組立除法の活用

組立除法を使うと，整式を１次式で割り算したときの，商と余りを簡単に求めることができる。３次式の場合を例に証明しておく。

【組立除法】

３次式 ax^3+bx^2+cx+d を $x-k$ で割ったときの商を ax^2+px+q 余りを r とすると，

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-k)(ax^2+px+q)+r$$

右辺を展開すると，

$$=ax^3+(-ka+p)x^2+(-kp+q)x+(-kq+r)$$

係数を比較して，

$b=-ka+p$　・・・①

$c=-kp+q$　・・・②

$d=-kq+r$　・・・③

ここで，右のように計算をすると，

下段に，商の係数と，余りが表れる。

（証明終）

k	a	b	c	d
		ka	kp	kq
	a	$b+ka$	$c+kp$	$d+kq$

①より，$=p$

②より，$=q$

③より，$=r$

この組立除法のすばらしいところは，

【１】余りと同時に，商も求めることができる。

【２】繰り返し使うことにより，与式を $(x-k)^n$ で整理することができる。

以下に，例を使いながら，その活用法を紹介する。

【１】に関する例

（例１）　$x^4+ax+b=0$ の実数解が，１のみであるとき，実数 a，b の値と残りの解を求めよ。

（略解）　与えられた４次方程式は，少なくとも１を重解としてもつ。よって，組立除法を２回繰り返し，

$a+b+1=0$

$a+2=0$

よって，$a=-2$，$b=1$

また，組立除法の結果から，残りの解は，$x^2+x+1=0$ の解より，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

1	1	0	0	a	b
		1	1	1	$a+1$
	1	1	1	$a+1$	$a+b+1$
1		1	1	1	
	1	1	1	$a+2$	

（例２）　曲線C：$y=x^3-3x$ 上の点Ｐ$(t,\ t^3-3t)$における接線が，再び曲線Ｃと交わる点をＱとし，

その点の座標を t で表せ。

（略解）　$y'=3x^2-3$　だから，接線は，$y=(3t^2-3)x-2t^3$　より，次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} y=x^3-3x \\ y=(3t^2-3)x-2t^3 \end{cases}$$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0 \quad ・・・①$$

この方程式は t を重解としてもつので，組立除法は右のようになり，①式は，以下のように因数分解され，

$$(x-t)^2(x+2t)=0$$

交点Ｑの座標は，

Ｑ$(-2t,\ -8t^3+6t)$

t	1	0	$-3t^2$	$2t^3$
		t	t^2	$-2t^3$
t	1	t	$-2t^2$	0
		t	$2t^2$	
	1	$2t$	0	

（例３） 等式 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+ax+b}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}$ が成り立つように，定数 a，b を定めよ。

（略解） $x\to 2$ のとき，分母→０だから，分子→０

よって，分子は $x-2$ を因数にもつ。

右の組立除法の結果から，

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
2 & 1 & -2 & a & b \\
 & & 2 & 0 & 2a \\
\hline
 & 1 & 0 & a & b+2a
\end{array}
$$

$b+2a=0$ $\qquad x^3-2x^2+ax+b=(x-2)(x^2+a)$

したがって，

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+ax+b}{x^2+x-6}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+a)}{(x-2)(x+3)}=\frac{4+a}{5}$$

この結果が，$\dfrac{1}{5}$ となるから a＝－3

$b+2a=0$ より，b＝６

【２】に関する説明と例

$f(x)$ を n 次の多項式とし，$x-\alpha$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，余りを r_1 とすると

$$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+r_1$$

このときの商 $Q_1(x)$，余り r_1 は組立除法を使うことにより簡単に求めることができる。

次に，商 $Q_1(x)$ を更に，$x-\alpha$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを r_2 とすると

$$Q_1(x)=(x-\alpha)Q_2(x)+r_2$$

となるので，

$$f(x)=(x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+r_2\}+r_1$$

$$=(x-\alpha)^2Q_2(x)+r_2(x-\alpha)+r_1$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
\alpha & （f(x)\text{の係数の列}） & \\
\hline
\alpha & （Q_1(x)\text{の係数の列}） & r_1 \\
\hline
\alpha & （Q_2(x)\text{の係数の列}） & r_2 \\
\hline
 & （Q_3(x)\text{の係数の列}） & r_3
\end{array}
$$

