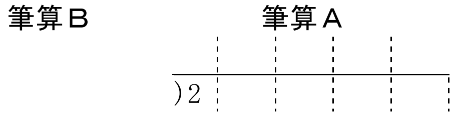
開平法の説明

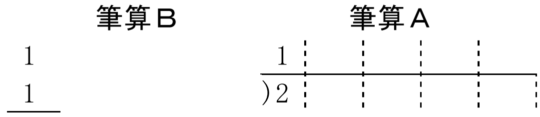
平方根の近似値の計算方法で知られている開平法について説明する。最初に，$\sqrt{2}$ を例にしてその方法を説明し，その後で原理を説明する。

（例）$\sqrt{2}$ の近似値の求め方

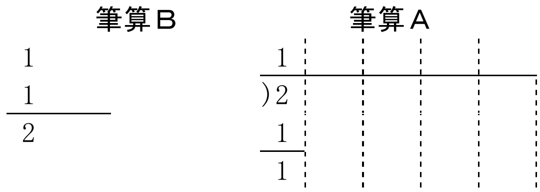
① 筆算Ａの部分で，小数点を基準に，整数部分と小数点以下の部分を２桁ずつに区切る。



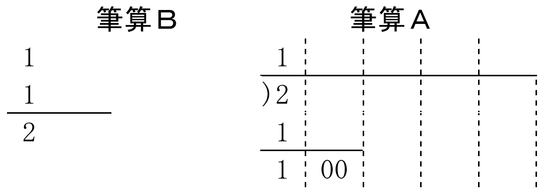
② 筆算①の２桁ずつに区切った左端の数字２に着目して，○×○≦２となる最大の整数を見つける。今回は，１である。最大の整数１を筆算Ａの２の上と，筆算Ｂに縦に同じ数字を並べて書く。



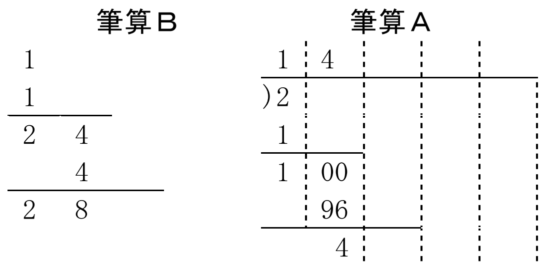
③ 筆算Ｂの方は，１と１の和を計算し下に書く。筆算Ａの方は，１と１の積の結果を２の下に書き，引き算する。



④ 筆算Ａで，引き算した結果の１の右側に数字 00 を書く。



⑤ 筆算Ｂの２の隣と，その下に同じ数字を入れ，その積の結果が筆算Ａの 100 以下になるようにとる。今回は，24×4＝96 より，４であることが分かる。その結果を筆算Ａの上部に書き，筆算Ｂの方は，24 と４の和を計算し下に書く。筆算Ａの方は，24 と４の積の結果を 100 の下に書き，引き算する。



⑥　筆算Aで，引き算した結果の４の右側に数字 00 を書く。

筆算B

1	
1	
2	4
	4
2	8

筆算A

1	4			
)2				
1				
1	00			
	96			
	4	00		

⑦　筆算Bの 28 の隣と，その下に同じ数字を入れ，その積の結果が筆算Aの 400 以下になるようにとる。今回は，281×1＝281 より，１であることが分かる。その結果を筆算Aの上部に書き，筆算Bの方は，281 と１の和を計算し下に書く。筆算Aの方は，281 と１の積の結果を 400 の下に書き，引き算する。

筆算B

1		
1		
2	4	
	4	
2	8	1
		1
2	8	2

筆算A

1	4	1		
)2				
1				
1	00			
	96			
	4	00		
	2	81		
	1	19		

⑧　以下，この④⑤や⑥⑦の作業を繰り返すことによって，$\sqrt{2}$ の近似値を求めることができる。

筆算B

1					
1					
2	4				
	4				
2	8	1			
		1			
2	8	2	4		
			4		
2	8	2	8	2	
				2	
2	8	2	8	4	1
					1
2	8	2	8	4	2

