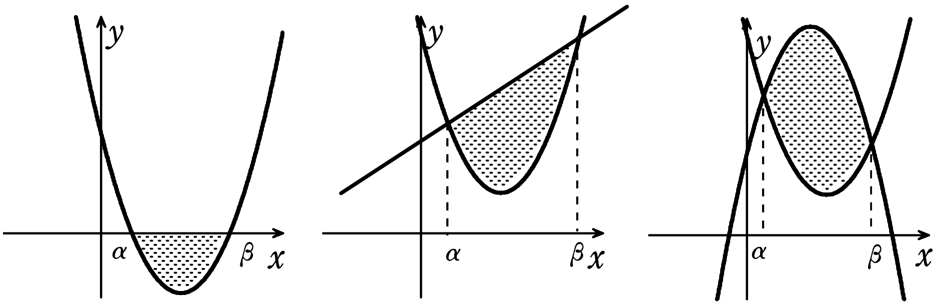
放物線と直線で囲まれた部分の面積を求める公式

放物線と直線で囲まれた部分や，２つの放物線で囲まれた部分の面積は，定積分を計算して求めることができるが，公式を活用すれば簡単に求められる場合が多々ある。ここでは，いわゆる「６分の１公式」「12 分の１公式」「３分の１公式」と呼ばれている式を紹介する。

１　６分の１公式

下の図のように，放物線と直線，あるいは放物線同士で囲まれた部分の面積を求めるときに使用する公式である。



$$\mathrm{S} = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$g(x) = 0$ （x 軸）

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$g(x) = mx + n$

$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$
$g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$

［例題１］ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ 　を証明せよ。

（証明）

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

（証明終）

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の交点の x 座標を α と β（α ＜ β）とすると

$$g(x) - f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となる。

よって，面積をＳとすると，

$$\mathrm{S} = \left|\int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))\,dx\right|$$

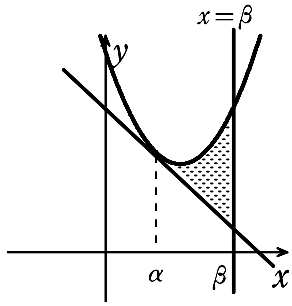
$$= \left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|$$

$$= \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

（６分の１公式）

となる。

2　３分の１公式



$f(x)=ax^2+bx+c$

$g(x)=mx+n$（接線）

$\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$

右の図のように，放物線とその接線及び y 軸と平行な直線とで囲まれた部分の面積を求めるときに使用する公式である。

［例題２］ $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$　を証明せよ。

（証明）　$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$　　　（証明終）

関数 $f(x)$ の $x=\alpha$ における接線を $g(x)$， y 軸に平行な直線を $y=\beta$ とすると，

$$f(x)-g(x)=a(x-\alpha)^2$$

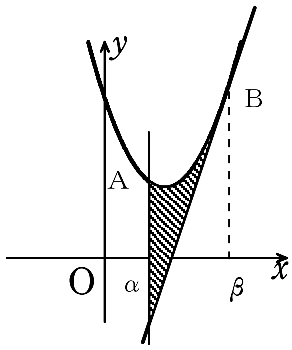
となる。

よって，面積をＳとすると，

$$\mathrm{S}=\left|\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))\,dx\right|=\left|\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)^2\,dx\right|=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$

となる。

次に，関数 $f(x)$ の $x=\beta$ における接線を $g(x)$， y 軸に平行な直線を $y=\alpha$ とすると，



$$f(x)-g(x)=a(x-\beta)^2$$

となる。

よって，面積をＳとすると，

$$\mathrm{S}=\left|\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))\,dx\right|=\left|\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\beta)^2\,dx\right|=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$

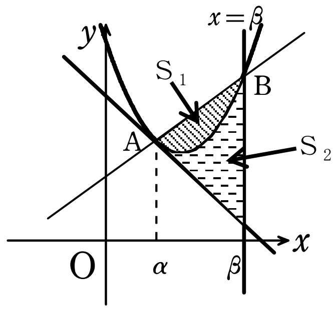
となる。

つまり， y 軸に平行な直線が接点に対し，右側にあろうが左側にあろうが，面積は

$$\mathrm{S}=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3\quad\text{（３分の１公式）}$$

