２次方程式 $f(x)=0$ が $\alpha \leqq x \leqq \beta$ や $\alpha < x < \beta$ に解をもつ条件

２次方程式が，限られた区間に解をもつように条件付けるのは，結構難しい。見落としがちな場合もあるので，ここで例題を使いながらまとめをする。

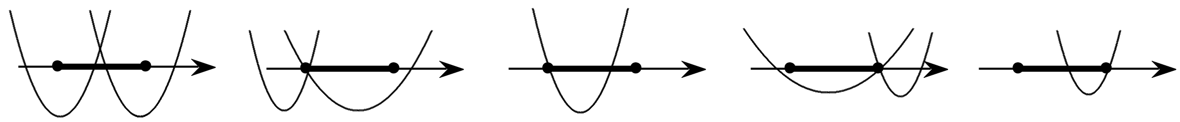
例題１　２次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0$ が異なる２つの実数解をもち，次の範囲に，ただ１つの実数解をもつような定数aの値の範囲を求めよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 2$　　　　(2) $0 < x < 2$

方針　$f(0)=0$ や$f(2)=0$ を満たすグラフは，下のような場合があるので注意する。

(1) について考えられる グラフは次のようになる。

ア　$f(0)f(2)<0$　　イ　$f(0)=0$　　ウ　$f(0)=0$　　エ　$f(2)=0$　　オ　$f(2)=0$



$f(0)$と$f(2)$が異符号
このグラフは適

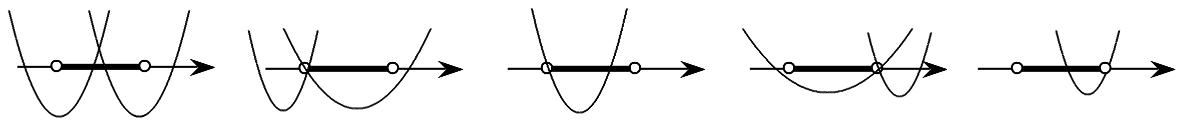
$f(0)=0$のとき，イとウの場合が考えられるが，$0 \leqq x \leqq 2$ より
条件に適するのはイのときのみ

$f(2)=0$のとき，エとオの場合が考えられるが，$0 \leqq x \leqq 2$ より
条件に適するのはエのときのみ

(注) **<u>$f(0)f(2) \leqq 0$ としてしまうと、ア～オすべてを指すことになるので使えない。</u>**

(2) について考えられる グラフは次のようになる。

ア　$f(0)f(2)<0$　　イ　$f(0)=0$　　ウ　$f(0)=0$　　エ　$f(2)=0$　　オ　$f(2)=0$



$f(0)$と$f(2)$が異符号
このグラフは適

$f(0)=0$のとき，イとウの場合が考えられるが，$0 < x < 2$ より
条件に適するのはウのときのみ

$f(2)=0$のとき，エとオの場合が考えられるが，$0 < x < 2$ より
条件に適するのはオのときのみ

(注) **<u>$f(0)f(2)<0$ だけだと、ウとオを含まなくなるので注意する</u>**。

解答

(1) (ⅰ) $f(0)$ と$f(2)$ の符合が異符号

$f(0)=a+2$, $f(2)=3a+4$　より，$f(0)f(2)<0$ となるのは，$(a+2)(3a+4)<0$

よって，$-2<a<-\dfrac{4}{3}$

(ⅱ) $f(0)=0$ のときを調べる

$f(0)=0$ より，$a=-2$　このとき，２次方程式は，$x^2-3x=0$　となり，$x=0\,,3$

区間内に，解が１つだから条件を満たす。よって，$a=-2$ は解である。

(ⅲ) $f(2)=0$ のときを調べる

$f(2)=0$ より，$a=-\dfrac{4}{3}$　このとき，２次方程式は，$x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=0$　となり，$x=2\,,\dfrac{1}{3}$

区間内に，異なる２つの実数解をもつ。よって，$a=-\dfrac{4}{3}$ は解ではない。

(ⅰ)～(ⅲ) より，a の値の範囲は　　$-2 \leqq a < -\dfrac{4}{3}$

(2) (ⅰ) $f(0)$ と $f(2)$ の符合が異符号

$f(0)=a+2$, $f(2)=3a+4$　より，$f(0)f(2)<0$ となるのは，$(a+2)(3a+4)<0$

よって，$-2<a<-\dfrac{4}{3}$

(ⅱ) $f(0)=0$ のときを調べる

$f(0)=0$ より，$a=-2$　このとき，２次方程式は，$x^2-3x=0$　となり，$x=0,3$

区間内に，解がない。よって，$a=-2$ は解ではない。

(ⅲ) $f(2)=0$ のときを調べる

$f(2)=0$ より，$a=-\dfrac{4}{3}$　このとき、２次方程式は，$x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=0$　となり，$x=2,\dfrac{1}{3}$

