絶対値の入った不等式 $|f(x)|<g(x)$

$k>0$ で不等式 $|x|<k$ の形の問題を解く場合，$-k<x<k$ と同値であることから，例えば，$|x|<3$ ならば，$-3<x<3$ と解答する。それでは，k の部分が x の関数の場合に，同じように計算していいのか調べてみる。

不等式 $|f(x)|<g(x)$ を解く。

（ｉ） $f(x)\geqq 0$ のとき
$f(x)<g(x)$
となる。
つまり，$f(x)\geqq 0$ と $f(x)<g(x)$ を同時に満たす x の値の範囲を求める。
よって，連立不等式
$0\leqq f(x)<g(x)$
を解くことになる。

（ⅱ） $f(x)<0$ のとき
$-f(x)<g(x)$ つまり $-g(x)<f(x)$
となる。
つまり，$f(x)<0$ と $-g(x)<f(x)$ を同時に満たす x の値の範囲を求める。
よって，連立不等式
$-g(x)<f(x)<0$
を解くことになる。

（ｉ）（ⅱ）より，$-g(x)<f(x)<g(x)$
つまり，k の部分が x の関数の場合でも以下のことがいえる。

$$|f(x)|<g(x) \iff -g(x)<f(x)<g(x)$$

（例） $|x^2-2x-3|\leqq x+1$ を解け。

（解） $-(x+1)\leqq x^2-2x-3\leqq x+1$ と同値である。

$$\begin{cases} -(x+1)\leqq x^2-2x-3 \cdots ① \\ x^2-2x-3\leqq x+1 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$x^2-x-2\geqq 0$
$x\leqq -1$, $2\leqq x$

②より，$x^2-3x-4\leqq 0$
$-1\leqq x\leqq 4$

以上より，
$x=-1$ ，$2\leqq x\leqq 4$