三角関数の合成

合成の公式 $a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ を用いれば一つの三角関数にまとめることができるが，合成の公式を使うことにより，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の２つの関数(波)が合わさって，１つの関数(波)になることを，実際にコンピュータを使って視覚で確認させることにより，合成の公式の素晴らしさを知らせることも重要である。

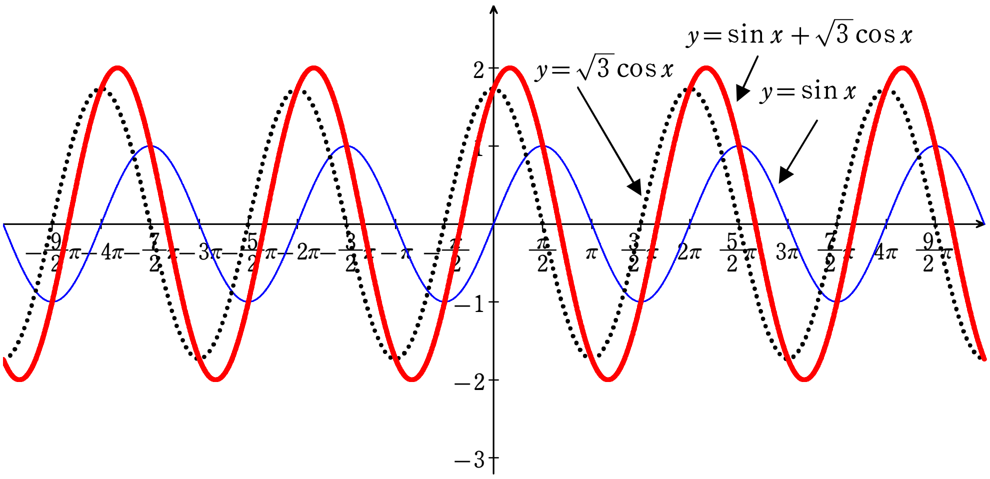
公式の導き方は，教科書のように加法定理を利用して導く方法が一般的だが，直角三角形を利用して導く方法もあるので参考にしていただきたい。

また，ある程度定着した後に，cos の合成を紹介したり，恒等式の考え方を紹介したりして，生徒の理解を深めるのも良い。

1　グラフで合成の確認

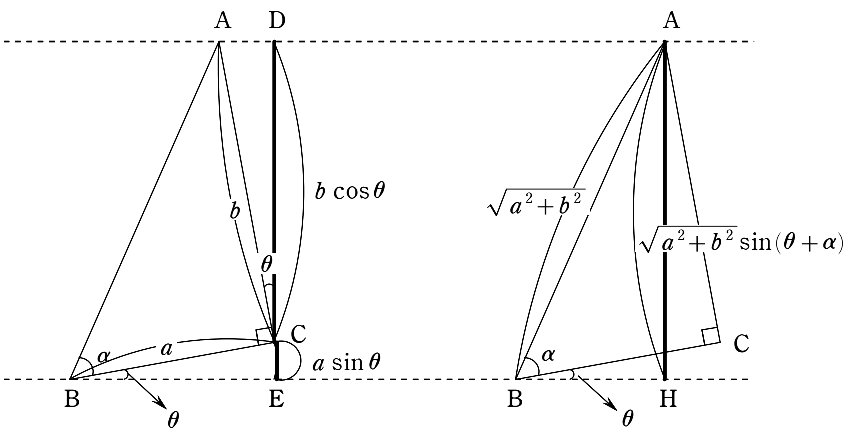
合成の公式 $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ から，２つの波が合わさり１つの新しい波になっていることが分かる。これを，コンピュータを用いて，視覚的な理解を促す。

例）$y=\sin\theta$， $y=\sqrt{3}\cos\theta$， $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ のグラフを GRAPES で作成し， $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ のグラフが１つの波形になることを確認する。次に，公式で変形した $y=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$ のグラフを表示して， $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ のグラフと一致することを確かめる。



2　直角三角形を利用した三角関数の合成

∠Ｃが直角の直角三角形ＡＢＣで，ＢＣ＝a，ＡＣ＝b，∠Ｂ＝α，とする。△ＡＢＣを，点Ｂを中心にθだけ回転した場合を考える。



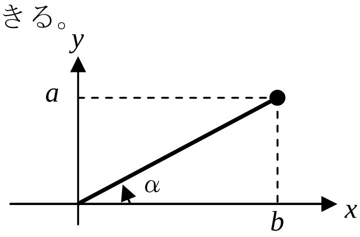
$$ＣＥ＋ＣＤ＝a\sin\theta + b\cos\theta$$
$$ＡＨ＝\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

右図より ＣＥ＋ＣＤ＝ＡＨ が成り立つので，

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ が成り立つ。

3　cos への合成を紹介し理解を深める

一通り学習し終えた後，$a\sin\theta + b\cos\theta$ の a の値を y 軸に，b の値を x 軸にとり，合成の式がどのようになるかを考えさせると，さらに合成について理解を深めることができる。



（例）　$a\sin\theta + b\cos\theta$

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha,\quad b = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$$

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\sin\theta + \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha\cos\theta \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

4　恒等式の考え方から三角関数の合成の式を作る

等式 $a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$ を θ についての恒等式と考えて，r と α を求めることができる。

（例）　$r>0$，$-\pi \leqq \alpha < \pi$ として，$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形する。

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta &= r\sin(\theta+\alpha) \\ &= r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \end{aligned}$$

θ についての恒等式と考えて，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の係数を比較する。

$\sqrt{3} = r\cos\alpha$ ･･･①

$-1 = r\sin\alpha$ ･･･②

①，②より，

$r^2 = 4$　　　よって，$r>0$ より，$r = 2$

この結果を①，②に代入して

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\alpha = -\frac{1}{2}$$

$-\pi \leqq \alpha < \pi$ より，$\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$

この恒等式の考え方を使うと，$r\cos(\theta+\alpha)$ への変形もできる。

（例）　$r>0$，$-\pi \leqq \alpha < \pi$ として，$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ を $r\cos(\theta+\alpha)$ の形に変形する。

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta &= r\cos(\theta+\alpha) \\ &= r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \end{aligned}$$

θ についての恒等式と考えて，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の係数を比較する。

$-1 = r\cos\alpha$ ･･･①

$\sqrt{3} = -r\sin\alpha$ ･･･②

①，②より，

$r^2 = 4$　　　よって，$r>0$ より，$r = 2$

この結果を①，②に代入して

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\pi \leqq \alpha < \pi$ より，$\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$