入れざるを得ない。このように，

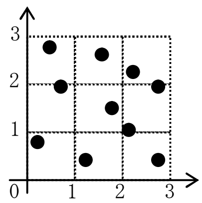
「n個の巣に対し，$n+1$羽の鳩を入れると，少なくとも一つの巣には２羽以上の鳩が入ることになる」

という考え方(原理)を,鳩の巣原理あるいは部屋割り論法という。

この原理は，単純で明白であるが，一般の問題では，“鳩の巣”とか“鳩”という言葉は使われず，姿を変えて登場するので，この原理を用いることに気が付かないことが多い。次のような使われ方をする。

- ◆「n個の箱に対し，$n+1$個の物を入れるとき，少なくとも１つの箱に２つの物が入る。」
- ◆「ある物にはn種類のタイプしかないのに，$n+1$個の物をもってきたら，少なくとも２つは同じタイプである。」
- ◆「ある集合の要素をグループに分けると，n個のグループに分けることができるとき，その集合から$n+1$個を取ってくると，少なくとも２つは同じグループに属する。」

問題を解くポイントは，何が鳩の巣（箱，タイプ，グループ）に該当し，何が鳩（対象とする物）に該当しているかを見極め，問題を整理することが大切である。具体的な例で，鳩の巣原理の使い方を見ていく。



［例題１］座標平面上の，$0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ の領域から 10 個の点をとると，２点間の距離が$\sqrt{2}$以下となる２点が存在することを示せ。

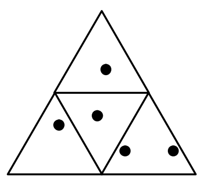
（証明）この領域は，１辺の長さが１の９つの正方形に分けることができる。この領域から 10 個の点をとるので，鳩の巣原理から，少なくとも２点は１つの正方形の周または内部にある。正方形内に存在する線分で最長となるのは対角線なので，長さは$\sqrt{2}$である。したがって，この領域から 10 個の点をとると，２点間の距離が$\sqrt{2}$以下となる２点が存在する。

［例題２］１辺が 70 ㎝の正方形の的がある。ここに 50 発射撃をして，１発も的をはずさなかった。弾丸は的にめり込んだままであるとき，２発の距離が 15 ㎝以下のものが必ずあることを示せ。

（証明）この正方形は 10 ㎝×10 ㎝の 49 個の正方形に分けることができる。50 発撃つと，鳩の巣原理から，少なくとも２発は同じ正方形の周または内部にある。この２発の距離は最大でも対角線の長さ$10\sqrt{2}=14.1$なので，距離が 15 ㎝以下の２発が必ず存在する。

［例題３］１辺の長さが２の正三角形の内部に，任意に５個の点をとったとき，その内の２点で，距離が１以下となるものが少なくとも１組存在することを示せ。

（証明）この正三角形を一辺の長さが１の正三角形に分割すると，図のように４つに分けることができる。この内部に５個の点をとるので，鳩の巣原理から，少なくとも２つは同じ正三角形の周または内部に存在することになる。そのときの２点間の距離は１以下である。



［例題４］平面上の点(x, y)で，x, y がともに整数である点を格子点と呼ぶ。相異なる５個の格子点のうち，いずれか２つを結んでできる線分の中点をとると，少なくとも１つは格子点となることを示せ。

（解答）格子点は，

（奇数，奇数），（偶数，偶数），（奇数，偶数），（偶数，奇数）

の４つのタイプに分けることができる。したがって，５個の格子点を選ぶと，鳩の巣原理によって同タイプのものが必ず２点含まれる。奇数＋奇数＝偶数，偶数＋偶数＝偶数だから同タイプの２点の中点は必ず格子点になる。

［例題５］座標空間で，その座標がすべて整数であるような点を格子点という。座標空間に９個の格子点が与えられたとき，その内の２点で，中点がまた格子点であるものが少なくとも１組存在することを示せ。

（解答）格子点は，

（奇数，奇数，奇数），（奇数，奇数，偶数），（奇数，偶数，奇数），（奇数，偶数，偶数）
（偶数，奇数，奇数），（偶数，奇数，偶数），（偶数，偶数，奇数），（偶数，偶数，偶数）

の８つのタイプに分けることができる。したがって，９個の格子点を選ぶと，鳩の巣原理によって同タイプのものが必ず２点含まれる。奇数＋奇数＝偶数，偶数＋偶数＝偶数だから同タイプの２点の中点は必ず格子点になる。

［例題６］分数$\dfrac{n}{m}$（m, nは互いに素な自然数）が無限小数になるとき，循環小数になることを示せ。

（解答）任意の数をmで割って割り切れないとき，余りrは，$1 \leqq r < m$，つまり，１から$m-1$までの$m-1$通りしかない。したがって，m回以上，割り算を繰り返していくと，鳩の巣原理から，必ず同じ余りになるときが現れる。これ以降は循環する。

［例題７］相異なる$n+1$個の整数から２つの整数を選ぶと，その差がnの倍数になるものがあることを示せ。

（解答）任意の数をnで割ると，余りrは，$0 \leqq r < n$，つまり，０から$n-1$までのn通りである。したがって，相異なる$n+1$個の整数をnで割ると，鳩の巣原理から，少なくとも２つは同じ余りになる。よって，この２数の差はnの倍数になる。

［例題８］１から 10 までの整数から相異なる６つの整数を選ぶと，それらの中には和が 11 になる２つの数が必ず含まれることを証明しなさい。

（解答）１から 10 までの整数を次の５つのグループに分ける。

（１，10），（2，9），（3，8），（4，7），（5，6）

１から 10 までの整数の中から，６つの数字を選ぶと，鳩の巣原理によって，少なくとも２個は同じグループの数字である。よって必ず和が 11 になる２つの数が含まれる。