$y=f(x)$ で囲まれた部分の面積

積分すれば面積が求められるという説明を，教科書では微分積分学の基本定理を使って，以下のようにしている。

図１

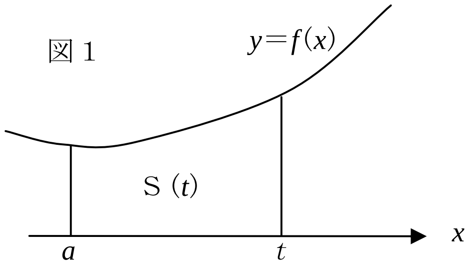


図２

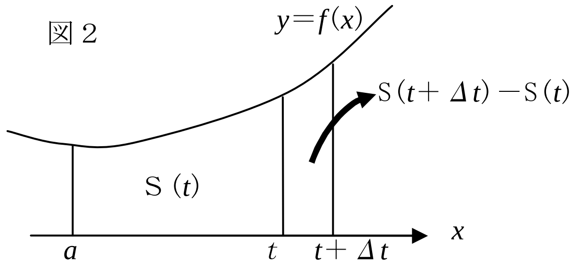
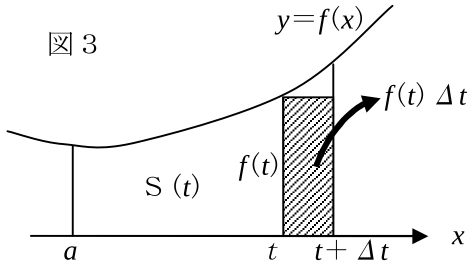


図３



① $y=f(x)$ と x 軸，直線 $x=a$，$x=t$ で囲まれた部分の面積を，S(t) とする（図１）。

② x の値を t から Δt だけ増加させたときの面積の増分（図２）は，

（面積の増分）＝S$(t+\Delta t)-$S(t)

③ Δt が非常に小さな値のとき，増加した部分はほぼ長方形のようになるので，面積の増分は，

（面積の増分）＝$f(t)\,\Delta t$

となる（図３）。

④ 以上の結果から，

S$(t+\Delta t)-$S$(t)\fallingdotseq f(t)\,\Delta t$

となり，両辺を Δt で割った後，Δt を０に近づけることによって，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{S}(t+\Delta t)-\mathrm{S}(t)}{\Delta t}=f(t)$$

つまり，$S'(t)=f(t)$ となる。

⑤ $f(t)$ の原始関数を F(t) とすると，

$$\mathrm{S}(t)=\int f(t)dt=\mathrm{F}(t)+C$$

ここで，$t=a$ とすると，$C=-\mathrm{F}(a)$ となることから，

$$\mathrm{S}(t)=\int f(t)dt=\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(a)$$ よって，$S(t)=\int_a^t f(t)dt$ となる。

これに加えて、区分求積法の考え方を紹介することにより，生徒の理解を深めさせるのも有効な指導法である。

区分求積法について説明した後，具体的に次のステップで立式していく。

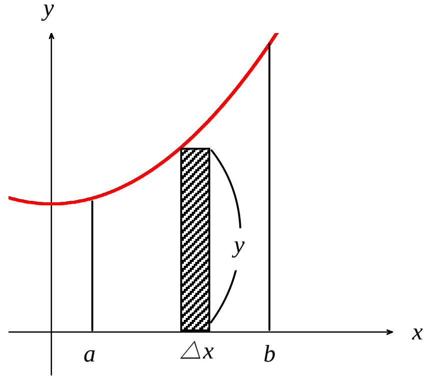
(step１) グラフの概形をかき，スライスする方向を決め，長方形の短冊を描き入れる。

(step２) 長方形の**短冊の面積を $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{\Delta x}$，$\boldsymbol{\Delta y}$ で表す**。

（長方形の面積）＝$y\,\Delta x$

(step３) 長方形の面積の総和を $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{dx}$，$\boldsymbol{dy}$ で表す。

