

対偶証明法と背理法

「集合と論証」で習う証明法の中に、対偶証明法と背理法がある。この違いについて考察する。

1 用語の確認と補足事項のまとめ

(1) 命題

正しいか正しくないかが定まる文や式のことを命題という。

(2) 合成命題（複合命題）

それ以上分割できない命題を単純命題というのに対し、複数の単純命題を合成してできた命題を合成命題（複合命題）という。代表的なものに以下のようなものがある。

命題 p 、命題 q とするとき、

「 p かつ q ($p \wedge q$)」、「 p または q ($p \vee q$)」、「 p ならば q ($p \Rightarrow q$)」

我々がよく使う「 p ならば q ($p \Rightarrow q$)」は、仮言命題とか含意命題などという場合もある。

(3) 合成命題の真偽

命題 p 、命題 q の真偽と上記の合成命題の真偽を真理表にまとめると右のようになる（真を“1”、偽を“0”）。

ここで、注意すべき点は、命題 p が偽のとき、合成命題 $p \Rightarrow q$ の真偽は、命題 q の真偽に関わらず、必ず真になることである。

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

表 1

(例) 命題 p と命題 q を次のようにする。

命題 p : 宝くじに当たる、 命題 q : 外国で生活する

すると、合成命題 $p \Rightarrow q$ は、

合成命題 $p \Rightarrow q$: 宝くじに当たったならば、外国で生活する

となる。このとき、命題 p が偽のとき、つまり、宝くじに当たらなかったときはどこで生活するとは言っていないので、どこにいてもよいことになる。このように、命題 p が偽のとき、命題 q は真でも偽でも構わないということで、合成命題 $p \Rightarrow q$ は真と考える。

(4) 条件

変数を含む方程式 ($x^2 - 3x + 2 = 0$) や不等式 ($3x - 2 > 0$) などは、変数に値を代入することで真偽が定まるので、命題となる。このように、変数を含む文や式で、その変数に値を代入したときに真偽が決まるものを条件または条件命題という。「条件 p 」と書くことが多いが、変数を明らかにしたいときは「 $p(x)$ 」と書く。

(5) 真理集合

条件 $p(x)$ を真とするような変数 x の集合を「条件 $p(x)$ の真理集合」という。

(6) 条件の否定と命題の否定

教科書や問題集を見ると、条件の否定を学習した後、“すべての”、“ある”が付いた条件が登場し、「命題を否定せよ」と書かれ、条件の否定なのか命題の否定なのか、その区別に悩む生徒が出てくるが、先にも触れたとおり、条件は条件命題といわれるとおり、命題なので、どちらも、“命題の否定”なのである。“すべての”が付いた命題を全称命題、“ある”の付いた命題を特称命題といい、全称命題と特称命題の否定は以下のとおりである。

全称命題「すべての x について $p(x)$ である」の否定は、「ある x について $p(x)$ でない」

特称命題「ある x について $p(x)$ である」の否定は、「すべての x について $p(x)$ でない」

(7) 合成命題の否定

合成命題の否定についてもまとめておく。

ア $p \wedge q$ 、 $p \vee q$ の否定

合成命題 $p \wedge q$ の否定 $\overline{p \wedge q}$ と、合成命題 $p \vee q$ の否定 $\overline{p \vee q}$ は、右の真理表から、

$$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$$

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$$

となる。これをド・モルガンの法則という。

真理集合を使って証明してもよい。

イ $p \Rightarrow q$ の否定

「 p ならば q である」を否定すると、「 p であって q でない」となる。論理式で書くと、 $p \wedge \bar{q}$ となる。

このことは、右の真理表で命題 $\overline{p \Rightarrow q}$ と命題 $p \wedge \bar{q}$ の真偽結果を見れば、論理的に同値であることから分かる。

$$\overline{p \Rightarrow q} = p \wedge \bar{q}$$

p	q	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p \vee q}$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

