部分分数分解

数列のΣ計算や積分の計算など，複雑な分数式を部分分数分解して解を求める場合がよくある。ここでは，部分分数分解の幾つかの方法を紹介する。

［例題１］　次の分数式を部分分数に分解しなさい。

$$\frac{1}{k(k+2)}$$

（解答１）　分母を払って恒等式を解く

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+2}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

とおいて両辺に$k(k+2)$をかけると

$$1=a(k+2)+bk\quad\cdot\cdot\cdot②$$

これはkについての恒等式なので，数値代入法か，係数比較法で解く。

＜係数比較法＞

②式をkについて整理

$$1=(a+b)k+2a$$

両辺の係数を比較して

$$a+b=0,\quad 2a=1$$

これより，

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2}$$

なので①式は

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

＜数値代入法＞

②式のkに，$k=0$を代入すると$1=2a$

よって，$a=\frac{1}{2}$

②式のkに，$k=-2$を代入すると$1=-2b$

よって，$b=-\frac{1}{2}$

①式は

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\quad\cdot\cdot\cdot①$$

逆にこのとき①式は，すべてのkで成り立つ。

（解答２）　一部の分母を払って，恒等式を数値代入法で解く

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+2}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

とする。①の両辺にkをかけて

Point ！
値を求めたい文字の分母を払う。

$$\frac{1}{k+2}=a+\frac{bk}{k+2}$$

kについての恒等式なので，$k=0$を代入すると，$a=\frac{1}{2}$

次に，①の両辺に$k+2$をかけて，

$$\frac{1}{k}=\frac{a(k+2)}{k}+b$$

kについての恒等式なので，$k=-2$を代入すると，$b=-\frac{1}{2}$

よって①は

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

逆にこのa，bのとき，すべてのkで成り立つ。

（解答３）　等式$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$の利用

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{(k+2)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

Point！
この等式を活用できればかなり簡単に求められる。検算にも有効。

［例題２］　次の分数式を部分分数に分解しなさい。

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

（解答１）　分母を払って恒等式を解く

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k(k+1)}+\frac{b}{(k+1)(k+2)}\quad\cdots①$$

とする。①式の両辺に$k(k+1)(k+2)$をかけて，

$$1=a(k+2)+bk\quad\cdots②$$

これはkについての恒等式なので，数値代入法か，係数比較法で解く。

＜係数比較法＞

②式をkについて整理

$$1=(a+b)k+2a$$

両辺の係数を比較して

$$a+b=0,\quad 2a=1$$

これより，

$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2}$$

なので①式は

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

＜数値代入法＞

②式のkに，$k=0$を代入すると$1=2a$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

②式のkに，$k=-2$を代入すると$1=-2b$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}$

①式は

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\quad\cdots①$$

逆にこのとき①式は，すべてのkで成り立つ。

（解答２）　一部の分母を払って，恒等式を数値代入法で解く

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k(k+1)}+\frac{b}{(k+1)(k+2)}\quad\cdots①$$

とする。①式の両辺に$k(k+1)$をかけて

$$\frac{1}{k+2}=a+\frac{bk}{k+2}$$

kについての恒等式なので，$k=0$を代入すると，$a=\dfrac{1}{2}$

①式の両辺に$(k+1)(k+2)$をかけて

$$\frac{1}{k}=\frac{a(k+2)}{k}+b$$

kについての恒等式なので，$k=-2$を代入すると，$b=-\dfrac{1}{2}$

①式は

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\quad・・・①$$

逆にこのa，bのとき，すべてのkで成り立つ。

（解答３）　$\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$の利用

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$\boxed{\text{Point !}}$

$k(k+1)\cdots(k+n)$のように、どれだけ式が長くなっても、両端のkと$k+n$だけに注目し、部分分数分解すればよい。

［例題３］　次の分数式を部分分数に分解しなさい。

$$\frac{1}{x^2(x-1)}$$

（解答１）　分母を払って恒等式を解く

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}\quad・・・①$$

とする。①式の両辺に$x^2(x-1)$をかけて，

$$1=ax(x-1)+b(x-1)+cx^2\quad・・・②$$

これはxについての恒等式なので，数値代入法か，係数比較法で解く。

＜係数比較法＞

②式をxについて整理

$$1=(a+c)x^2+(-a+b)x-b$$

両辺の係数を比較して

$$a+c=0，\ -a+b=0，\ -b=1$$

これより，

$$a=-1，\ b=-1，\ c=1$$

なので①式は

$$\frac{1}{x^2(x-1)}$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}$$

＜数値代入法＞

②式のxに，$x=0$を代入すると$b=-1$

xに，$x=1$を代入すると$c=1$

xに，$x=-1$を代入すると

$$2a-2b+c=1$$

よって，$a=-1$

①式は

$$\frac{1}{x^2(x-1)}$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}$$

逆にこのとき①式は，すべてのxで成り立つ。

（解答２）　一部の分母を払って，恒等式を数値代入法で解く

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}\quad\cdots\text{①}$$

とする。①式の両辺にx^2をかけて

$$\frac{1}{x-1}=ax+b+\frac{cx^2}{x-1}$$

xについての恒等式なので，$x=0$を代入すると，$b=-1$

次に，①式の両辺に$x-1$をかけて

$$\frac{1}{x^2}=\frac{a(x-1)}{x}+\frac{b(x-1)}{x^2}+c$$

xについての恒等式なので，$x=1$を代入すると，$c=1$

①式のxに，$x=-1$を代入すると

$$-\frac{1}{2}=-a+b-\frac{c}{2}$$

よって，$a=-1$

①式は

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}$$

逆にこのとき①式は，すべてのxで成り立つ。

（解答３）　$\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$の利用

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2(x-1)}&=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x(x-1)}\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(x-1)-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\\&=-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\\&=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x-1)}\\&=-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\\&=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\end{aligned}$$