直線が通過する領域の求め方

直線が通過する領域を求めるとき，理由はともかく，判別式をとればいいと思っている生徒がいる。問題によっては，２次方程式にならず，判別式がとれない場合もある。

そこで，判別式をとる理由や，２次方程式にならない場合の解法について説明する。

例題１　直線l_t：$y=2tx-t^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 直線l_t が点A(2，-5)を通るときの t の値を求めよ。

(2) 直線l_t が点B(１，３)を通ることがあるか調べよ。

(3) t がすべての実数値をとるとき，直線l_t が通過する領域を求め，図示せよ。

解答

(1) 直線l_t が点A(2，-5)を通るので，　$-5=4t-t^2$　$\therefore\ t^2-4t-5=0$　　$t=5,\ -1$

(2) 直線l_t が点B(１，３)を通るとすると，

$$3=2t-t^2 \quad \therefore\ t^2-2t+3=0$$

判別式　$D/4=1-3<0$

よって実数解なし。

つまり，直線l_t のうち点Bを通るt が存在しないので，直線l_t は点Bを通らない。

(3) 直線l_t が点C(X，Y)を通るとする。

$$Y=2tX-t^2 \quad \therefore t^2-2Xt+Y=0$$

このt についての２次方程式が少なくとも１つの実数解をもてば，

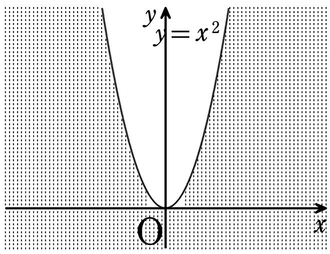
点Cを通る直線l_t が存在する。

よって，２次方程式の判別式をD として

$$D/4=X^2-Y\geqq 0 \qquad \therefore\quad Y\leqq X^2$$

よって，点Cの満たす領域，つまり直線l_t が

存在する領域は，$y\leqq x^2$　となる。



説明

(3) を考えるとき，そのまま通過領域を求めようとしても，何をしたらいいのか分からない。しかし，(1) (2) の考え方を(3) に応用することで解を求めることができる。多くの問題がt についての２次方程式になるため，生徒には判別式が印象に残り，「通過領域の問題は判別式で解く」という解釈になってしまう。

また，多くの模範解答では，X，Y と置かず，x，y のまま解答しているが，最初のうちは，上記の解答で紹介した方が理解がよい。

例題２　実数tが$0 \leqq t \leqq 1$の値をとるとき，直線l_t：$y=2tx-t^2$が通過する領域を求め，図示せよ。

$\boxed{\text{解答}}$　直線l_t：$y=2tx-t^2$が点(X, Y)を通るとする。$Y=2tX-t^2$　$\therefore t^2-2Xt+Y=0$

このtについての２次方程式が，$0 \leqq t \leqq 1$で少なくとも１つの実数解をもてばよい。

$0 \leqq t \leqq 1$に２つの実数解をもつ場合(重解を含む)と１つの実数解をもつ場合に分けて考える。

以下，２次方程式の判別式をD，$f(t)=t^2-2Xt+Y$とする。

Ⅰ　$0 \leqq t \leqq 1$に２つの実数解をもつ場合(重解を含む)

(ⅰ) 判別式$D \geqq 0$

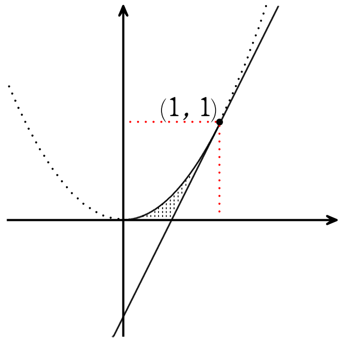
$D/4=X^2-Y \geqq 0$　　よって，$Y \leqq X^2$…①

(ⅱ) 軸$t=X$が区間$0 \leqq t \leqq 1$内

$0 \leqq X \leqq 1$

(ⅲ) $f(0) \geqq 0$，$f(1) \geqq 0$

$f(0)=Y$　，$f(1)=1-2X+Y$　より，$Y \geqq 0$　，$Y \geqq 2X-1$



【図１】

(ⅰ)～(ⅲ) より，求める領域は，図１のようになる。

Ⅱ　$0 \leqq t \leqq 1$に１つの実数解をもつ場合

(ⅳ) $f(0)$と$f(1)$の符合が異符号

$f(0)=Y$　，$f(1)=1-2X+Y$　より，$f(0)f(1)<0$となるのは，

$Y(1-2X+Y)<0$

よって，　$Y>0$かつ$Y<2X-1$　または　$Y<0$かつ$Y>2X-1$

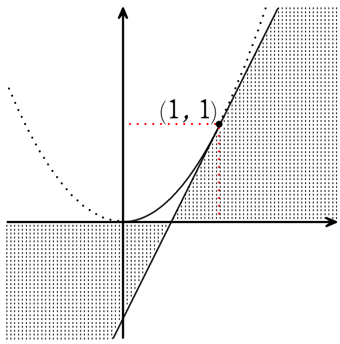
(ⅴ) $f(0)=0$のときを調べる

$f(0)=0$より，$Y=0$　このとき，２次方程式は，

$t^2-2Xt=0$　となり、$t=0, 2X$

区間内に，解が１つであるためには，$X<0$または$\dfrac{1}{2}<X$

まとめると，$Y=0$ ($X<0$または$\dfrac{1}{2}<X$)