筆算A

1	4	1	4	2	1
)2					
1					
1	00				
	96				
	4	00			
	2	81			
	1	19	00		
	1	12	96		
		6	04	00	
		5	65	64	
			38	36	00
			28	28	41
			10	07	59

次に，この開平法の原理について説明する。

（開平法の原理）

$$\sqrt{2}=a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\cdots$$ （ただし，a，b，c，d ：１桁の整数）

で表されているとする。ここで,両辺を２乗して

$$2=\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\cdots\right)\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\cdots\right)\quad\cdot\cdot\cdot\langle 1\rangle$$

(1)　aを求める

$\langle 1\rangle$式の右辺を$(a+X)(a+X)$とする。

$$(a+X)(a+X)=a^2+2aX+X^2$$

とできるから，

$$2-a^2=2aX+X^2$$

右辺は正の数より，できるだけ２に近い最大の整数が求めるaである。$a=1$

Ｐ．１の作業②で，２乗して，一番２に近い整数を発見し，作業③で，その２乗を２から引いたが，その理由は，今回の(1)から分かる。

筆算Ｂ

a
a

筆算Ａ

a				
) 2				
a^2				
1				

(2)　bを求める

$\langle 1\rangle$式の右辺を$\left(a+\frac{b}{10}+Y\right)\left(a+\frac{b}{10}+Y\right)$とする。

$$\left(a+\frac{b}{10}+Y\right)\left(a+\frac{b}{10}+Y\right)=\left(a+\frac{b}{10}\right)^2+2\left(a+\frac{b}{10}\right)Y+Y^2$$

$$=a^2+2a\frac{b}{10}+\left(\frac{b}{10}\right)^2+2\left(a+\frac{b}{10}\right)Y+Y^2$$

$$=a^2+\left(2a+\frac{b}{10}\right)\frac{b}{10}+2\left(a+\frac{b}{10}\right)Y+Y^2$$

とできるから，

$$2-a^2-\left(2a+\frac{b}{10}\right)\frac{b}{10}=2\left(a+\frac{b}{10}\right)Y+Y^2$$

筆算Ａと見比べるのに，分かりやすくするため，$2-a^2$の部分は計算して１と書く。

$$1-\left(2a+\frac{b}{10}\right)\frac{b}{10}=2\left(a+\frac{b}{10}\right)Y+Y^2$$

bを求めやすくするために，両辺を 100 倍して

$$100-(20a+b)b=200\left(a+\frac{b}{10}\right)Y+100Y^2\quad\cdot\cdot\cdot\langle 2\rangle$$

右辺は正の数より，$(20a+b)b$が，できるだけ 100 に近くなるようにbを決める。$b=4$

Ｐ．１の作業④で，１の隣に，00 を追加したが，その理由は$\langle 2\rangle$式から分かる。また，筆算Ａで，$20a+b$とbの積を 100 から引く理由も$\langle 2\rangle$式から分かる。

そして，作業③において，筆算Ｂで和を計算しているが，その理由は,

$$20a+b=2a\times 10+b=(a+a)\times 10+b$$

と変形すれば分かる。

筆算Ｂ

a	
a	
$2a\times 10$	$+b$
	b

筆算Ａ

1	b	
)2		
a^2		
1	00	
$(20a+b)b$		
4		

(3)　cを求める

〈1〉式の右辺を$\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+Z\right)\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+Z\right)$とする。

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+Z\right)\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+Z\right)&=\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)^2+2\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)Z+Z^2\\&=\left(a+\frac{b}{10}\right)^2+2\left(a+\frac{b}{10}\right)\frac{c}{100}+\left(\frac{c}{100}\right)^2+2\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)Z+Z^2\\&=a^2+\left(2a+\frac{b}{10}\right)\frac{b}{10}+\left(2a+\frac{2b}{10}+\frac{c}{100}\right)\frac{c}{100}+2\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)Z+Z^2\end{aligned}$$

