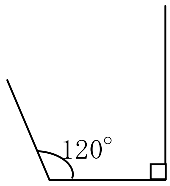
三角比の鈍角への拡張

初めて三角比を習った生徒にとって，三角比は直角三角形を使って定義されているので，θ は 90° 以上となる場合，三角比の値は存在しない。確かに，この直角三角形をベースにした考え方をしている限り，θ は鋭角の域を脱することはできない。したがって，三角比を鈍角へ拡張するためには，新しい考え方を導入しなければならないことが分かる。

そこで，鈍角の三角比の導入時に，θ が鈍角のときの三角比をどうにか考えることができないかを提案し，しばらく考えさせ，今までの考え方では無理があることを実感させたい。この過程を経ずに，いきなり円で定義し直すと，生徒は定義をし直す必要性を実感できないまま，授業を聞くことになる。

授業では，再定義の有用性を実感させながら，かつ，今までの考え方を無視した考えではなく，今までの考え方を拡張して定義していることを理解させながら進めていく必要がある。

1 改めて定義する必要性を実感させる。



予測される生徒の図

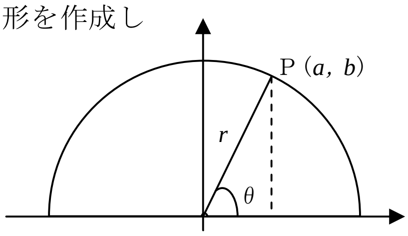
(1) θ が鈍角のときを考えさせる。

(例) $\sin 120^\circ$ の値を求めよ。

→今までの考え方では，直角三角形ができないので，今までの考え方では，$\sin 120^\circ$ の値が求められないことに気付かせる。

(2) そこで，半径 r の円で第１象限の点Ｐ$(a,\ b)$を利用して直角三角形を作成し $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を求めさせる。

→点Ｐが第１象限のとき，θ は鋭角なので今までの考え方ができ生徒は答えることができる。



(3) a を x 座標に，b を y 座標に読み替えると，

$$\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{y\text{座標}}{\text{半径}},\quad \cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{x\text{座標}}{\text{半径}},\quad \tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{y\text{座標}}{x\text{座標}}$$

とできる。この結果から，

$$\sin\theta=\frac{y\text{座標}}{\text{半径}},\quad \cos\theta=\frac{x\text{座標}}{\text{半径}},\quad \tan\theta=\frac{y\text{座標}}{x\text{座標}}$$

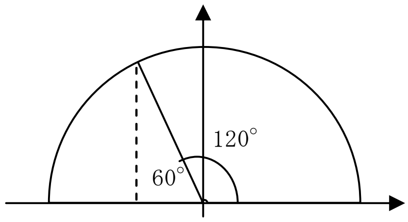
と定義し直すことができる。ここで，この方法が今までの考え方を拡張させたものであることを印象付けたい。

(4) 新しい定義で、θ が鈍角のときを考えさせる。

(例) $\sin 120^\circ$ の値を求めよ。

→半径 $r=2$ の円を描き，$\theta=120^\circ$ の動径を引く。

動径と円との交点をＰとするとき，点Ｐの座標は，



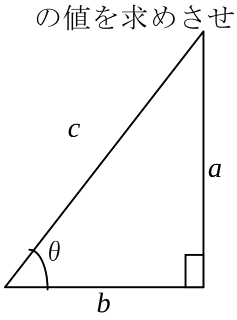
$$\mathrm{P}\,(-1,\ \sqrt{3})$$

となるので，

$$\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2　単位円での指導例

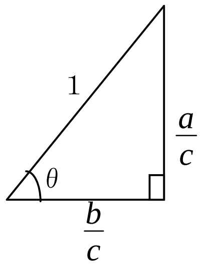
（1） 下図で，sin θ， cos θ の値を求めさせる。



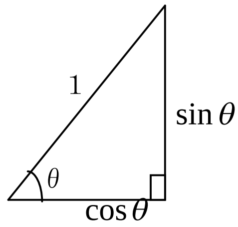
$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

（2） 各辺を c で割る。



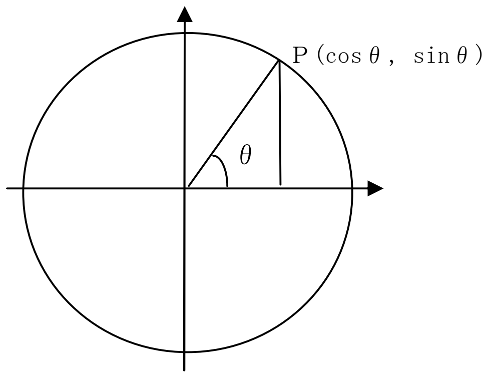
（3） θ に対する対辺と隣辺の値は，sin θ， cos θ となる。



（4） この結果を単位円に埋め込むと，円周上の点Ｐは，

　　Ｐ（cos θ , sin θ ）

となる。



(5) sin θ　の θ が鈍角のときを考えさせる。

（例） sin120°　の値を求めよ。

→半径 r＝１の円を描き， θ ＝120°　の動径を引く。

動径と円との交点をＰとするとき，点Ｐの座標は，

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となるので，

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$