表 2

$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

表 3

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$p \wedge \bar{q}$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

表 4

(8) 合成命題 $p \Rightarrow q$ の逆、裏、対偶の真偽

合成命題 $p \Rightarrow q$ の逆、裏、対偶の真偽を真理表にまとめると右のようになる。この結果から、合成命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の真偽は一致し、論理的に同値であることが分かる。

このことは、真理集合を用いると分かり

やすい。合成命題 $p \Rightarrow q$ が真のときの真理集合の様子をベン図で表すと、図 1 のようになる。

この図で条件 $\bar{Q}$ と条件 $\bar{P}$ の真理集合に斜線を入れると、図 2、図 3 のようになり、対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ が真であることがわかる。

p	q	$p \Rightarrow q$	逆 $q \Rightarrow p$	裏 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$	対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

表 5

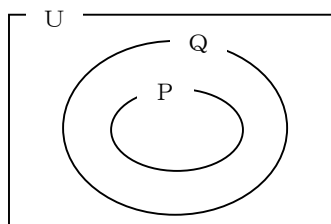


図 1

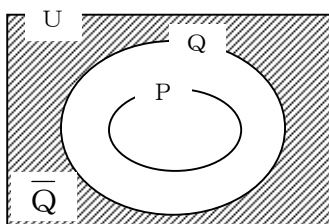


図 2

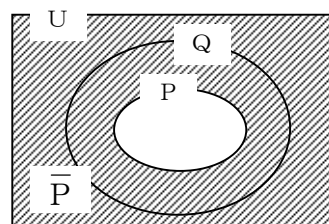


図 3

2 対偶証明法

真理表 5 より、合成命題 $p \Rightarrow q$ の真偽とその対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の真偽は一致し、論理的に同値である。したがって、合成命題 $p \Rightarrow q$ が真であることを証明したいとき、対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ が真であることを証明してもよい。この証明法を“対偶証明法”という。

(例題) n を整数とするとき、 n^2 が偶数ならば、 n は偶数であることを証明せよ。

(証明) 対偶「 n が奇数ならば、 n^2 は奇数である」が真であることを証明すればよい。

n が奇数より、 $n = 2k - 1$ (k は整数) とおく。

$$n^2 = (2k - 1)^2 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

より、 n^2 は奇数である。対偶が真であることが証明されたので、

「 n^2 が偶数ならば、 n は偶数である」は真である。

3 背理法

命題 p が成り立つことを証明したいとき、命題 p が成り立たないと仮定すると、矛盾が起こることを導き、命題 p が成り立つことを証明する方法がある。このような証明方法を背理法という。

このときの命題 p は、単純な命題のときもあれば、「 p ならば q である」のように合成命題のときもある。

(1) 単純な命題の証明

背理法を用いた証明でよく扱われる単純な命題に「 $\sqrt{2}$ が無理数である」がある。“ならば”の部分がないのが特徴である。

(例題 1) $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(証明) $\sqrt{2}$ が有理数とすると、互いに素な自然数 m 、 n ($m \neq 0$) を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

と表すことができる。この式を2乗して分母をはらうと、

$$2m^2 = n^2 \cdots \textcircled{1}$$

となり、 n は偶数である。よって、 n は自然数 k を用いて、

$$n = 2k$$

と表すことができる。

この結果を、 $\textcircled{1}$ 式に代入すると、

$$m^2 = 2k^2$$

となり、 m は偶数である。これは、 m 、 n が互いに素であることに矛盾する。ゆえに、 $\sqrt{2}$ が有理数ではない。つまり、 $\sqrt{2}$ が無理数である。

(2) 合成命題 $p \Rightarrow q$ の証明

先にも触れたとおり、命題が成り立たない、つまり命題を否定して矛盾を導くのが背理法である。合成命題 $p \Rightarrow q$ の否定は、 $p \wedge \bar{q}$ であるから、 $p \wedge \bar{q}$ を仮定すると矛盾することを導く。

