常用対数表の活用（桁数，最高位の数字を求める）

足し算と引き算は容易に計算できるが，掛け算と割り算は，数値が大きくなると，計算するのに手間がかかることが多い。しかし，その掛け算や割り算でも，概数だけでよければ，常用対数表を使うと，簡単に求めることができる。

［例題１］　1.95×4.17 を計算せよ。

（解答）常用対数表より

$$\log_{10} 1.95 \fallingdotseq 0.2900,\quad \log_{10} 4.17 \fallingdotseq 0.6201$$

したがって，

$$\log_{10} 1.95 \times 4.17 = \log_{10} 1.95 + \log_{10} 4.17 \fallingdotseq 0.2900 + 0.6201 = 0.9101$$

となる。ここで，再び常用対数表から，

対数を取って計算することにより，掛け算が足し算になる。

$$\log_{10} x \fallingdotseq 0.9101$$

となる x を求めると，

$$x \fallingdotseq 8.13$$

と分かる。よって，

$$0.9101 \fallingdotseq \log_{10} 8.13$$

以上より，

$1.95 \times 4.17 \fallingdotseq 8.13$　　　（実際の計算は $1.95 \times 4.17 = 8.1315$）

［例題２］　8.27÷1.73 を計算せよ。

（解答）常用対数表より

$$\log_{10} 8.27 \fallingdotseq 0.9175\ ,\quad \log_{10} 1.73 \fallingdotseq 0.2380$$

したがって，

$$\log_{10} 8.27 \div 173 = \log_{10} 8.27 - \log_{10} 1.73 \fallingdotseq 0.9175 - 0.2380 = 0.6795$$

となる。ここで，再び常用対数表から，

対数を取って計算することにより，割り算が引き算になる。

$$\log_{10} x \fallingdotseq 0.6795$$

となる x を求めると，

$$x \fallingdotseq 4.78$$

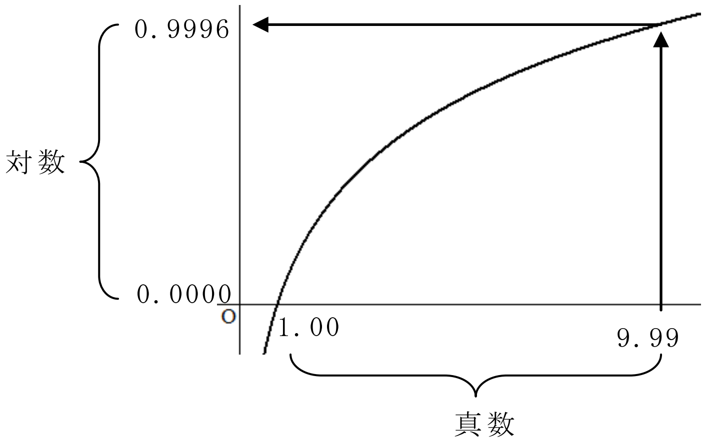
以上より，

$8.27 \div 1.73 \fallingdotseq 4.78$　　　（実際は $8.27 \div 1.73 = 4.780347\cdots$）

今では，電卓やコンピュータがあるので，いとも簡単に掛け算や割り算を計算できるが，それら文明の利器がなかったころは，いかに簡単にかつ素早く計算するかが課題であった。

1600 年代の初頭，ジョン・ネイピアによって対数が考案され，対数表が発表されてからは，繁雑な計算も楽に求められるようになった。その後，対数計算尺が考え出され，計算がさらに簡単にできるようになり，科学の急速な進歩に貢献した。

教科書の巻末にある常用対数表を見ると,真数Mの値の範囲は,1.00≦M≦9.99になっている。この範囲を超えた数字の計算をするときは以下のような工夫をする。



［例題３］　2130×765 を計算せよ。

（解答）常用対数表の範囲にするために，

$2130 = 2.13\times10^3$

$765 = 7.65\times10^2$

とする。

$\log_{10}2130\times765 = \log_{10}2.13 + \log_{10}7.65 + 5$

ここで，常用対数表より，

$\log_{10}2.13 \fallingdotseq 0.3284$,　　　$\log_{10}7.65 \fallingdotseq 0.8837$

よって，1.2121

$\log_{10}2.13 + \log_{10}7.65 + 5 \fallingdotseq 0.3284 + 0.8837 + 5 = 6.2121$

次に,常用対数表を逆引きして,6.2121 に対する真数を求める。常用対数表では,対数は 0 から 0.9996 までなので,

$6.2121 = 0.2121 + 6$

として求める。常用対数表で，対数が 0.2121 となる真数は，1.63 より

$0.2121 \fallingdotseq \log_{10}1.63$

したがって，

$0.2121 + 6 \fallingdotseq \log_{10}1.63 + \log_{10}10^6 = \log_{10}1.63\times10^6$