【図２】

(ⅵ) $f(1)=0$のときを調べる

$f(1)=0$より，$1-2X+Y=0$　このとき，２次方程式は，

$t^2-2Xt+2X-1=0$　となり，

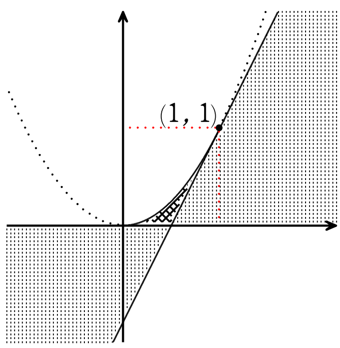
$(t-1)(t-2X+1)=0$　よって，$t=1$，$2X-1$

区間内に，解が１つであるためには，$X<\dfrac{1}{2}$または$1<X$

まとめると，$Y=2X-1$ ($X<\dfrac{1}{2}$または$1<X$)

(ⅳ)～(ⅵ) より，求める領域は，図２のようになる。

以上Ⅰ～Ⅱ より，求める領域は，図３のようになる。



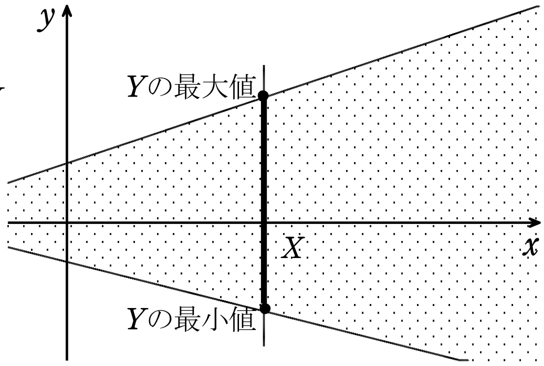
【図３】

別の解法を紹介する。

今，直線l_tの通過領域を図示したとき右の図４のようになったとする。直線$x=X$ のときの最大値Yと最小値Yを求めれば，直線l_tの通過領域の上限と下限が分かり，領域を図示することができる。

この方法だと，t についての２次方程式に限らず，解答を求めることができる。

この方法を使って，先ほどの例題２を解答し，その後数学Ⅲの問題を紹介する。



【図４】

例題２　実数t が$0 \leqq t \leqq 1$ の値をとるとき，直線l_t：$y=2tx-t^2$ が通過する領域を求め，図示せよ。

解答　直線l_t：$y=2tx-t^2$ と直線 $x=X$ との交点のy座標を $Y(t)$ とする。

$$Y(t)=-t^2+2Xt$$
$$=-(t-X)^2+X^2$$

この放物線の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値と最小値を求めればよい。

(ⅰ) $X>1$ のとき

最大値　$Y=2X-1$　($t=1$ のとき)

最小値　$Y=0$　($t=0$ のとき)

(ⅱ) $\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1$ のとき

最大値　$Y=X^2$　($t=X$ のとき)

最小値　$Y=0$　($t=0$ のとき)

(ⅲ) $0 \leqq X < \frac{1}{2}$ のとき

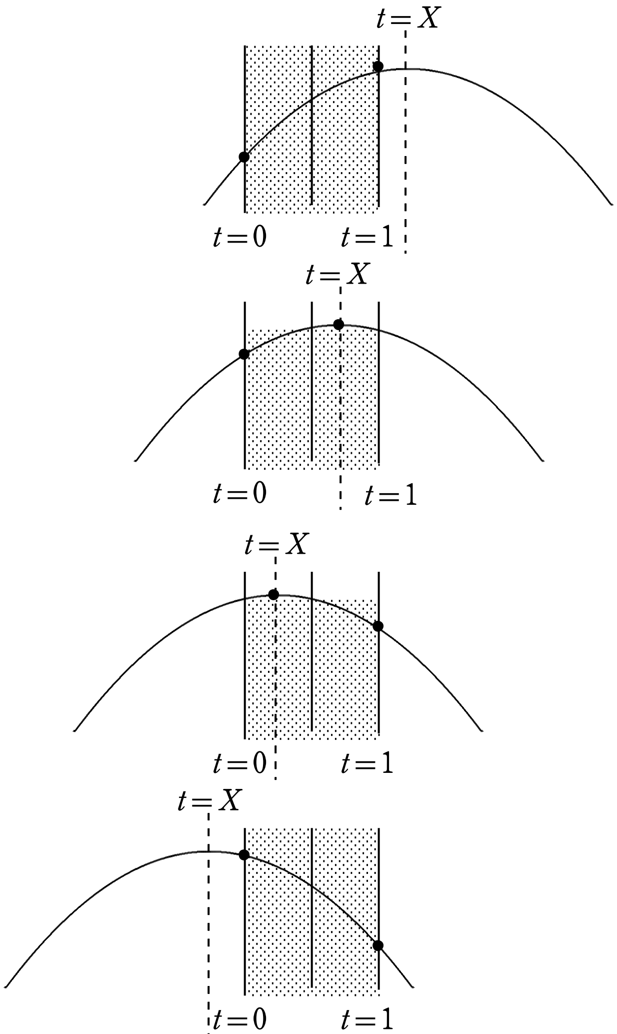
最大値　$Y=X^2$　($t=X$ のとき)