区間内に，１つの実数解をもつ。よって，$a=-\dfrac{4}{3}$ は解である。

(ⅰ)〜(ⅲ) より，a の値の範囲は　$-2<a\leqq-\dfrac{4}{3}$

例題２　２次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0$ が，区間 $0\leqq x\leqq 2$ に，ただ１つの実数解をもつように定数aの値の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$　与えられた区間内に重解を持つ場合Ⅰと，実数解の１つが区間内にある場合Ⅱが考えられる。

Ⅰ　区間内に重解をもつ場合

(ⅰ) ２次方程式の判別式Ｄ＝０

$D=a^2-6a-7=(a-7)(a+1)$　Ｄ＝０より，$a=-1,7$

(ⅱ) 軸 $x=-\dfrac{a-1}{2}$ が区間内　$0\leqq-\dfrac{a-1}{2}\leqq 2$　より，$-3\leqq a\leqq 1$

(ⅰ)(ⅱ)より，$a=-1$

Ⅱ　実数解の１つが区間内にある場合

(ⅲ) $f(0)$ と $f(2)$ の符合が異符号

$f(0)=a+2$, $f(2)=3a+4$　より，$f(0)f(2)<0$ となるのは，　$(a+2)(3a+4)<0$

よって，$-2<a<-\dfrac{4}{3}$

(ⅳ) $f(0)=0$ のときを調べる

$f(0)=0$ より，$a=-2$　　このとき，２次方程式は，　$x^2-3x=0$　となり，$x=0,3$

区間内に，単解が１つ　条件を満たす。　よって，$a=-2$ は解である。

(ⅴ) $f(2)=0$ のときを調べる

$f(2)=0$ より，$a=-\dfrac{4}{3}$　このとき，２次方程式は，$x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=0$　となり，$x=2,\dfrac{1}{3}$

区間内に，異なる２つの実数解をもつ。　よって，$a=-\dfrac{4}{3}$ は解ではない。

(ⅲ)〜(ⅴ) より，$-2\leqq a<-\dfrac{4}{3}$

Ⅰ，Ⅱ より，a の値の範囲は　$-2\leqq a<-\dfrac{4}{3}$, $a=-1$

例題３　２次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0$ が，区間 $0\leqq x\leqq 2$ に，少なくとも１つの実数解をもつように定数aの値の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$　与えられた区間内に２つの実数解（重解を含む）がある場合Ⅰと，実数解の１つが区間内にある場合Ⅱが考えられる。

Ⅰ　区間内に２つの実数解（重解を含む）をもつ場合

（ⅰ）２次方程式の判別式$\mathrm{D}\geqq 0$

$\mathrm{D}=a^2-6a-7=(a-7)(a+1)$　$\mathrm{D}\geqq 0$より，$a\leqq -1,\ 7\leqq a$

（ⅱ）軸 $x=-\dfrac{a-1}{2}$ が区間内　　$0\leqq -\dfrac{a-1}{2}\leqq 2$　より，$-3\leqq a\leqq 1$

（ⅲ）$f(0)\geqq 0$，$f(2)\geqq 0$

$f(0)=a+2$，$f(2)=3a+4$ より，$a\geqq -\dfrac{4}{3}$

（ⅰ）〜（ⅲ）より，$-\dfrac{4}{3}\leqq a\leqq -1$

Ⅱ　実数解の１つが区間内にある場合

（ⅳ）$f(0)$ と $f(2)$ の符合が異符号

$f(0)=a+2$，$f(2)=3a+4$　より，$f(0)f(2)<0$ となるのは，　$(a+2)(3a+4)<0$

よって，$-2<a<-\dfrac{4}{3}$

（ⅴ）$f(0)=0$ のときを調べる

$f(0)=0$ より，$a=-2$　　このとき，２次方程式は，　$x^2-3x=0$　となり，$x=0,\ 3$

区間内に，単解が１つ　条件を満たす。　よって，$a=-2$ は解である。

（ⅵ）$f(2)=0$ のときを調べる

$f(2)=0$ より，$a=-\dfrac{4}{3}$　このとき，２次方程式は，$x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=0$　となり，$x=2,\ \dfrac{1}{3}$

区間内に，異なる２つの実数解をもつ。　よって，$a=-\dfrac{4}{3}$ は解ではない。

（ⅳ）〜（ⅵ）より，$-2\leqq a<-\dfrac{4}{3}$

Ⅰ，Ⅱ より，a の値の範囲は　$-2\leqq a\leqq -1$