隣接三項間の漸化式　$a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$

隣接三項間の漸化式　$a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求める場合，特性方程式　$t^2-pt+q=0$　を利用して求めるのが通常であるが，この式の導き方についてまとめる。

【指導上の留意点】

$\boxed{1}$　最初に，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$の形の漸化式を解いて練習をする。

（例）　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$・・・①　によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項a_nを次のように求める。

(1) ①式は，変形すると，$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$　とすることができる。$b_n=a_{n+1}-2a_n$として，b_nを求めよ。

(2) ①式は，変形すると，$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$　とすることができる。$c_n=a_{n+1}-3a_n$として，c_nを求めよ。

(3) (1)，(2)より，a_nを求めよ。

（解説）

(1)　$b_n=a_{n+1}-2a_n$　とおくことにより，$b_{n+1}=3b_n$，$b_1=2$　という等比数列の漸化式になる。

よって，$b_n=a_{n+1}-2a_n=2\times 3^{n-1}$・・・②

(2)　$b_n=a_{n+1}-3a_n$　とおくことにより，$b_{n+1}=2b_n$，$b_1=1$　という等比数列の漸化式になる。

よって，$b_n=a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}$・・・③

(3) ②－③ を計算して，$a_n=2\times 3^{n-1}-2^{n-1}$

この(例)のように，隣接三項間の漸化式　$a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$　が　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$　の形に変形することができれば，一般項a_nを求めることができることを実感させる。

$\boxed{2}$　漸化式　$a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$　を　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$・・・④　に変形したときのαとβを求める。

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$を展開して左辺にまとめると，

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta\, a_n=0$$

となる。

$a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$と係数を比較すると，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha\beta=q\end{cases}$$

となる。

つまり，たしてp，かけてqとなるαとβを求めればいいのだから，２次方程式　$t^2-pt+q=0$　の解がαとβということになる。これが，隣接三項間の漸化式の特性方程式である。求めたαとβを④式に代入することにより，解を求めることができる。