最小値　$Y=2X-1$　($t=1$ のとき)

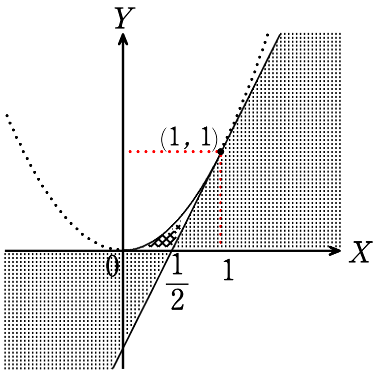
(ⅳ) $X<0$ のとき

最大値　$Y=0$　($t=0$ のとき)

最小値　$Y=2X-1$　($t=1$ のとき)



以上をまとめると図５のようになる。



【図５】

例題３　t を１以上の実数とし，２点$(t, 0)$，$(0, \frac{1}{t^2})$ を通る直線を l_t とする。

(1) 直線 l_t の方程式を求めよ。

(2) 直線 $x=X$ (X は１以上の定数とする) と直線 l_t との交点の y 座標を $Y(t)$ とおく。t を１以上の範囲で動かしたとき，$Y(t)$ の取りうる値の範囲を X を用いて表せ。

(3) t を１以上の範囲で動かしたとき，直線 l_t が通過する領域を XY 平面上に図示せよ。

解答

(1) $y=-\frac{1}{t^3}x+\frac{1}{t^2}$

(2) 直線 $x=X$ $(X\geqq 1)$ と直線 l_t との交点の y 座標 $Y(t)$ は，$Y(t)=-\frac{1}{t^3}X+\frac{1}{t^2}$

$Y(t)$を t の関数とみて，$Y(t)$ の値域を求める。

$Y'(t)=\frac{3X-2t}{t^4}$　　　$Y'(t)=0$ となる t は，$t=\frac{3}{2}X$

(2) では，$X\geqq 1$ より，$t=\frac{3}{2}X>1$ となるので，増減表は右

t	1		$\frac{3}{2}X$	
Y'		$+$	0	$-$
Y	$1-X$	$\nearrow$	$\frac{4}{27X^2}$	$\searrow$

また，$\lim_{t\to\infty} Y(t)=0$　$Y(1)=1-X\leqq 0$　より，

$X\geqq 1$ では，　$1-X\leqq Y(t)\leqq \frac{4}{27X^2}$　となる。

(3) (2) と同様の考え方で，$Y(t)$の範囲を考える。

直線 $x=X$ と直線 l_t との交点の y 座標 $Y(t)$ は，$Y(t)=-\frac{1}{t^3}X+\frac{1}{t^2}$

$Y(t)$を t の関数とみて，$Y(t)$ の値域を求める。

$Y'(t)=\frac{3X-2t}{t^4}$　　　$Y'(t)=0$ となる t は，$t=\frac{3}{2}X$

(ⅰ) $\frac{3}{2}X\geqq 1$ のとき

増減表は(2) のようになり，最大値は $\frac{4}{27X^2}$　下限は，

ア　$X\geqq 1$ のときは，(2) より，$1-X$

イ　$\frac{2}{3}\leqq X<1$ のときは，$1-X>0$ となるので，下限は 0

(ⅱ) $\frac{3}{2}X<1$ のとき

増減表は右のようになる。　　$\lim_{t\to\infty} Y(t)=0$

よって，最大値は，$1-X$，下限は 0

t	1	
Y'		$-$
Y	$1-X$	$\searrow$

（ｉ）～（ⅱ）より，

$X \geqq 1$ のとき　　$1-X \leqq Y(t) \leqq \dfrac{4}{27X^2}$

$\dfrac{2}{3} \leqq X < 1$ のとき　　$0 < Y(t) \leqq \dfrac{4}{27X^2}$

$X < \dfrac{2}{3}$ のとき　　$0 < Y(t) \leqq 1-X$