以下，この作業を続けていくと，

$$f(x)=(x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}Q_{n-1}(x)+\cdot\ \cdot\ \cdot+r_3(x-\alpha)^2+r_2(x-\alpha)+r_1$$

となり，与式を $(x-k)^n$ で整理した式ができる。これを組立除法で計算すると，上のようになる。

（例１） 次の等式が，x の恒等式のとき，係数 a，b，c を求めよ。

$$x^3=(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

（略解） 右の組立除法の結果から，

$$x^3=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1$$

よって，a＝－３，b＝３，c＝－１

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & -1 & 1 & -1 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \leftarrow c \\
 & & -1 & 2 & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & 3 & & \leftarrow b \\
 & & -1 & & & \\
\hline
 & 1 & -3 & & & \leftarrow a
\end{array}
$$

（例２）　x^3+mx+n を $(x-2)^2$ で割り切れるように定数 m，n の値を定めよ。

（略解）　右の組立除法の結果から，

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 0 & m & n \\
 & & 2 & 4 & 2m+8 \\ \hline
2 & 1 & 2 & m+4 & \multicolumn{1}{|r}{2m+n+8} \\
 & & 2 & 8 & \\ \cline{2-4}
 & 1 & 4 & \multicolumn{1}{|r}{m+12} &
\end{array}$$

$(x-2)^2(x+4)+(m+12)(x-2)+2m+n+8$

$(x-2)^2$ で割り切れるから，

$m+12=0$　，　$2m+n+8=0$

よって，$m=-12$，$n=16$

（例３）　n を自然数とする。次の整式 $f(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるように定数 a，b を定めよ。

$$f(x)=ax^{n+1}-(n+1)x+b$$

（略解）　組立除法より

$$\begin{array}{r|ccccccc}
1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n-1 & b \\
 & & a & a & \cdots & a & a & a-n-1 \\ \hline
1 & a & a & a & \cdots & a & a-n-1 & \multicolumn{1}{|c}{a+b-n-1} \\
 & & a & 2a & \cdots & (n-1)a & na & \\ \cline{2-7}
 & a & 2a & 3a & \cdots & na & \multicolumn{1}{|c}{na+a-n-1} &
\end{array}$$

この結果から，$f(x)$ は

$$(x-1)^2(ax^{n-1}+2ax^{n-2}+3ax^{n-3}+\cdots+na)+(na+a-n-1)x+a+b-n-1$$

$(x-1)^2$ で割り切れるから

$$\begin{cases} na+a-n-1=0 & \cdots ① \\ a+b-n-1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$(n+1)(a-1)=0$　となるから，$a=1$，$b=n$

【補足】

組立除法を繰り返し使うことにより，与式を $(x-k)^n$ で整理することができることを上で示したが，これは，n 進数を求めるときの方法と同じである。

(例)　723 を５進数にする。

計算では以下のようになる。

$723=5\times144+3$

$=5(5\times28+4)+3$

$=5^2\times28+4\times5^1+3$

$=5^2\times(5\times5+3)+4\times5^1+3$

$=5^4+3\times5^2+4\times5^1+3$

これを筆算で行うと，右のようになる。

$$\begin{array}{r|rl}
5 & 723 & \\ \hline
5 & 144 & \cdots 3 \\ \hline
5 & 28 & \cdots 4 \\ \hline
1 & 5 & \cdots 3 \\ \hline
 & 1 & \cdots 0
\end{array}$$

したがって，

10343$_{(五)}$