線形計画法

線形計画法は，限られた条件(領域)の下で最大値や最小値を求める際に，使われる非常に便利な方法である。領域を学習した後に，ぜひ紹介したい手法である。しかし，なぜ直線で考えるのか，なぜ領域と接触する範囲で動かすのか等，生徒にとってなかなか理解できない点が幾つかある。

そこで，等高線の考え方を導入した，線形計画法を利用する問題の解き方を紹介する。

例題１

(1) x , y が次の値をとるとき，$x+y$ の値を求めよ。

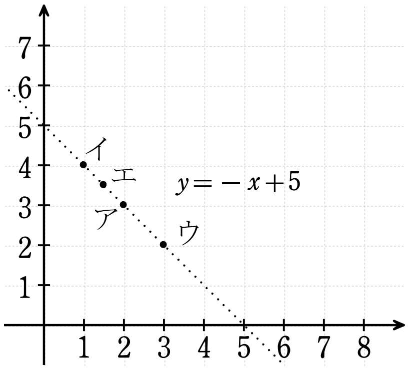
ア　$x=2$, $y=3$　　イ　$x=1$, $y=4$　　ウ　$x=3$, $y=2$　　エ　$x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{7}{2}$

(2) (1)のアからエまでの点を xy 座標平面上にとり，気付いたことをまとめよ。

解答

(1) いずれの答えも，$x+y=5$ となる。

(2) アからエまでの点を座標平面上にとると，右のようになり、すべての点が直線 $y=-x+5$ 上にあることが分かる。



点(p , q)が直線 $y=-x+5$ 上にあるとき，代入して$q=-p+5$ が成り立つ。移項してまとめると，

$$p+q=5$$

このことから，直線$y=-x+5$ 上のすべての点$(x ,\ y)$は，常に $x+y$ の値が５になることが分かる。

このように，<u>直線上の点は</u>，変形することにより，<u>ある一定の値をとる点の集合</u>とみることができる。この「直線が一定の値を示す」というところが地図の等高線に似ていることから，１本の直線を等高線とみなし，$x+y=1$, $x+y=2$, $x+y=3$ …のような平行直線の集まりを等高線群として捉えることができる。式の値１，２，３，…を高さと考えると更に地図をイメージできて分かりやすい。

例　直線 $y=-\dfrac{1}{4}x+4$ を，変形すると，$\dfrac{1}{4}x+y=4$ とできることから，直線 $y=-\dfrac{1}{4}x+4$ 上のどの点$(x ,\ y)$も、$\dfrac{1}{4}x+y$ を計算すると，必ず一定値の４になることが分かる。

例題２　次の連立不等式が満たす領域をD とする。次の問いに答えよ。

$$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ x+4y \leqq 16,\ \ 3x+2y \leqq 18$$

(1) 領域D を図示せよ。

(2) 点$(x ,\ y)$を領域D 内の点とする。$x+y=5$ を満たす点$(x ,\ y)$を３つ答えよ。

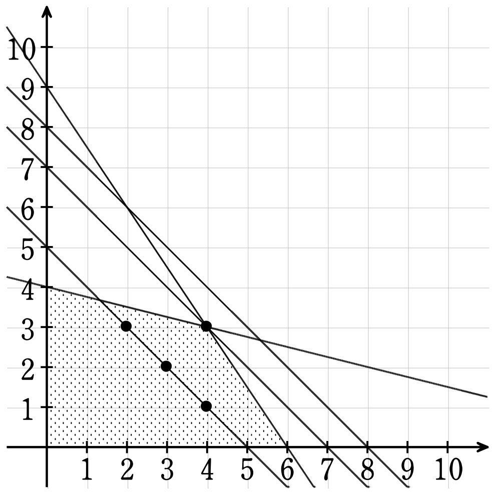
(3) 点$(x ,\ y)$を領域D 内の点とする。$x+y=8$ を満たす点$(x ,\ y)$があるか調べよ。

(4) 点$(x ,\ y)$を領域D 内の点とする。$x+y$ の最大値を求めるとき，どのようにすればよいか考えよ。

(5) (4)の結果を基に，$x+y$ の最大値を求めるときの解答を作成せよ。

解答

(1) 不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+4y \leqq 16$, $3x+2y \leqq 18$ を満たす領域D は右図のとおり。



(2) $x+y=5$ を満たすすべての点は，直線 $y=-x+5$ 上にある。よって，直線 $y=-x+5$ 上の点(x, y)のうち，領域D 内にある点を３つ答えればよい。例えば、

$(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$

(3) $x+y=8$ を満たすすべての点は，直線 $y=-x+8$ 上にある。しかし，直線 $y=-x+8$ は，領域D と共有点をもたないので，領域D 内の点(x, y)で，$x+y=8$ を満たす点は存在しない。

(4) (2), (3) より，$x+y$ の値が存在するためには，傾き-1の直線を領域D と共有点をもつように平行移動させる必要がある。また，$x+y$ の値の５とか８は，直線で考えたときのy切片に当たるから，$x+y$ の最大値を求めるには，傾き-1の直線のうち，y切片が最大のときを考えればよいことが分かる。

