数学的帰納法の考え方

数学的帰納法の基本的な考え方と，その応用型を紹介する。

1　数学的帰納法の基本的な考え方

自然数nを含んだ命題$P(n)$が, すべての自然数nについて成り立つことを示す以下のような証明方法がある。この証明方法を数学的帰納法という。

（Ⅰ） $n=1$のとき，$P(n)$が成り立つことを示す。
（Ⅱ） $n=k$のとき，$P(k)$が成り立つと仮定したとき，$P(k+1)$が成り立つことを示す。
（Ⅰ），（Ⅱ）より，すべての自然数nについて$P(n)$が成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）を示すことにより，すべての自然数nで$P(n)$が成り立つといえる説明は，次のとおりである。

（説明）（Ⅰ）より，$P(1)$が成り立つ

$\Rightarrow$　$P(1)$が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(2)$が成り立つ

$\Rightarrow$　$P(2)$が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(3)$が成り立つ

$\Rightarrow$　$P(3)$が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(4)$が成り立つ

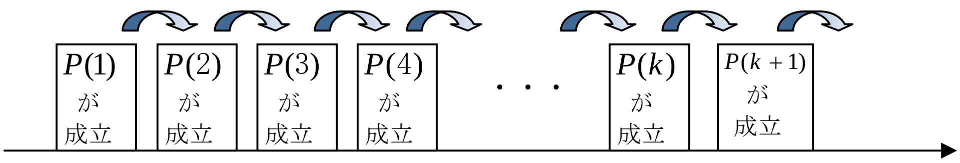
$\vdots$

$\Rightarrow$　$P(k)$が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(k+1)$が成り立つ

$\vdots$

この論がくり返されることによって, 結果的にすべての自然数nで$P(n)$が成り立つことが言える。　　（説明終）

この論法は，最初が正しいと証明されることで，次々に正しいことが証明されていくので，よくドミノ倒しに例えられる。



この説明以外に,「（Ⅰ），（Ⅱ）が成り立つと, すべての自然数nについて$P(n)$が成り立つ」ことを，背理法を用いて示すことができる。

（証明）自然数nを含んだ命題$P(n)$について，$P(n)$が成り立たない自然数nが存在すると仮定し，そのような自然数全体の集合をMとする。

このとき，Mの最小値をaとおくと，（Ⅰ）より$a>1$である。さらに，$P(a-1)$は成り立つことになるが，（Ⅱ）より，$P(a)$も成り立つことになってしまい。これは矛盾。

よって，（Ⅰ），（Ⅱ）が成り立つとき，$P(n)$はすべての自然数nで成り立つ。　　（証明終）

2　応用型①

基本的な数学的帰納法では，$n=k$のときの$P(k)$が成り立つと仮定して，次の$P(k+1)$が成り立つことを証明したが, 応用型として，$n=k$，$k+1$のときの２つの$P(n)$が成り立つと仮定して，$P(k+2)$が成り立つことを証明するする数学的帰納法がある。

（Ⅰ） $n=1$, 2のとき，$P(n)$が成り立つことを示す。
（Ⅱ） $n=k$，$k+1$のとき，$P(n)$が成り立つと仮定したとき，$P(k+2)$が成り立つことを示す。
（Ⅰ），（Ⅱ）より，すべての自然数nについて$P(n)$が成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）を示すことにより，すべての自然数nで$P(n)$が成り立つといえる説明は，次のとおりである。

（説明）（Ⅰ）より，$P(1)$，$P(2)$ が成り立つ

　　$\Rightarrow$　$P(1)$，$P(2)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(3)$ が成り立つ

　　$\Rightarrow$　$P(2)$，$P(3)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(4)$ が成り立つ

　　$\Rightarrow$　$P(3)$，$P(4)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(5)$ が成り立つ

　　　$\vdots$

　　$\Rightarrow$　$P(k)$，$P(k+1)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(k+2)$ が成り立つ

