相加平均・相乗平均の関係を活用した不等式の証明

不等式の証明は，(左辺)－(右辺) を計算して，“＞0”あるいは“＜0”を示すのが基本である。しかし，相加平均・相乗平均の関係を用いる証明では，上記のような式変形ではなく，直接，「(相加平均)≧(相乗平均)」の関係式に当てはめて証明する場合が多い。(相加平均･相乗平均の関係自体は (左辺)^2－(右辺)^2≧０で示す)。

同じ単元で学習する内容であるが，相加平均･相乗平均の関係を用いる証明方法は，他の論法と全く違う論法なので，注意して指導していく必要がある。

生徒は，平均というと，テスト等の平均点で使用する相加平均を連想する。ほとんどの生徒が，その他に平均というものがあることを知らない。そこで，相加平均以外に，どのような平均があるのかを紹介することから始めることが大切である。

1 相加平均・相乗平均・調和平均について

(1) 「倍数の平均」は相乗平均で考える。

(例) 1,000 円が翌年 3 倍，その次の年 8 倍になったとする。年平均何倍になったか。

(解説) 実際に計算すると，右の表のように，1,000 円は 24,000 円になる。

今年	→	翌年	→	翌々年
1,000	×3	3,000	×8	24,000

３と８の相乗平均は,

$\sqrt{3\times 8}=2\sqrt{6}$

より，右表のようになる。

今年	→	翌年	→	翌々年
1,000	$\times 2\sqrt{6}$	$2,000\sqrt{6}$	$\times 2\sqrt{6}$	24,000

(参考) ちなみに，３と８の相加平均だと

$\dfrac{3+8}{2}=5.5$

よって，右の表の通り結果が一致しないことを生徒に示すのもよい。

今年	→	翌年	→	翌々年
1,000	×5.5	5,500	×5.5	30,250

(2) 「速さの平均」は調和平均で考える。

(例) 120km 離れた 2 地点Ａ,Ｂ間を行きは時速８km，帰りは時速 12km で往復した。平均時速何 km で移動したことになるか。

(解説) 実際にかかった時間を計算して平均の速さを求めると，右の表のように，9.6km/h となる。

Ａ→Ｂ	Ｂ→Ａ	合計時間	平均時速
15h	10h	25h	9.6km/h

そこで，８と 12 の調和平均を計算すると，$\dfrac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}=9.6$ km/h　同じ結果が得られる。

2 相加平均と相乗平均の関係への当てはめ方について

相加平均と相乗平均の関係が分かっていても，その活用方法が分からない生徒が多くいる。そこで，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ の a に当たる部分を○，b に当たる部分を□として

○＋□$\geq 2\sqrt{○□}$

のように指導すると分かりやすい。等号成立条件も，○＝□ のときになるので、立式しやすい。

(例)$a>0$ のとき，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$ を証明せよ。

(解説) $a+\boxed{\dfrac{4}{a}}\geqq 4$ のように，○に当たる部分，□に当たる部分を囲い，○＋□$\geq 2\sqrt{○□}$ に当てはめる。すると，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}=2\cdot 2=4$

等号成立は，○＝□のときなので，$a=\dfrac{4}{a}$

$a>0$ なので，$a=2$ のとき等号が成り立つ。

問題１　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geq 9$ を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。

（解答）　(左辺)＝$ab+4+1+\dfrac{4}{ab}=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

ここで，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ より相加平均・相乗平均の関係から

$$ab+\frac{4}{ab}+5\geq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=4+5=9$$

よって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geq 9$ は成り立つ。

等号成立は $ab=\dfrac{4}{ab}$ のとき，すなわち $(ab)^2=4$

$a>0$，$b>0$ より $ab=2$ のとき

（参考）　この問題でよくある誤答は，

（誤答）　$a+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ……①

$b+\dfrac{4}{a}\geq 2\sqrt{b\cdot\dfrac{4}{a}}=4\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ……②

①，②を辺々かけ合わせて

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\times 4\sqrt{\dfrac{b}{a}}=8$ ……③

どこが間違っているかというと，

①では $a=\dfrac{1}{b}$ すなわち $ab=1$ のとき等号が成り立つ。

②では $b=\dfrac{4}{a}$ すなわち $ab=4$ のとき等号が成り立つ。

つまり，それぞれの最小値を与える条件が異なっており，同時に最小とならないために起こったミスである。等号成立条件を確認する意味も合わせて指導したい。

以下の例ではどうであろうか。

（例）　$a>0, b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{4}{b}\right)\geq 8$ を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。