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum y\Delta x=\int_a^b ydx$$

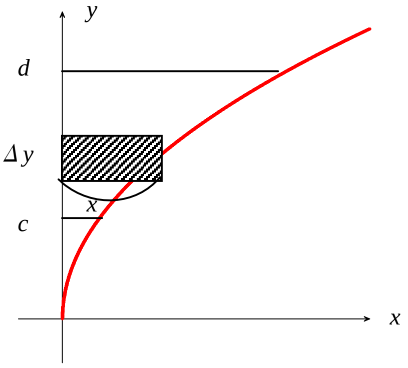


ポイントとは，x，y，dx，dy のまま立式するところである。

この方法が定着すると，y 軸とで囲まれる部分の面積の問題や，回転体の体積の問題も立式が簡単にできる。

例えば，$x=f(y)$ と $y=c$，$y=d$，y 軸で囲まれた部分の

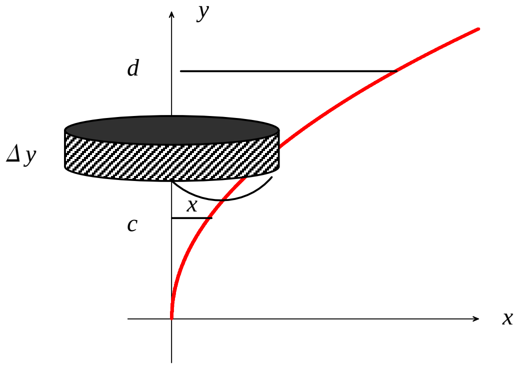
面積を求める式



短冊の面積　$x\Delta y$

面積の総和　$S=\int_c^d xdy$

y 軸回転させたときの体積を求める式



円盤の体積　$\pi x^2\Delta y$

体積の総和　$V=\int_c^d \pi x^2 dy$

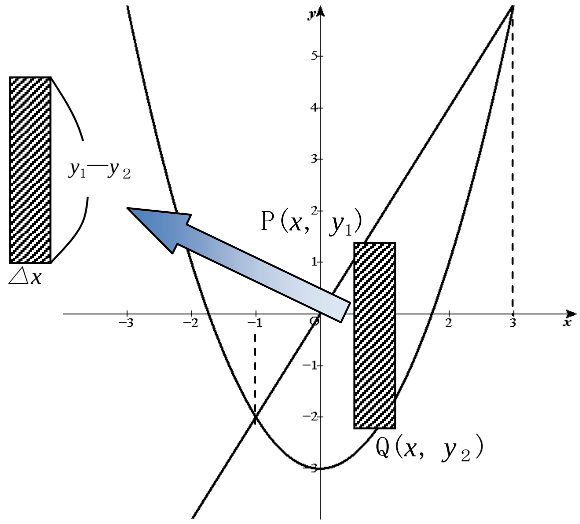
（例）$y_1=2x$ と $y_2=x^2-3$ とで囲まれた部分の面積を求めなさい。

（解）長方形の短冊の面積は，

$(y_1-y_2)\cdot\Delta x$

$S=\int_{-1}^{3}(y_1-y_2)dx$

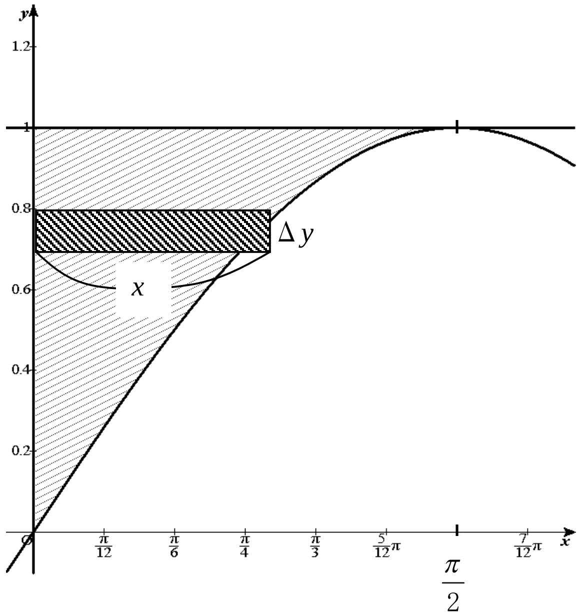
$=\int_{-1}^{3}(2x-x^2+3)dx=\dfrac{32}{3}$



次のような数学Ⅲの問題にも応用することができる。

（例題１）　$y=\sin x$，直線 y＝１，y 軸で囲まれた部分を y 軸回転させたときの立体の体積を求めよ。

（解説）　図から，$V=\int_0^1 \pi x^2 dy$　あとは，積分計算であるが，x と y が混在しているので置換積分のようにどちらかに統一する。この問題では，$dy=\cos x\cdot dx$，積分区間を０から $\pi/2$ として，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 \cos x\cdot dx$ を計算する。



（例題２）　$x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$　（$0\leqq\theta\leqq2\pi$），x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

（解説）　図から，$S=\int_0^{2\pi} y dx$　あとは，積分計算であるが，$dx=(1-\cos\theta)d\theta$，$y=1-\cos\theta$

積分区間は０から 2π だから，$\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta$ を計算する。