絶対値のはずし方

絶対値の定義は，「原点から点Ａ(a)までの距離ＯＡを a の絶対値といい，$|a|$で表す」である。

したがって，

a が０以上のときは，距離ＯＡ＝$|a-0|=a$

a が０未満のときは，距離ＯＡ＝$|0-a|=-a$

図１

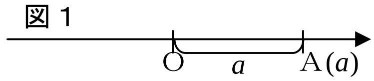
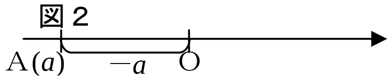


図２



まとめると，

$$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \quad \cdots①$$

となる。

これを応用して，２点Ａ(a)，Ｂ(b)間の距離は

$a \geqq b$ のときは，距離ＡＢ＝$a-b$

$a<b$ のときは，距離ＡＢ＝$b-a$

距離ＡＢ＝$|a-b|$

図３

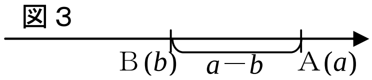
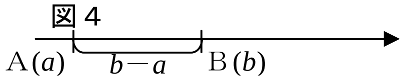


図４



よって，

$$|a-b|=\begin{cases} a-b & (a \geqq b) \\ -(a-b) & (a < b) \end{cases}$$

となる。

絶対値の導入時では，以上のように，原点からの距離(２点間の距離)という定義に従って，指導するが，絶対値の中の式が複雑になる場合や，絶対値を含んだ方程式や不等式などを解く場合には，２点間の距離で考えるより，①の結果を用いて機械的に解答する方が生徒には理解しやすい。

教科書のまとめの $|x|=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ の x を以下のように ◯ としてまとめ，活用できるようにする。

$$|\text{中身}|=\begin{cases} \text{中身} & (\text{中身} \geqq 0) \\ -\text{中身} & (\text{中身} < 0) \end{cases}$$

(例１)　$|x-1|$ の絶対値を外す場合 ◯ の中に $x-1$ を代入し，式を立てた後，括弧内の不等式を解く。

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x-1 \geqq 0) \\ -x-1 & (x-1 < 0) \end{cases}$$ よって，$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x \geqq 1) \\ -(x-1) & (x<1) \end{cases}$$

(例２)　$|1-2x|$ の絶対値を外しなさい。

$$|1-2x|=\begin{cases} 1-2x & (1-2x \geqq 0) \\ -1-2x & (1-2x < 0) \end{cases}$$ よって、$$|1-2x|=\begin{cases} 1-2x & (1-2x \geqq 0) \\ -(1-2x) & (1-2x<0) \end{cases}$$

$$|1-2x|=\begin{cases} 1-2x & (1-2x \geqq 0) \\ -(1-2x) & (1-2x<0) \end{cases} = \begin{cases} 1-2x & (x \leqq \frac{1}{2}) \\ -(1-2x) & (x > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$\boxed{1}$ 絶対値が入った方程式・不等式の指導

（例）(1)　$|x-1|=3$

（解１）

$$|x-1|=\begin{cases} (x-1) & (\ (x-1) \geqq 0) \\ -(x-1) & (\ (x-1)<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x-1 & (\ x\geqq 1) \\ -(x-1) & (\ x<1) \end{cases}$$

（ⅰ）$x\geqq 1$のとき

与式は，$x-1=3$

$x=4$

これは$x\geqq 1$を満たす。

よって$x=4$　……　①

（ⅱ）$x<1$のとき

与式は，$-(x-1)=3$

$x=-2$

これは$x<1$を満たす。

よって$x=-2$　……　②

①，②より，$x=4,-2$

（解２）

$|x-1|$は点P(x)とA(1)の距離を表す。

よって，A(1)との距離が３となるxの値は$x=4,-2$

(2)　$|x-1|\leqq 3$

（解１）

$$|x-1|=\begin{cases} (x-1) & (\ (x-1) \geqq 0) \\ -(x-1) & (\ (x-1)<0) \end{cases}$$

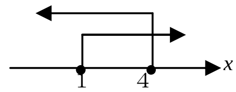
$$=\begin{cases} x-1 & (\ x\geqq 1) \\ -(x-1) & (\ x<1) \end{cases}$$

（ⅰ）$x\geqq 1$のとき

与式は，$x-1\leqq 3$

$x\leqq 4$

$x\geqq 1$より，$1\leqq x\leqq 4$



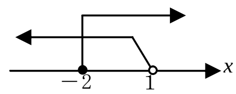
よって　$1\leqq x\leqq 4$　……　①

（ⅱ）$x<1$のとき

与式は，$-(x-1)\leqq 3$

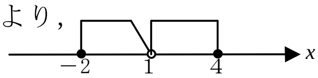
$x\geqq -2$

$x<1$より，$-2\leqq x<1$



よって　$-2\leqq x<1$　……　②

①，②より，



よって　$-2\leqq x\leqq 4$

（解２）

$|x-1|$は点P(x)とA(1)の距離を表す。

よって，A(1)との距離が３以下となるxの値の範囲は$-2\leqq x\leqq 4$

$\boxed{2}$ 絶対値が２つ入っている場合の外し方の指導

（例）$|x+2|+|x-1|$

$$|x+2|=\begin{cases} x+2 & (x\geqq -2) \\ -(x+2) & (x<-2) \end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geqq 1) \\ -(x-1) & (x<1) \end{cases}$$

$|x+2|$は－２を境界として絶対値が外れ，$|x-1|$は１を境界として絶対値が外れる。それを表にして並べて書いて，$x<-2$，$-2\leqq x<1$，$1\leqq x$で分かれることを認識させる。

	$x<-2$	$-2\leqq x<1$	$1\leqq x$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$x+2$	
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$		$x-1$

$$|x+2|+|x-1|=\begin{cases} -(x+2)-(x-1)=-2x-1 & (x<-2) \\ x+2-(x-1)=3 & (-2\leqq x<1) \\ x+2+x-1=2x+1 & (1\leqq x) \end{cases}$$