(5) $x+y=k$ とする。k の最大値を求めればよい。

ここで，$x+y=k$ は，直線$y=-x+k$ とできるので，k の最大値とは，y 切片が最大となるときである。

よって，傾き-1の直線を，領域D と共有点をもたせながら平行移動させ，y 切片が最大になるときは，直線$y=-x+k$ が点$(4, 3)$を通るときである。よって，$k=7$ 　$(x, y)=(4, 3)$

例題３　次の連立不等式が満たす領域をD とする。

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+4y \leqq 16,\ 3x+2y \leqq 18$$

点(x, y)を領域D 内の点とする。$x+5y$ の最大値を求めよ。

解答

$x+5y=k$ とする。k の最大値を求めればよい。

ここで，$x+5y=k$ は，直線$y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{k}{5}$ とできるので，

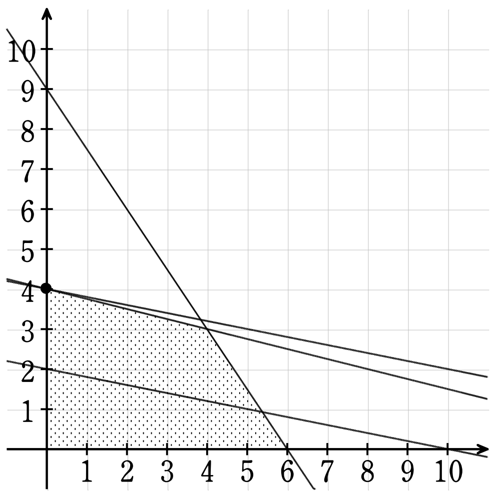
k の最大値とは，y 切片$\dfrac{k}{5}$が最大となるときである。

よって，傾き$-\dfrac{1}{5}$ の直線を，領域D と共有点をもたせながら平行移動させ，y 切片が最大になるのは，

直線$y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{k}{5}$ が点$(0, 4)$を通るときである。

よって，$k=20$ である。

$x+5y$ の最大値は 20 　$(x, y)=(0, 4)$　のとき



注意　直線の傾きによって，最大値をとる点が異なるので注意する。

例題４　次の連立不等式が満たす領域をDとする。

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+4y \leqq 16,\ 3x+2y \leqq 18$$

点$(x\ ,\ y)$を領域D内の点とする。$2x-y$の最大値を求めよ。

解答

$2x-y=k$とする。kの最大値を求めればよい。
ここで，$2x-y=k$は，直線$y=2x-k$とできるので，kの最大値とは，y切片$-k$が最小となるときである。

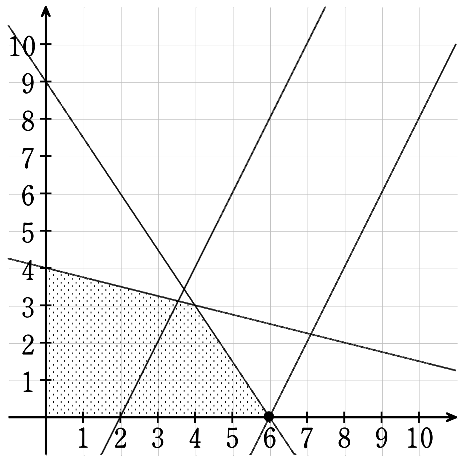
よって，傾き２の直線を，領域Dと共有点をもたせながら平行移動させ，y切片$-k$が最小になるのは、

直線$y=2x-k$ が点$(\ 6\ ,\ 0\ )$を通るとき

である。

よって，$k=12$である。

$2x-y$の最大値は12　$(\ x\ ,\ y\ )=(\ 6\ ,\ 0\ )$　のとき



注意　y切片が最大のとき，必ず最大になるとは限らない。
例題４のように，y切片にマイナスがついているときは注意する。

この等高線の考え方は，直線だけではなく，円など一般的な曲線にも応用できる。

例　円$x^2+y^2=4$上の点$(x\ ,\ y)$で，x^2+y^2を計算すると，すべて一定値４になる。

例題５　次の連立不等式が満たす領域をDとする。

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+4y \leqq 16,\ 3x+2y \leqq 18$$

点$(x\ ,\ y)$を領域D内の点とする。x^2+y^2のとる値の最大値を求めよ。

解答

$x^2+y^2=k$とする。kの最大値を求めればよい。
ここで，$x^2+y^2=k$は，原点中心，半径$\sqrt{k}$の円なのでkの最大値とは，半径$\sqrt{k}$が最大となるときである。

よって，原点中心の円を，領域Dと共有点をもたせながら大きくしていくと，円$x^2+y^2=k$ が点$(\ 6\ ,\ 0\ )$を通るとき最大円となる。

よって，$k=36$である。

x^2+y^2の最大値は36　$(\ x\ ,\ y\ )=(\ 6\ ,\ 0\ )$　のとき