隣接二項間の漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q \quad (p\neq 1)$

隣接二項間の漸化式 $a_1=\alpha$，$a_{n+1}=pa_n+q$ によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求める場合，特性方程式 $t=pt+q$ を利用して求めるのが通常であるが，この式の導き方についてまとめる。

【指導上の留意点】

$\boxed{1}$ 最初に，$a_{n+1}-t=p(a_n-t)$ の形の漸化式を解いて練習をする。

（例） $a_1=4$，$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$ によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項 a_n を求めよ。

（解説） $b_n=a_n-2$ とおくことにより，$b_{n+1}=3b_n$，$b_1=2$ という等比数列の漸化式になる。

この形の漸化式を数題，練習し，$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式も，(例)の形に変形できれば解くことができることを理解させる。実際に，$a_{n+1}=3a_n-4$ の両辺から 2 を引くと(例)の形になる。

$\boxed{2}$ $a_{n+1}=pa_n+q$ を変形して $a_{n+1}-t=p(a_n-t)$ となるような t を求める方法を考える。

$a_{n+1}=pa_n+q$ を変形して，

$$a_{n+1}-t=p(a_n-t) \quad \cdots ①$$

と変形できれば，$\boxed{1}$より漸化式を解くことができる。そこで，左辺に注目し，$a_{n+1}=pa_n+q$ の両辺から t を引く。

$$a_{n+1}-t=pa_n+q-t \quad \cdots ②$$

次に，①の右辺のように，②の右辺に $p(a_n-t)$ を作る。

$$a_{n+1}-t=p(a_n-t)+pt+q-t$$

よって，$pt+q-t=0$ を満たす t を求めればよい。ただ，この式のままでは，覚えにくいので，変形して，$t=pt+q$ の形で覚えるとよい。これが，隣接二項間の漸化式の特性方程式である。

(参考)

力のある生徒には，

(1) $a_{n+1}=pa_n+q$ の両辺を p^{n+1} で割って，$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とすることにより，一般項 a_n を求めよ。

(2) $a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ と与式の辺々の差をとることにより，一般項 a_n を求めよ。

などの問題を与えて，漸化式にはいろいろな解法があることを紹介するのもよい。