以上をまとめると

$\log_{10}2130\times765 \fallingdotseq \log_{10}1.63\times10^6$

となるので，

$2130\times765 \fallingdotseq 1630000$　　　（実際は $2130\times765 = 1629450$）

この例題についてもう少し考察する。

今回,2130×765 の対数をとり常用対数表を使って,6.2121 という値を求めた。そして,常用対数表を逆引きするために，6.2121 を整数部分の“6”と小数部分の“0.2121”に分けて計算することにより，1.63×10^6という結果を得られた。ここで注目したいのは,

◆整数部分から，桁数を知ることができる（この整数部分を“指標”という）

◆小数部分から，概数の数値部分を知ることができる（この小数部分を“仮数”という）

というところである。

このすばらしい点に着目すると，常用対数表の活用の幅がさらに広がる。

［例題４］　6^{50}の桁数，最高位の数字を求めよ。

（解答）6^{50}の対数をとると

$$\log_{10} 6^{50} = 50 \times \log_{10} 6$$

常用対数表から，

$$\log_{10} 6 \fallingdotseq 0.7782$$

より，

$$50 \times \log_{10} 6 \fallingdotseq 50 \times 0.7782 = 38.91 = 38 + 0.91$$

整数部分の 38 より，6^{50}は 39 桁の数であることが分かる。

小数部分の 0.91 から常用対数表を逆引きすると，8.13 であるから，最高位の数字は，８であることが分かる。

参考までに，6^{50}を Excel で計算すると，

$$6^{50} = 8.0828 \times 10^{38}$$

となり，今回の計算結果の

$$6^{50} = 8.13 \times 10^{38}$$

とは少し誤差があることが分かる。これだけ大きな数字になると，教科書の巻末にある常用対数表では，最高位の数字は求めることができても，最高位から２桁目以降の数字は誤差が含まれている。

入試問題等で，常用対数を利用して，桁数や最高位の数字を求めるような出題では，必要な常用対数の値が与えられていることが一般的である。

［問題］　$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として次の各問いに答えよ。

(1) 3^{60}は何桁の整数か求めよ。

(2) $\log_{10} 4$，$\log_{10} 5$，$\log_{10} 6$，$\log_{10} 8$，$\log_{10} 9$の値を求め，その結果を利用して，3^{60}の最高位の数字を求めよ。

（解答）

(1) $\log_{10} 3^{60} = 60 \times \log_{10} 3 = 60 \times 0.4771 = 28.626$　・・・①

よって，

$$28 < \log_{10} 3^{60} < 29$$

より，

$$10^{28} < 3^{60} < 10^{29}$$

3^{60}は 29 桁の整数である。

(2)

$$\log_{10} 4 = 2\log_{10} 2 = 0.602,$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 0.691$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 \times 3 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781$$

$\log_{10} 8 = 3\log_{10} 2 = 0.903$

$\log_{10} 9 = 2\log_{10} 3 = 0.9542$

次に，3^{60}の最高位の数字を求める。①より，

$\log_{10} 3^{60} = 28.626 = 28 + 0.626$

ここで，先の結果から，

$\log_{10} 4 < 0.626 < \log_{10} 5$

より，

$28 + \log_{10} 4 < 28 + 0.626 < 28 + \log_{10} 5$

よって，

$\log_{10} 4 \times 10^{28} < \log_{10} 3^{60} < \log_{10} 5 \times 10^{28}$

となるから，3^{60}の最高位の数字は 4 である。

（参考までに，3^{60}を Excel で計算すると，$3^{60} = 4.23912 \times 10^{28}$ となる）

今回の計算結果の 0.626 を常用対数表で逆引きすると，4.23 となることから，

$3^{60} = 4.23 \times 10^{28}$

となる。

今回の問題で，もし，常用対数表が使えるならば，0.626 に対する真数を常用対数表で逆引きして 4.23 を求め，

$3^{60} = 4.23 \times 10^{28}$

この結果から，最高位の数字が 4 となる。今回は，常用対数表を使わなくても，

$\log_{10} 2 = 0.301$

$\log_{10} 3 = 0.4771$

$\log_{10} 4 = 0.602$,

$\log_{10} 5 = 0.691$

$\log_{10} 6 = 0.7781$

$\log_{10} 8 = 0.903$

$\log_{10} 9 = 0.9542$

の結果から，0.626 をはさみ，最高位の数字を絞り込むことができる。