　　　$\vdots$

この論がくり返されることによって, 結果的にすべての自然数 n で $P(n)$ が成り立つことが言える。　　（説明終）

［例題１］ n を自然数とするとき，２数 x，y の和と積が整数ならば，x^n+y^n は整数であることを数学的帰納法により証明せよ。

（証明）

（Ⅰ）$n=1$ のとき，$x^1+y^1=x+y$ より整数である。

$n=2$ のとき，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ より整数である。

（Ⅱ）$n=k$，$k+1$ のとき、x^n+y^n が整数である，つまり x^k+y^k，$x^{k+1}+y^{k+1}$ はともに整数であると仮定する。

$n=k+2$ のとき

$$x^{k+2}+y^{k+2}=(x^{k+1}+y^{k+1})(x+y)-xy(x^k+y^k)$$

仮定より x^k+y^k，$x^{k+1}+y^{k+1}$ はともに整数なので $x^{k+2}+y^{k+2}$ も整数である。

以上（Ⅰ),（Ⅱ）よりすべての自然数 n について，x^n+y^n は整数である。

３　応用型②

応用型①の数学的帰納法では，$n=k$，$k+1$ のときの２つの $P(n)$ が成り立つと仮定して，$P(k+2)$ が成り立つことを証明したが，$n\leqq k$ の k 個の n で $P(n)$ が成り立つと仮定して，$P(k+1)$ が成り立つことを示す数学的帰納法がある。

（Ⅰ）$n=1$ のとき，$P(n)$ が成り立つことを示す。
（Ⅱ）$n\leqq k$ のとき，$P(n)$ が成り立つと仮定したとき，$P(k+1)$ が成り立つことを示す。
（Ⅰ),（Ⅱ）より，すべての自然数 n について $P(n)$ が成り立つ。

（Ⅰ),（Ⅱ）を示すことにより，すべての自然数 n で $P(n)$ が成り立つといえる説明は，次のとおりである。

（説明）（Ⅰ）より，$P(1)$ が成り立つ

　　$\Rightarrow$　$P(1)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(2)$ が成り立つ

　　$\Rightarrow$　$P(1)$，$P(2)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(3)$ が成り立つ

　　$\Rightarrow$　$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(4)$ が成り立つ

　　　$\vdots$

　　$\Rightarrow$　$P(1)$，$P(2)$，・・・$P(k)$ が成り立つことと，（Ⅱ）より，$P(k+1)$ が成り立つ

　　　$\vdots$

この論がくり返されることによって, 結果的にすべての自然数 n で $P(n)$ が成り立つことがいえる。　　（説明終）

［例題２］数列$\{a_n\}$（ただし$a_n>0$）について次の関係式が成り立つとき，一般項a_nを推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_n{}^3$$

（解答）関係式において，

$n=1$のとき，$a_1{}^2=a_1{}^3$

$a_1{}^2(a_1-1)=0$

$a_n>0$から$a_1=1$

$n=2$のとき，$(1+a_2)^2=1+a_2{}^3$

$a_2(a_2+1)(a_2-2)=0$

$a_n>0$から，$a_2=2$

$n=3$のとき，$(1+2+a_3)^2=1+8+a_3{}^3$

$a_3(a_3+2)(a_3-3)=0$

$a_n>0$から，$a_3=3$

これより

$a_n=n$・・・①

と推測される。このことを数学的帰納法で証明する。

（Ｉ）$n=1$のとき，$a_1{}^2=a_1{}^3$

$a_1{}^2(a_1-1)=0$

$a_n>0$から$a_1=1$

よって，$n=1$のとき①は成り立つ。

（Ⅱ）$n\leqq k$のときのk個のnで，①が成り立つと仮定すると

$a_k=k\ (n\leqq k)$・・・②

$n=k+1$のとき

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_k{}^3+a_{k+1}{}^3$$

②より，

$$(1+2+\cdots+k+a_{k+1})^2=1^3+2^3+\cdots+k^3+a_{k+1}{}^3$$

$$\left\{\frac{k(k+1)}{2}+a_{k+1}\right\}^2=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+a_{k+1}{}^3$$

$$k(k+1)a_{k+1}+a_{k+1}{}^2=a_{k+1}{}^3$$

$$a_{k+1}(a_{k+1}+k)\{a_{k+1}-(k+1)\}=0$$

$a_{k+1}>0$なので$a_{k+1}=k+1$

よって，$n=k+1$のときも成り立つ。

以上（Ｉ)，(Ⅱ）よりすべての自然数nに対して①は成り立つ。