じゃんけんの確率

確率の分野でよく出題される問題の一つに「じゃんけんの問題」がある。実際に，身近にあるテーマであるじゃんけんを題材にした身近な問題には，生徒も興味深いようである。そこで，教科書にあるような問題だけでなく，次のような問題で興味・関心と思考力と高めるのもよいと思われる。

［問題１］　n人で１回じゃんけんをするとき，あいこになる確率を求めよ。

（解答１）　【勝利者数で場合分けして考える方法】

余事象を考える。

１人勝つ確率は，n人の中から勝利者を１人選ぶ方法が${}_nC_1$通り，どの手で勝つかは３通りあるので，$\dfrac{3\times{}_nC_1}{3^n}$となる。

同様に，２人勝つ確率は$\dfrac{3\times{}_nC_2}{3^n}$，３人勝つ確率は$\dfrac{3\times{}_nC_3}{3^n}$，……，$(n-1)$人勝つ確率は$\dfrac{3\times{}_nC_{n-1}}{3^n}$。

よって，勝負がつく確率は，

$$\frac{3\times{}_nC_1}{3^n}+\frac{3\times{}_nC_2}{3^n}+\frac{3\times{}_nC_3}{3^n}+\cdots\cdots+\frac{3\times{}_nC_{n-1}}{3^n}=\frac{{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}}{3^{n-1}} \quad \cdots\cdots①$$

ここで，二項定理を用いると，${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$より，

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-2$であるので，①$=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$となる。

したがって，あいこになる確率は，$1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$

（解答２）　【勝敗がつく手の出し方のパターンを考える方法】

余事象を考える。

n人で１回じゃんけんをして勝負がつくのは，n人の出す手がちょうど２種類になるときである。

２種類の手の選び方は${}_3C_2$通り，n人が２種類の手を出す出し方は2^n-2通りあるので，勝負がつく確率は，$\dfrac{{}_3C_2\left(2^n-2\right)}{3^n}=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$となる。

よって，あいこになる確率は$1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$

【参考】　nの値を増やしていくと，あいこになる確率は右の表のようになる。

nの値	あいこになる確率
3	$\frac{1}{3}$ (33.3%)
4	$\frac{13}{27}$ (48.1%)
5	$\frac{17}{27}$ (63.0%)
⋮	⋮
10	$\frac{18661}{19683}$ (94.8%)

［問題２］　n人でじゃんけんをするとき，勝利者が１人以上出る（つまりあいこにならない場合）までの回数の期待値を求めよ。

（解答）　［問題１］より，n人で１回じゃんけんをして勝敗がつく確率をp，あいこになる確率をqとおくと，$p=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$，$q=1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$。

求める期待値を$E_A(n)$とおくと，

勝者が出る回数	1	2	3	・・・	k	・・・
確率	p	qp	q^2p	・・・	$q^{k-1}p$	・・・

より

$E_A(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p$となる。

ここで，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}p$とおく。

$S=p+2qp+3q^2p+4q^3p+\cdots\cdots+nq^{n-1}p$　　…①

$qS=\quad qp+2q^2p+3q^3p+\cdots\cdots+(n-1)q^{n-1}p+nq^np$　　…②

①－②より，

$$(1-q)S=p+qp+q^2p+q^3p+\cdots\cdots+q^{n-1}p-nq^np$$
$$=\frac{p(1-q^n)}{1-q}-nq^np$$

よって，$S=\dfrac{p(1-q^n)}{(1-q)^2}-\dfrac{nq^np}{1-q}$　となる。

したがって，$E_A(n)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}S=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}=\frac{3^{n-1}}{2^n-2}$

【参考】　nの値を増やしていくと，勝利者が１人以上出るまでの回数の期待値は右の表のようになる。

nの値	勝利者が１人以上出るまでの回数
3	$\dfrac{3}{2}$（1.5回）
4	$\dfrac{27}{14}$（1.93回）
5	$\dfrac{27}{10}$（2.7回）
⋮	⋮
10	$\dfrac{19683}{1022}$（19.3回）

［問題３］　n 人で１回じゃんけんをするとき，勝利者数の期待値を求めよ。

（解答）　n 人で１回じゃんけんをして k 人勝つ確率を $P(n,k)$ とおくと，

$P(n,k)=\dfrac{3\times {}_nC_k}{3^n}=\dfrac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$　$(1\le k\le n-1)$ となる。

求める期待値を $E_B(n)$ とおくと，

$E_B(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\,P(n,k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\,{}_nC_k}{3^{n-1}}=\frac{1}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}k\;{}_nC_k=\frac{n}{3^{n-1}}\sum_{K=1}^{n-1}{}_{n-1}C_{k-1}$

（$\because\ k\,{}_nC_k=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$）

よって，

$\dfrac{3^{n-1}}{n}E_B(n)={}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}=2^{n-1}-1$

（$\because$ 二項定理より ${}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}+{}_{n-1}C_{n-1}=2^{n-1}$）

したがって，$E_B(n)=\dfrac{n\left(2^{n-1}-1\right)}{3^{n-1}}$

【補足】$k\,{}_nC_k=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$　についての説明

[証明]　(左辺)= $k\,{}_nC_k=k\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$=(右辺)

感覚的な説明ではあるが，

ア　(左辺)は，n 人の中から k 人の委員を選び，その k 人の委員の中から１人の委員長を決める場合の数

イ　(右辺)は，n 人の中から委員長を１人選び，残りの $(n-1)$ 人の中から $(k-1)$ 人の委員を決める場合の数

アとイは同じ操作だから，$k\,{}_nC_k=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$ である，と説明すると生徒も理解しやすいだろう。