$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ の両方の真偽を調べる理由

この命題と論証のところでは，$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ の両方の真偽を調べる理由の説明，「命題の真偽」と「集合の包含関係」の対応の説明，$p \Rightarrow q$ が真のとき，どちらが何条件になるかの説明がポイントとなる。生徒の中には，真偽の判定を苦手とする生徒がいるので，注意を要する。

1　$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ の両方の真偽を調べる理由

２つの条件 p と q があって，この２つの条件に全く真偽関係がない場合，条件 p と条件 q はただの条件であって，特別な「○○条件」とはならない。$p \Rightarrow q$ が真であることが分かったとき，「p は q であるための十分条件」，「q は p であるための必要条件」という。したがって，条件 p と条件 q の間にはどのような真偽関係があるか，つまり，$p \Rightarrow q$ が真なのか偽なのか，$q \Rightarrow p$ が真なのか偽なのかを調べないと条件 p と条件 q が何条件になるかが分からないのである。次のように調べることが多い。

①条件 p と条件 q を並べて書き，双方向の矢印を書く。

$$p \rightleftarrows q$$

②上側の矢印 $p \rightarrow q$ の真偽を調べ，真ならば，この時点で p は十分条件，q は必要条件となる。

③下側の矢印 $p \leftarrow q$ の真偽を調べ，真ならば，この時点で p は必要条件，q は十分条件となる。

④以上の結果から，条件 p，q が何条件かを答える。もし，②③の両方とも成り立てば，p と q は必要十分条件となるし，両方とも偽であれば，条件 p，q はただの条件であって，必要条件でも十分条件でもないことになる。

2　「命題の真偽」と「集合の包含関係」の対応の説明

条件は，集合としてとらえることができる。例えば，

条件 $x > 1$ ・・・・・・ $\{x \mid x > 1,\ x \in \mathrm{R}\}$

このことを利用して，命題の真偽を，その条件を満たす集合の包含関係で求めることができる。

条件 p を満たす集合をＰ，条件 q を満たす集合をＱ

とし，今，

集合Ｐの任意の要素が集合Ｑに含まれる

とするとき，

条件 p を満たす集合Ｐの任意の要素はどれも条件 q を満たす集合Ｑに含まれる

ということだから，

条件 p ならば条件 q が成り立つ，つまり命題 $p \Rightarrow q$ が真

ということになる。したがって，命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を確かめるには，集合Ｐと集合Ｑの包含関係を調べればよいことが分かる。

生徒は「十分（sufficient）」「必要（necessary）」という言葉のイメージから，集合に関して正しい意味とは逆の「十分＝広い・緩い」「必要＝狭い・厳しい」という感覚をもつものがいる。実際には，十分条件に当たる部分が集合としては狭く，必要条件に当たる部分が集合としては広いことに注意させたい。具体的には数直線を書いたり，ベン図を作ったりしながら包含関係を確認させていくことが重要である。

命題	p	$\Rightarrow$	q	が真のとき
集合	P	$\subset$	Q	が成立。

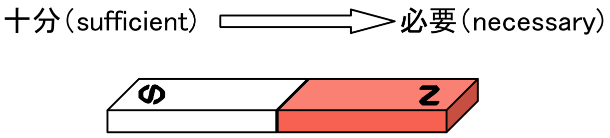
命題	p	$\Leftarrow$	q	が真のとき
集合	P	$\supset$	Q	が成立。

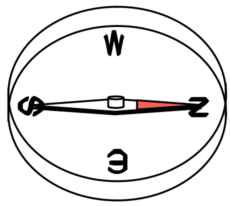
3　$p \Rightarrow q$ が真のとき，どちらが何条件になるかの覚え方

様々な指導の工夫例

【工夫例１】　磁石のＮ極Ｓ極に例えて。

方位磁石は北に矢印の先があるから。





【工夫例２】　「矢の先は必要」と覚える。

弓矢には矢の先が必要だから，命題が真であるとき，命題Ｐ→Ｑの矢の先が必要条件。

【工夫例３】　十分条件（じゅう）→必要条件（よう）だから矢印の向きに **じゅう→よう** と覚えて使う。