とできるから，

$$2-a^2-\left(2a+\frac{b}{10}\right)\frac{b}{10}-\left(2a+\frac{2b}{10}+\frac{c}{100}\right)\frac{c}{100}=2\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)Z+Z^2$$

先ほどと同じように，$2-a^2$の部分は計算して１とし，100 倍すると，

$$100-(20a+b)b-\left(20a+2b+\frac{c}{10}\right)\frac{c}{10}=200\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)Z+100Z^2$$

$100-(20a+b)b$は，筆算Ａと見比べるのに，分かりやすくするため，４とする。

$$4-\left(20a+2b+\frac{c}{10}\right)\frac{c}{10}=200\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)Z+100Z^2$$

cを求めやすくするために，両辺を 100 倍して

$$400-(200a+20b+c)c=2\cdot10^4\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\right)Z+10^4Z^2\ \cdot\cdot\cdot〈3〉$$

右辺は正の数より，$(200a+20b+c)c$が，できるだけ 400 に近くなるようにcを決める。c＝1

Ｐ．２の作業⑥で，４の隣に，00 を追加したが，その理由は〈3〉式から分かる。また，筆算Ａで，$200a+20b+c$とcの積を 400 から引く理由も〈3〉式から分かる。

そして，作業⑤において，筆算Ｂで和を計算しているが，その理由は，

$$200a+20b+c=200a+2b\times10+c=200a+(b+b)\times10+c$$

と変形すれば分かる。

筆算Ｂ

a		
a		
$2a\times10$	$+b$	
	b	
$2a\times100$	$+2b\times10$	$+c$
		c

筆算Ａ

1	4	1
)2		
a^2		
1	00	
	96	
	4	00
	$(200a+20b+c)c$	

以下，この手順の繰り返しとなる。筆算Ａと筆算Ｂが，互いに補い合って成り立っており，非常によく考えられた筆算である。

（参考１）２乗の展開公式を利用した平方根の近似値

aの絶対値が１より小さい数のとき，a^2は大変小さな数となり，無視することができるとする。

$\sqrt{2}=1+a_1$（$\sqrt{2}$は１と少し）とおき，両辺２乗すると

$2=1+2a_1+{a_1}^2$

ここで，${a_1}^2$はa_1より大変小さな数なので無視すると

$2 \fallingdotseq 1+2a_1$　　$\therefore a_1 \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$　　これより　$\sqrt{2} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

次に，$\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}+a_2$とおき，両辺を２乗すると

$2=\dfrac{9}{4}+3a_2+{a_2}^2$

ここで，${a_2}^2$はa_2より大変小さな数なので無視すると

$2 \fallingdotseq \dfrac{9}{4}+3a_2$　　$\therefore a_2 \fallingdotseq -\dfrac{1}{12}$　　これより　$\sqrt{2} \fallingdotseq \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{17}{12}$

次に，$\sqrt{2}=\dfrac{17}{12}+a_3$とおき，両辺を２乗すると

$2=\dfrac{289}{144}+\dfrac{17}{6}a_3+{a_3}^2$

ここで，${a_3}^2$はa_3より大変小さな数なので無視すると

$2 \fallingdotseq \dfrac{289}{144}+\dfrac{17}{6}a_3$　　$\therefore a_3 \fallingdotseq -\dfrac{1}{408}$　　これより　$\sqrt{2} \fallingdotseq \dfrac{17}{12}-\dfrac{1}{408}=\dfrac{577}{408}$

３乗根，４乗根などの近似値については，それぞれ３乗の展開公式，４乗の展開公式などを利用して近似値を求めることができる。ただし，計算は大変である。