(例題 2) 正の整数 a 、 b 、 c の間に、 $a^2 + b^2 = c^2$ の関係が成り立つならば、 a 、 b 、 c のうち、少なくとも一つは偶数である。

(証明) a 、 b 、 c がすべて奇数とすると、

$$a = 2l - 1, b = 2m - 1, c = 2n - 1 \quad (l, m, n \text{ は自然数})$$

とおくことができる。 $a^2 + b^2 = c^2$ より、

$$(2l - 1)^2 + (2m - 1)^2 = (2n - 1)^2$$

$$2(2l^2 - 2l + 2m^2 - 2m + 1) = 2(2n^2 - 2n) + 1$$

l 、 m 、 n は自然数より、左辺は偶数で、右辺は奇数となり矛盾する。

4 対偶証明法と背理法の違い

対偶証明法と背理法の違いとして次の2点があげられる。

- ① 背理法は“ならば”の部分に伴わない単純な命題でも証明できる。
- ② 合成命題 $p \Rightarrow q$ の証明で、

- ・対偶証明法は、対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を示す。つまり、 $\bar{q}$ を仮定して $\bar{p}$ を証明する。
- ・背理法は、合成命題 $p \Rightarrow q$ を否定して矛盾を導く。ここで、 $\overline{p \Rightarrow q} = p \wedge \bar{q}$ より、二つの条件 p と $\bar{q}$ が成り立つと仮定して矛盾を導く。

どちらも $\bar{q}$ を仮定しているので、対偶証明法と背理法が同じように思われてしまうが、対偶証明法が条件 $\bar{q}$ のみを使って、 $\bar{p}$ を証明するのに対し、背理法は、二つの条件 p と $\bar{q}$ を使って導くところに大きな違いがある。

先ほどの、(例題2) を対偶証明法と背理法の違いを意識して証明すると、次のようになる。

(例題2) 正の整数 a 、 b 、 c の間に、 $a^2 + b^2 = c^2$ の関係が成り立つならば、 a 、 b 、 c のうち、少なくとも一つは偶数である。

対偶証明法による証明	背理法による証明
対偶は 「a、b、c がすべて奇数ならば、 $a^2 + b^2 \neq c^2$ である」 a、b、c がすべて奇数とすると、 $a = 2l - 1$、$b = 2m - 1$、$c = 2n - 1$ (l、m、n は自然数) とおくことができる。 $a^2 + b^2 \neq c^2$ の左辺は、 左辺 $= (2l - 1)^2 + (2m - 1)^2$ $= 2(2l^2 - 2l + 2m^2 - 2m + 1) \cdots \textcircled{1}$ 一方、$a^2 + b^2 \neq c^2$ の右辺は 右辺 $= (2n - 1)^2$ $= 2(2n^2 - 2n) + 1 \cdots \textcircled{2}$ ①、②で l、m、n は自然数より、左辺は偶数で、右辺が奇数なので、左辺と右辺は等しくないことがわかる。 よって、対偶が真なので、元の命題も真である。	a、b、c がすべて奇数とすると、 $a = 2l - 1$、$b = 2m - 1$、$c = 2n - 1$ (l、m、n は自然数) とおくことができる。 $a^2 + b^2 = c^2$ より、 $(2l - 1)^2 + (2m - 1)^2 = (2n - 1)^2$ $2(2l^2 - 2l + 2m^2 - 2m + 1) = 2(2n^2 - 2n) + 1$ l、m、n は自然数より、左辺は偶数で、右辺は奇数となり矛盾する。 よって、与えられた命題は真である。
(補足説明) $a^2 + b^2 \neq c^2$ を証明するので、 「左辺 $= \cdots$、右辺 $= \cdots$」 のように、解答していく。	(補足説明) $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つと仮定しているので、 「左辺 $= \cdots$、右辺 $= \cdots$」 とせず、$a^2 + b^2 = c^2$ に直接、代入して矛盾を導く。