となる。

【参考】



放物線と放物線上の２点Ａ，Ｂを通る直線とで囲まれた部分の面積 S_1 とすると，

$$\mathrm{S}_1=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

放物線と点Ａにおける接線及び点Ｂを通り y 軸に平行な直線とで囲まれた部分の面積 S_2 とすると，

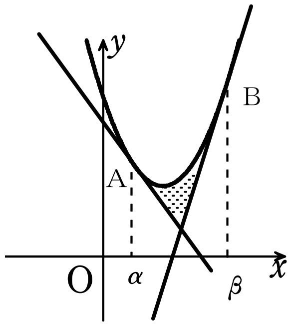
$$\mathrm{S}_2=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$

よって，　$\mathrm{S}_1:\mathrm{S}_2=1:2$

であることが分かる。

３　12 分の１公式(Part１)

　右の図のように，放物線と２本の接線とで囲まれた部分の面積を求めるときに使用する公式である。



$$\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

［例題３］放物線上の２点Ａ，Ｂの x 座標をそれぞれ α，β とする。２点Ａ，Ｂにおける接線の交点の x 座標を求めよ。

（解答）放物線を，$f(x)=ax^2+bx+c$ とする。

$$f'(x)=2ax+b$$

より，２点Ａ，Ｂにおける接線は

$$y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

①－②より，

$$2a(\alpha-\beta)x-a(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=0$$

$a\neq 0$，$\alpha\neq\beta$ より，２点Ａ，Ｂにおける接線の交点の x 座標は，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

である。

　先ほどの３分の１公式と，今の［例題３］の結果から，放物線と２本の接線とで囲まれた部分の面積Ｓは，

$$\mathrm{S}=\frac{|a|}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3+\frac{|a|}{3}\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$$

$$=\frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3 \qquad \text{（12 分の１公式）}$$

【参考】

　放物線と放物線上の２点Ａ，Ｂを通る直線とで囲まれた部分の面積 S_1 とすると，

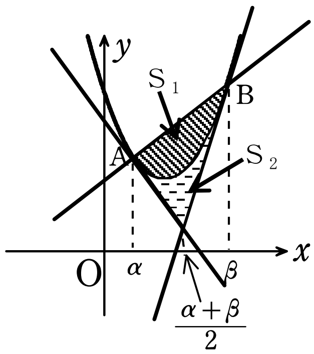
$$\mathrm{S}_1=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

　放物線と２本の接線とで囲まれた部分の面積 S_2 とすると，

$$\mathrm{S}_2=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

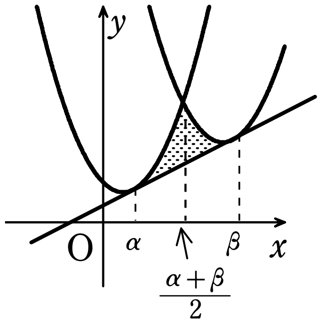
よって，　$\mathrm{S}_1:\mathrm{S}_2=2:1$

であることが分かる。



4　12分の１公式(Part２)

右の図のように，平行移動した２本の放物線と共通接線とで囲まれた部分の面積を求めるときに使用する公式である。



$$\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

［例題４］平行移動した２本の放物線と共通接線との交点をA，Bとし，その x 座標をそれぞれ α，β とする。２本の放物線の交点の x 座標を求めよ。

（解答）放物線を，

$$f(x)=ax^2+bx+c\ \cdot\cdot\cdot ①\qquad g(x)=ax^2+dx+e\ \cdot\cdot\cdot ②$$

とする。

$$f'(x)=2ax+b,\quad g'(x)=2ax+d$$

より，２点A，Bにおける接線は

$$y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c\qquad y=(2a\beta+d)x-a\beta^2+e$$

２点A，Bにおける接線が一致するから

$$2a\alpha+b=2a\beta+d\ \cdot\cdot\cdot ③\qquad -a\alpha^2+c=-a\beta^2+e\ \cdot\cdot\cdot ④$$

ここで，２本の放物線の x 座標を求めるには，①－②より，

$$(b-d)x+c-e=0\ \cdot\cdot\cdot ⑤$$

を満たす x を求めればよいから，③，④より，

$$b-d=2a(\beta-\alpha)$$

$$c-e=-a(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$$

として，⑤は，

$$2a(\beta-\alpha)x-a(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=0$$

$a\neq 0$，$\alpha\neq\beta$ より，交点の x 座標は，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

である。

先ほどの３分の１公式と，今の［例題４］の結果から，平行移動した２本の放物線と共通接線とで囲まれた部分の面積Sは，

$$\mathrm{S}=\frac{|a|}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3+\frac{|a|}{3}\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$$

$$=\frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{|a|}{24}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3\qquad\text{（12分の１公式）}$$