円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $px+qy=r^2$ との関係

円C：$x^2+y^2=r^2$ に対し，点A(p，q)が円周上の点ならば，直線 l ：$px+qy=r^2$ は円の接線になる。それでは，点Aが円周上にないとき，円に対してどのような直線になるか調べる。

直線 l ：$px+qy=r^2$ の法線ベクトル$\vec{n}$は，

$$\vec{n}=(p，q)$$

より，直線 l は常に直線ＯＡと直交することが分かる。

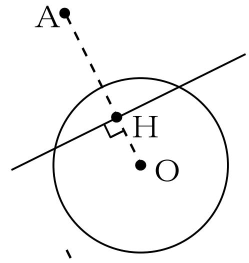
そこで，直線 l と直線ＯＡとの交点をＨとし，３点Ｏ，Ａ，Ｈの位置関係について調べる。

$$\mathrm{OA}=\sqrt{p^2+q^2}\quad,\quad \mathrm{OH}=\frac{r^2}{\sqrt{p^2+q^2}}\quad,\quad \mathrm{AH}=\frac{|p^2+q^2-r^2|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

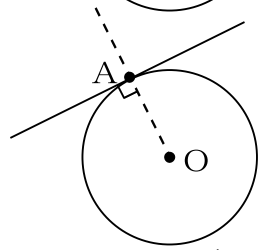
(ⅰ) 点Ａ円周外のとき，$p^2+q^2>r^2$ より，

$$\mathrm{AH}=\frac{p^2+q^2-r^2}{\sqrt{p^2+q^2}}=\sqrt{p^2+q^2}-\frac{r^2}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

よって，ＯＡ＝ＯＨ＋ＨＡとなり，３点は，順にＯ，Ｈ，Ａとなる。



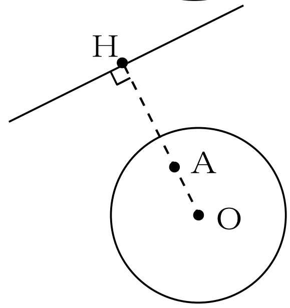
(ⅱ) 点Ａが，円周上のとき，$p^2+q^2=r^2$ より，点Ａと点Ｈは一致し，直線 l は円Cの点Ａにおける接線になる。



(ⅲ) 点Ａ円周内のとき，$p^2+q^2<r^2$ より，

$$\mathrm{AH}=\frac{r^2-(p^2+q^2)}{\sqrt{p^2+q^2}}=\frac{r^2}{\sqrt{p^2+q^2}}-\sqrt{p^2+q^2}$$

よって，ＯＨ＝ＯＡ＋ＡＨとなり，３点は，順にＯ，Ａ，Ｈとなる。

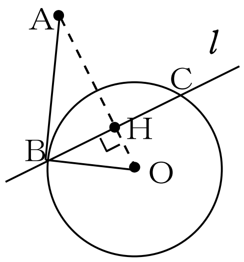


また，

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH}=r^2$$

より，点Ａと点Ｈは円Cに対して，反転(鏡像)の関係にあることが分かる。このことから，点Ａが円周外にあるとき点Ｈは円周内に，点Ａが円周内にあるとき点Ｈは円周外にあることが分かる。

それでは，円$\boldsymbol{C}$：$x^2+y^2=r^2$ と直線$\boldsymbol{l}$：$px+qy=r^2$ がどのような位置関係にあるかを調べる。



(ｉ) 点Ａが円周外にあるとき

直線 l と円Cとの交点をＢ，Ｃとする。△ＯＡＢと△ＯＢＨで

∠ＡＯＢ＝∠ＢＯＨ　…①

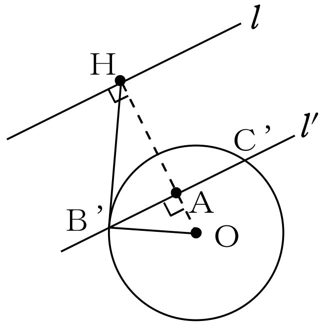
また，ＯＡ･ＯＨ＝r^2 より，r＝ＯＢとし

ＯＡ･ＯＨ＝ＯＢ^2　　　ＯＡ：ＯＢ＝ＯＢ：ＯＨ　…②

よって，①，②より

△ＯＡＢ∽△ＯＢＨ　よって，∠ＡＢＯ＝90°

このことから，直線ＡＢは円Cの接線であることが分かる。同様に，直線ＡＣも円Cの接線であることが分かる。以上より，直線 l は，点Ａから円Cへ引いた２本の接線の接点を通る直線であることが分かる。



(ⅱ) 点Ａが円周上にあるとき

直線 l は，点Ａにおける円Cの接線である。

(ⅲ) 点Ａが円周内にあるとき

点Ａを通り，直線ＯＡに垂直な直線を l' とし，円Cとの交点をＢ’，Ｃ’とする。△ＯＡＢ’と△ＯＢ’Ｈで

∠ＡＯＢ’＝∠Ｂ’ＯＨ　…③

また，ＯＡ･ＯＨ＝r^2 より，r＝ＯＢ’とし

ＯＡ･ＯＨ＝ＯＢ’^{2}　　　ＯＡ：ＯＢ’＝ＯＢ’：ＯＨ　…④

よって，③，④より

△ＯＡＢ’∽△ＯＢ’Ｈ　よって，∠ＯＢＨ’＝ 90°

このことから，直線ＨＢ’は円Cの接線であることが分かる。同様に，直線ＨＣ’も円Cの接線であることが分かる。以上より，点Ｈは，点Ａを通る直線 l' と円との交点における２本の接線の交点であり，直線 l は，その点Ｈを通り直線ＯＡに垂直な直線であることが分かる。（(ｉ)(ⅲ)よりＡとＨは互いに逆の立場に移ることが分かる）

以上の結果をまとめると以下のようになる。

円$\boldsymbol{C}$：$x^2+y^2=r^2$ と直線$\boldsymbol{l}$：$px+qy=r^2$ の関係は，

(1) 直線l は常に直線ＯＡと直交する。以下，交点をＨとする。

(2) 点Ａと点Ｈは円Cに対して反転(鏡像)の関係にあることが分かる。

(3) 点Ａが円周外のとき：直線l は，点Ａから引いた２本の接線の，接点同士を結んだ直線になる。

点Ａが円周上のとき：直線l は，円Cの点Ａにおける接線になる。

点Ａが円周内のとき：点Ｈは，点Ａを通りＯＡに垂直な直線と円との交点における２本の接線の交点であり，直線 l は，その点Ｈを通り直線ＯＡに垂直な直線である。

$\boxed{発展}$

空間座標において，球面S：$x^2+y^2+z^2=r^2$ と点A(s ， t ， u)とする。

球面Sと平面α：$sx+ty+uz=r^2$ の関係を調べると以下のようになる。

(1) 平面α は常に直線ＯＡと直交する。以下，交点をＨとする。

(2) 点Ａと点Ｈは球面Sに対して反転(鏡像)の関係にある。

(3) 点Ａが球面外のとき：平面α は、点Ａから球面に引いた接線の接点でできる円周を含む平面になる

点Ａが球面上のとき：平面α は，球面S の点Ａにおける接平面になる

点Ａが球面内のとき：点Ｈは，点Ａを通りＯＡに垂直な平面 β と球面S の共有点における接線の交点であり，平面α は，その点Ｈを通り直線ＯＡに垂直な平面である。